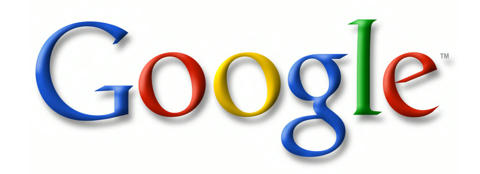
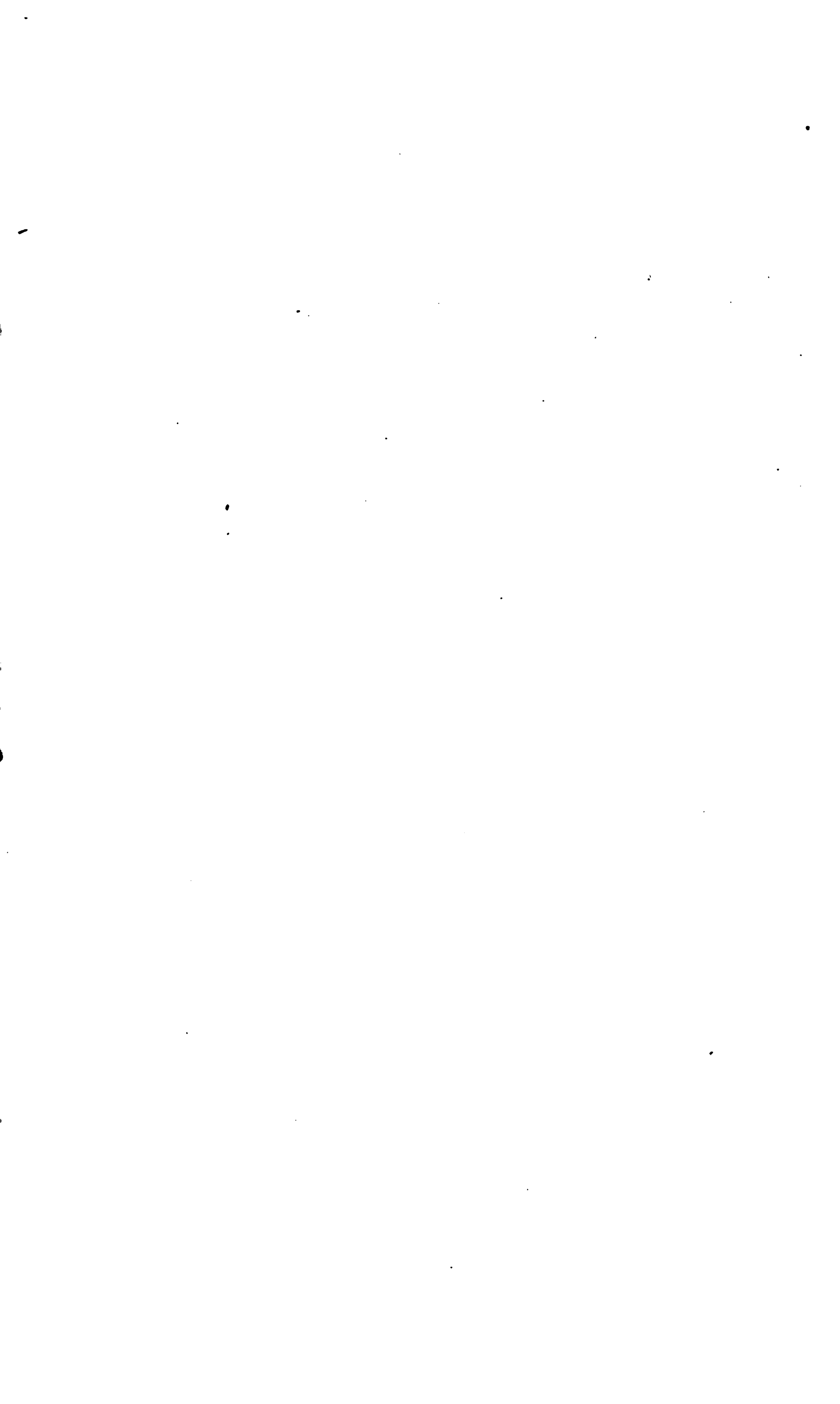



Stanford University Libraries
3 6105 025 498 259







ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Sechzehnter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

(H. Ehlers & Co.)

1898.

Inhalts-Verzeichniss
des sechzehnten Teils.

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite

Geschichte der Mathematik und Physik.

Methode und Principien.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

Erd- und Himmelskunde.

Litterarische Berichte.

Berichtigungen

im 16. Teile.

Seite 274 Zeile 7 v. o. statt $p_3 = \pm p_1$ setze $p_2 = \pm p_3$
12 „ c_3 „ x_3
14 „ Geraden setze Gerade
5 v. u. statt $p_1 \xi_3 \xi_2$ setze $p_2 \xi_3 \xi_1$

Seite 275 Zeile 3 v. u. statt des 𝔎 . . . setze eingeschriebenen 𝔎 . . .
statt des 𝔖 . . . setze die Strahlen des 𝔖 . . .

Seite 276 Zeile 5 v. u. statt dem setze den
Seite 278 Zeile 4 v. o. statt x_5 setze x_3
Seite 278 Zeile 16 v. u. statt x_7 setze x_1
Seite 279 Zeile 5 v. o. statt 𝔖𝔤𝔤 setze 𝔖ſ𝔤
Zeile 8 v. o. statt diejenige setze derjenige
Seite 280 Zeile 5 v. u. statt $p\varepsilon$ setze p_i
Seite 281 Zeile 10 v. o. statt 7—8 setze 277
Seite 282 Zeile 13 statt $A_1 A_2$ setze $A_2 A_3$
Seite 282 Zeile 22 statt T setze Γ
Seite 282 Zeile 22 statt punkt setze büschel
Seite 283 Zeile 18 statt z setze x
Seite 283 Zeile 26 statt (11) setze $(11)_3$
Seite 286 Zeile 6 statt C setze E

Seite 287 Seite 4 v. o. lautet: $\frac{s_2^2 - s_3^2}{\xi_1} + \frac{s_3^2 - s_1^2}{\xi_2} + \frac{s_1^2 - s_2^2}{\xi_3} = 0$

Seite 287 Zeile 6 v. o. statt $\frac{1}{s_3 - s_3^2}$ setze $\frac{1}{s_1^2 - s_2^2}$

Seite 287 Zeile 4 v. u. statt ε_2 setze ε_1

Seite 288 Zeile 5 v. o. statt Sig setze Sgp.

Seite 288 Zeile 7 v. o. statt 1 : 2 setze 2 : 1

Seite 288 Zeile 10 v. u. statt innere Aehnlichkeit setze innern Aehnlichkeitspunkt.

Seite 288 Zeile 4 v. u. statt laufender setze laufenden

Seite 289 Zeile 15 v. u. statt a_4 setze a'_4

Seite 289 Zeile 1 v. u. statt A_{13} setze A_{12}

Seite 291 Zeile 4 v. ob. statt $-p_3\xi_3$ setze $p_3\xi_3$

Seite 291 Zeile 7 v. o. hinzuzufügen $= 0$

Seite 291 Zeile 11 v. u. statt $+p_3$ setze $: p_3$

Seite 292 Zeile 1 v. ob. statt $\frac{q_3}{q_1}$ setze $\frac{q_3}{q_1}$

Seite 292 Zeile 3 v. o. statt $+$ setze $:$ (2mal)

Seite 292 Zeile 9 v. u. statt $\cos A_1$ setze $\sin A_1$

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt 2(4 setze 17)

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt $x_2 x_1$ setze $x_3 x_1$

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt $x_1 x_3$ setze $x_1 x_2$

Seite 294 Zeile 17 v. ob. statt p_2^4 setze p_2^2

Seite 294 Zeile 3 v. u. statt einem bei A_4 setze einem

Seite 296 Zeile 18 v. ob., die letzteren statt letzteren

Seite 296 Zeile 10 v. u. statt U und V setze x und y

Seite 296 Zeile 2 v. u. statt 45 setze 15

Seite 297 Zeile 3 v. ob. statt Die in 2 setze Je 2

Seite 300 Zeile 1 v. ob. statt P setze P'

Seite 300 Zeile 15 v. o statt $+R'S$ setze $\pm R'S$

Seite 300 Zeile 17 v. o. statt QQ setze QQ'

Seite 301 Zeile 12 v. ob. statt $\xi_3 = 0$ setze $\xi_2 = 0$

Seite 302 Zeile 4 v. u. hinzuzufügen (s. S. 277)

Seite 303 Zeile 9 v. o. vor $\frac{x_3}{n_u}$ setze $+\frac{x_3}{n_2}(x_1 - x_2 + x_3)$

Seite 304 Zeile 2 v. ob. hinzuzufügen $= 0$

Seite 306 Zeile 2 v. u. statt die variabelen setze und variabeln

Seite 307 Zeile 15 v. u. statt Leitcurve setze Leitcurve zerfallen.

Seite 307 Zeile 7 v. u. statt S. 31 setze S. 305.

Seite 308 Zeile 2 v. o. statt 3 setze 8]

Seite 308 Zeile 13 v. o. statt $x_3 x_2$ setze $x_3 x_1$

Seite 308 Zeile 14 v. o. statt $\frac{p_1}{p_2} -$ setze $\frac{p_1}{p_2} +$

Seite 311 Zeile 9 v. o. statt ε_1 setze ξ_i

Seite 311 Zeile 6 v. u. statt 8 setze S

Seite 312 Zeile 11 v. o. vor $(x_1 + x_2 - x_3)$ hinzuzufügen $(x_1 - x_2 + x_3)$

Seite 312 Zeile 7 v. u. statt $)p_2 - p_3{}^2)^2$ setze $(p_2 - p_3)^2$

Seite 31 3Zeile 1 v. u. statt $\cot A_3$ setze $+ \cot A_3$

Seite 315 Zeile 5 v. o. statt formed setze forward

Seite 317 Zeile 16 v. u. statt F setze Feuerbachschen

Seite 317 Zeile 12 statt Ferrers setze Ferrers (s. p. 315)

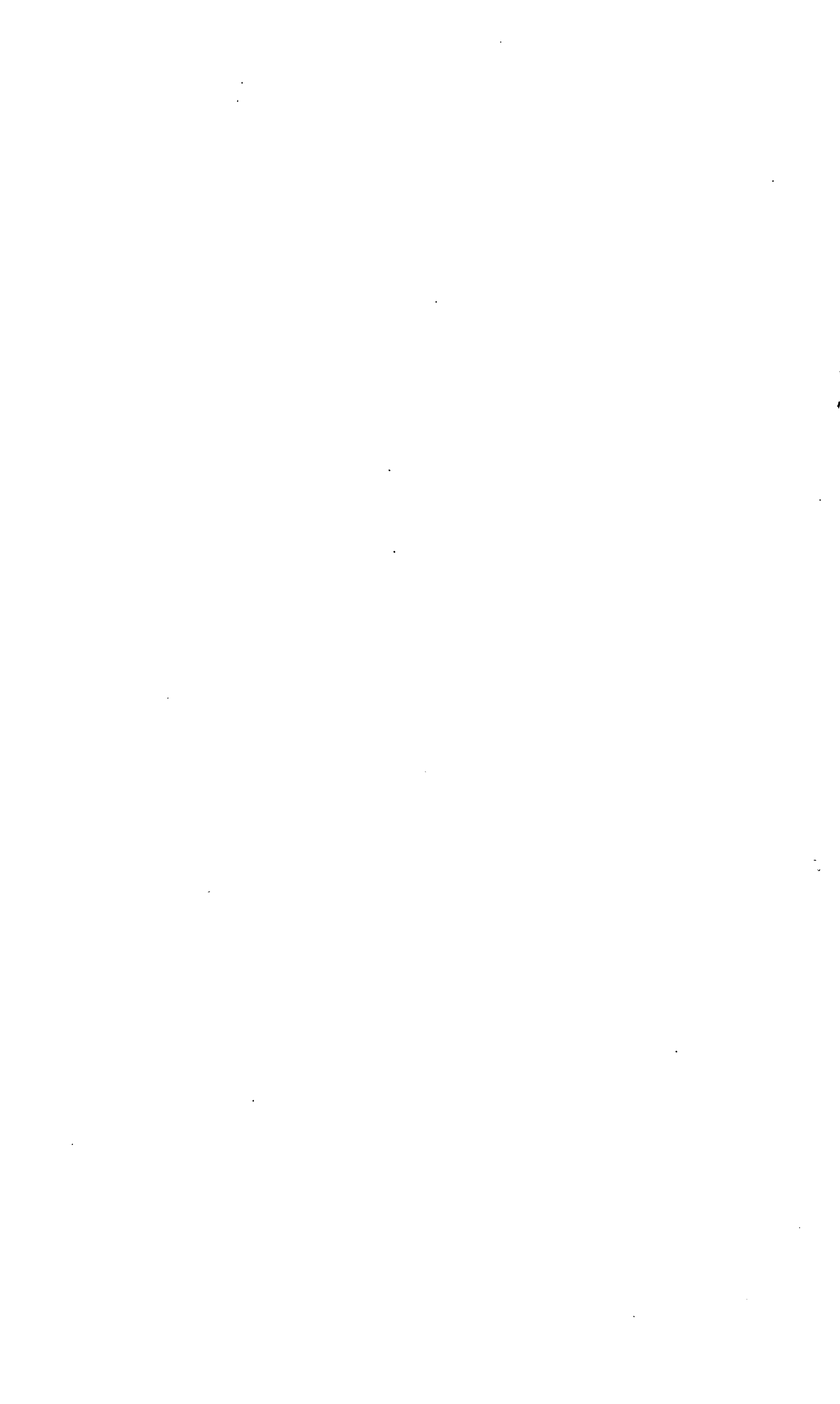
Seite 317 Zeile 10 statt FNU setze FOU

Seite 317 Zeile 8 v. u. statt statt UCS setze UOG

Seite 317 Zeile 8 v. u. statt 3ψ setze $3\psi'$ oder $2R - 3\psi'$

Seite 317 Zeile 3 v. u. statt 40^0 setze 90^0

Seite 319 Zeile 3 v. o. statt dem Berührungspunkt setze dem Berührungspunkte



I.

Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges.

Von

Th. Christen

in Basel.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, den Cauchy'schen Satz vom freien Integrationsweg, der sich schon lange als enorm fruchtbar erwiesen hat, noch weiter zu verwerten. Die zur Anwendung gelangenden Methoden machen es möglich, entweder die Resultate auf kürzerem und eleganterem Wege abzuleiten, als dies bisher geschehen ist, oder eine Gruppe verwandter Integrale, die sich in verschiedenen Werken zerstreut finden, unter einem einheitlichen Gesichtspunkte zu behandeln, oder endlich neue Integrale zu berechnen und solche, für welche in andern Arbeiten falsche Werte angegeben sind, zu berichtigen.

Den Satz von Cauchy [1]) setze ich in der folgenden Form als bewiesen voraus:

---

1) Zur Entwicklungsgeschichte dieses Theorems vergleiche man folgende Abhandlungen Cauchy's: „Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal". Oeuv. compl. série. 2 tome VI. pag. 23 „De l'influence que peut avoir sur la valeur d'une intégrale définie l'ordre dans lequel on effectue les intégrations." Oeuv. série 2 tome VI page 112. „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires," Separatdruck erschienen 1825.

Ist $z = x + iy$ und besteht zwischen x und y irgend eine Relation, nach welcher ein Punkt mit den Coordinaten x und y auf einer geschlossenen Curve liegt, so ist das Integral

$$\int u(z)\, dz$$

ausgedehnt über den ganzen Umlauf der geschlossenen Curve gleich dem Product von $i2\pi$ in die Summe aller „Résidus" der Function $u(z)$, soweit sich dieselben auf Pole beziehen, die vom dem Integrationsweg umschlossen werden.

$$\int u(z)\, dz = i\, 2\pi \sum_{h=1}^{h=n} c_h$$

$$c_h = \lim_{\delta=0} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \delta^{p-1}} \left\{ \delta^p \,.\, u(z_h + \delta) \right\}$$

Die Werte $z_h (h = 1, 2 \ldots u)$ sind die vom Integrationsweg umschlossenen Pole von $u(z)$ und p ist bestimmt durch die Bedingung

$$0 < \operatorname{mod} \lim_{\delta=0} \delta^p u(z_b + \delta) < \infty$$

wobei selbstverständlich für $p = 1$

$$c_h = \lim_{\delta=0} \delta \,.\, u(z_h + \delta)$$

zu setzen ist.

Es sei noch daran erinnert, dass Cauchy unter

$$\underset{x_1\ \ y_1}{x_2 \mathfrak{E} y_2} ((u(z)))$$

die Summe aller Résidus versteht, deren Pole innerhalb der Grenzen

$$x_1 < x < x_2$$
$$y_1 < y < y_2$$

liegen.

Schliesst der Integrationsweg keinen Pol der Function $u(z)$ ein, so ist das Integral gleich null.

I. Ableitung einiger Integrale, die mit dem Exponentialintegral verwandt sind.

Die Berechung des Exponentialintegrales

$$\varphi(a) = \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \tag{1}$$

geschieht durch Reihenentwicklung. Durch Differentiation der Gleichung (1) nach a kommt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = - \frac{e^{-a}}{a} = - \sum_0^\infty {}_h (-1)^h \frac{a^{h-1}}{h!}$$

woraus durch Integration

$$\varphi(a) = \gamma + \log\left(\frac{1}{a}\right) - \sum_1^\infty {}_h \frac{(-a)^h}{a \cdot h!} \qquad (2)$$

Für den Wert von $\varphi(a)$ habe ich absichtlich den sonst gebräuchlichen Ausdruck

$$\varphi(a) = -\mathfrak{E}(-a)$$

wobei

$$\mathfrak{E}(z) = C\,^{1)} + \tfrac{1}{2}\lg(z^2) + \sum_1^\infty {}_h \frac{z^h}{h \cdot h!}$$

vermieden, weil $Ei(z)$ für positive und negative Werte von z eine eindeutig definirte Function ist, während das Glied $\lg\left(\frac{1}{a}\right)$ in Gleichung (2) andeuten soll, dass die Function $\varphi(a)$ für negative Werte von a jegliche Bedeutung verliert, wenn sie, wie hier, durch das bestimmte Integral (1) definirt ist (man müsste dann schon durchaus an dem unglücklichen Begriff der „Valeur principale" festhalten wollen!).

Dass die Constante γ dem negativen Wert der Mascheroni'schen Constante gleich ist, geht aus der folgenden Transformation hervor:

Die Mascheroni'sche Constante[2]) ist definirt als

$$C = \int_0^1 \lg\left(\lg \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^\infty e^{-y} \log y \, dy$$

woraus durch partielle Integration

$$C = - \lim_{\delta = 0} \left\{ e^{-\delta} \lg \delta + \int_\delta^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \right\}.$$

und nach (1)

---

1) Unter C sei durchweg die Mascheronische Constante

$$C = 0,\ 577\ 215\ 665\ldots$$

verstanden; über deren genauen Wert vergl. Crelles Journ, XLIX pag. 375.

2) Mascheroni: Adnotationes ad calc. integ. Euleri (1790) pag. 13.

$$C = -\lim_{\delta=0}\{\log\delta + \varphi(\delta)\} = -\gamma$$

sodass

$$\varphi(a) = \int_a^\infty e^{-x}dx = -C + \lg\left(\frac{1}{a}\right) - \sum_1^\infty \frac{(-a)^h}{h\,.\,h!} \tag{4}$$

Man setze jetzt

$$u(z) = \frac{e^{-az}}{1+z} \tag{5}$$

und nehme als Integrationsweg das unendliche grosse Rechteck $OABC$ (Fig. 1). Innerhalb desselben liegt kein Pol von $u(z)$; das Integral über das Rechteck ist daher gleich null. Die einzelnen Teilintegrale ergeben sich als

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x} = e^a\varphi(a)$$

$$\int_A^B u\,dz = \lim_{k=\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-a(k+iy)}}{1+k+iy}d(iy) = 0$$

$$\int_B^C u\,dz = -\lim_{k=\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+ik)}}{1+x+ih}dx = 0$$

$$\int_C^0 u\,dz = -i\int_0^\infty \frac{e^{-iay}}{1+iy}dy$$

und durch Addition kommt

$$0 = e^a\varphi(a) - i\int_0^\infty \frac{e^{-iay}}{1+iy} \tag{6}$$

Setzt man

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ay}{1+y^2}dy, \quad G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{1+y^2}dy \tag{7}$$

so ergiebt Gleichung (6) nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$G + \frac{\partial G}{\partial a} = e^a\varphi(a) \tag{8}$$

$$F + \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \tag{9}$$

Die Integration von (9) liefert die längst bekannte Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos ay}{1+y^2}\,dy - \int_0^\infty \frac{y \sin ay}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}$$

Von mehr Interesse ist die Differentialgleichung (8), deren Integration [1]), wie man leicht ersieht, auf die Gleichungen

$$G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{1+y^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\{e^{-a}\,\mathfrak{E}(a) - e^{a}\,\mathfrak{E}(-a)\} \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{y \cos ay}{1+y^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}\{e^{-a}\,\mathfrak{E}(a) + e^{a}\,\mathfrak{E}(-a)\} \tag{11}$$

führt. Die Gleichungen (10) und (11) bleiben für negative Werte von a bestehen, überhaupt sind beide Integrale für alle reellen Werte von a durchaus bestimmt, und deshalb ist die Verwendung der Function $\mathfrak{E}$ die einzig gegebene. Beide Gleichungen sind von mehreren Mathematikern gefunden worden, so von Schlömilch [2]), Arndt [3]), Meyer [4]), doch sind die von ihnen angewandten Methoden nicht so einfach.

Im Folgenden kommen die mit $Ei(z)$ verwandten Reihen

$$\mathfrak{C}(z) = C + \tfrac{1}{2}\lg(z^2) + \sum_1^\infty{}_h \frac{(-z^2)^h}{2h\,.\,(2h)!}$$

$$\mathfrak{S}(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^h\, z^{2h+1}}{(2h+1)\,.\,(2h+1)!}$$

zur Verwendung. Sie dienen zur Berechnung des Sinus- und des Cosinusintegrales. Man beweist leicht, dass

$$\int_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -\,Ci(a) \qquad a > 0 \tag{12}$$

und

---

1) Das vollständige Integral ist

$$G = \gamma\,.\,e^{-a} + \tfrac{1}{2}\{e^{-a}\,\mathfrak{E}(a) - e^{a}\,\mathfrak{E}(-a)\}$$

und für $a = 0$ wird $\gamma = 0$.

2) Crelles J. V pag. 204.

3) Ibid. XI pag. 70.

4) Ibid. XLIII pag. 72.

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - Li(a) \tag{13}$$

Die Identität der Constanten des Cosinus- und des Exponentialintegrales hat zuerst Arndt [1]) nachgewiesen, indem er die beiden Integrale von einander subtrahirte und zeigte, dass die Differenz verschwindet, wenn a gleich null gesetzt wird.

Auf die Integrale (12) und (13) lässt sich nun durch eine kurze Rechnung die Function

$$\psi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx \tag{14}$$

zurückführen. Man setze

$$u(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z} \tag{15}$$

und führe das Integral $\int u\,dz$ um das Rechteck $0ABC$ (Fig. 1.) Es ergiebt sich

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{\cos ax + i \sin ax}{1+x}\,dx$$

$$\int_A^B = 0, \quad \int_B^C = 0$$

$$\int_C^0 = -\int_0^\infty \frac{e^{-ay}(y+i)}{1+y^2}\,dy = -\,i\psi(a) + \frac{\partial\psi(a)}{\partial a}$$

und durch Addition

$$0 = \psi(a) - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x}\,dx$$

$$0 = \frac{\partial\psi(a)}{\partial a} + \int_0^\infty \frac{\cos ax}{i+x}\,dx$$

Setzt man in beiden Gleichungen

---

1) Grunert's Archiv X pag. 225.

$$x = \frac{y}{a} - 1$$

so erhält man mit Hilfe von (12) und (13)

$$\left.\begin{aligned} \psi(a) &= \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2}dy = \cos a\left\{\frac{\pi}{2} - Li(a)\right\} + \sin a\,\mathfrak{Ci}(a) & (16)\\ -\frac{\partial\psi(a)}{\partial a} &= \int_0^\infty \frac{ye^{-ay}}{1+y^2}dy = -\cos a\,\mathfrak{C}(a) + \sin a\left\{\frac{\pi}{2} - \mathfrak{S}(a)\right\} & (17)\end{aligned}\right\} a>0$$

Zu gleichen Resultaten kommt Schlömilch [1]) auf folgende Art: Man liest direct aus Gleichung (14) ab, dass

$$\frac{\partial^2\psi(a)}{\partial a^2} + \psi(a) = \frac{1}{a}$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist

$$\psi(a) = \{A - \mathfrak{S}(a)\}\cos a + \{B + \mathfrak{C}(a)\}\sin a$$

Nun stösst aber der exacte Beweis dafür, dass

$$B = 0$$

auf erhebliche Schwierigkeiten, sodass diese anscheinend sehr einfache Ableitung schliesslich doch bedeutend complicirter ausfällt, als die oben angeführte.

II. Integrale von 0 bis ∞ über algebraisch-trigonometrische Functionen.

Es soll zuerst eine allgemeine Integrationsformel abgeleitet werden, umfassend alle Functionen $u(z)$ welche der Bedingung

$$\lim_{k=\infty} k \,.\, e^{i\vartheta} \,.\, u(ke^{i\vartheta}) = A \tag{18}$$

genügen, wobei A endlich und von ϑ unabhängig sein muss, solange ϑ zwischen den Grenzen 0 und π bleibt Ferner darf $u(z)$ für keinen reellen Wert des Argumentes z unendlich gross werden. Führt man unter diesen Voraussetzungen das Integral $\int udz$ um das unendlich grosse Rechteck $ABCD$, so wird

1) Crelles J. XXXIII pag. 325.

$$\int u\,dz = i\,2\pi \mathop{\mathfrak{E}}_{-\infty\;\;0}^{\infty\;\;\infty} ((\,u(z)\,)) \tag{19}$$

Die Längen OB und BC sind beliebig verschieden, beide aber unendlich gross; sie seien k und $\varkappa$; dagegen ist vorausgesetzt, dass

$$AO = CB = DP = PC = k$$

Dann wird

$$\int_A^B = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx, \qquad \int_B^C = i\int_0^k u(k+iy)\,dy$$

$$\int_C^D = -\int_{-k}^{k} u(x+ik)\,dx, \quad \int_D^A = -\,i\int_0^k u(-k+ly)\,dy$$

und nach (18)

$$\int_B^C + \int_D^A = iA\int_0^k \left\{\frac{1}{k+iy} + \frac{1}{k-iy}\right\} dy$$

$$\int_C^D = -\,A\int_0^k \left\{\frac{1}{x+i\varkappa} - \frac{1}{x-i\varkappa}\right\} dx$$

woraus durch Addition

$$\int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = i2A\left\{\pi - \operatorname{arctg}\frac{k}{\varkappa} - \operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k}\right\}$$

bekanntlich gilt aber für positive x.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

sodass

$$\int u\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx + i\pi A$$

woraus man mit Hilfe von (19) erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = i\pi\left\{2 \mathop{\mathfrak{E}}_{-\infty\;\;0}^{\infty\;\;\infty} ((\,u(z)\,)) - A\right\} \tag{20}$$

Stellt man ferner an die Function u die Forderung

$$u(-x = u(x) \tag{18a}$$

so kommt aus (20)

$$\int_0^\infty u(x)\,dx = i\pi \left\{ \mathop{E}_{-\infty}^{\infty} \mathop{}_{0}^{\infty} ((\, u(s) \,)) - \tfrac{1}{2}A \right\}\text{[1]} \tag{21}$$

Eine grosse Zahl algebraisch-trigonometrischer Integrale lassen sich aus dieser Gleichung (21) ableiten. Es sei vorausgeschickt, dass die hier zur Behandlung kommenden Integrale sämtlich den Nenner

$$e^q + e^{-q} - 2\cos px$$

enthalten. Setzt man an dessen Stelle den anderen

$$1 - 2\alpha\cos px + \alpha^2$$

so liegt darin keine principielle Aenderung. Dagegen wird sich zeigen, dass bei Anwendung der zweiten Form die Integrale durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt werden müssen, jenachdem $\alpha^2 \gtrless = 1$ ist. Diejenigen unter ihnen, die bereits von Anderen gefunden worden sind, werden auch überall doppelt aufgeführt für $\alpha^2 > 1$ und für $\alpha^2 < 1$. Um beide Fälle zugleich behandeln zu können, wähle ich die erste Form des Nenners, aus welchen die zweite dadurch hergestellt wird, dass man die Gleichung mit $e^{\pm q}$ multiplicirt, jenachdem $\alpha^2 \lessgtr 1$ sein soll. Es mögen endlich in diesem Abschnitt zur Vereinfachung die folgenden Bezeichnungen festgehalten werden

$$p = 2\pi a > 0, \quad q = 2\pi b > 0, \quad r = e^q + e^{-q}$$

1. Die Reihe

$$\sum_{x=4}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 + b^2}$$

wird summirt durch Auswertung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{r - 2\cos x} \cdot \frac{dx}{x}$$

---

1) Diese Relation hat auf andere Art bereits Cauchy nachgewiesen; er bringt sie in seiner Abhandlung „Sur quelques relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.“ Oeuvres compl. série 2 tome VI pag. 124.

Die Pole der Function

$$u(z) = \frac{\sin z}{r - 2\cos z} \cdot \frac{1}{z} \tag{22}$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$r - 2\cos z = 0$$

Da nur die Pole mit positivem imaginärem Teil in Betracht kommen, so sind dieselben enthalten in

$$z_x = 2\pi(x + ib)$$

worin x alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Dann wird

$$v_x = \frac{\sin z_x}{z_x} \cdot \lim_{z = z_x} \frac{z - z_x}{r - 2\cos z} = \frac{1}{2 z_x}$$

$$c_0 = \frac{-i}{4\pi b}, \quad c_x = \frac{1}{4\pi(x + ib)}, \quad c_{-x} = \frac{-1}{4\pi(x - ib)}$$

$$\mathfrak{E}_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{E}_0^{\infty}((u)) = \frac{-i}{4\pi}\left\{\frac{1}{b} + 2b\,\mathfrak{E}_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2}\right\}$$

Ferner ist

$$A = \lim_{k = \infty} \frac{\sin(k \cdot e^{i\vartheta})}{r - 2\cos(k e^{i\vartheta})} = -\frac{i}{2}$$

und nach (21), wenn $x = py$

$$\int_0^\infty \frac{\sin py}{e^q + e^{-q} - 2\cos py} \cdot \frac{dy}{y} = \tfrac{1}{4}\left\{-\pi + \frac{1}{b} + 2b \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + b^2}\right\} \tag{23}$$

Dieses Integral hat Plana[1]) nach einer anderen Methode berechnet, die ich kurz andeuten will. Es ist

$$x \cdot u(x) = \frac{e^{-q}\sin x}{(1 - e^{-q + ix})(1 - e^{-q - ix})} = \sum_1^\infty e^{-xq} \sin x x$$

$$\int_0^\infty u(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi}{e^q - 1} \tag{23a}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (23), so erhält man

1) Mem. della reale acad. della science di Torino 1818 pag. 30.

$$\frac{1}{b} + 2b \overset{\infty}{\Sigma}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa^2 + b^2} = \pi \frac{e^{\pi b} + e^{-\pi b}}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \tag{24}$$

Diese ist eine bekannte Reihe, sie entspricht für imaginäre Werte von b der Reihe für die Cotangente

$$b = ia$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi a = \frac{1}{a} - 2a \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 - a^2} \tag{24a}$$

Aus (24) leitet man leicht die verwandte Reihe

$$\frac{1}{b} + 2b \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa}}{\varkappa^2 + b^2} = \frac{2\pi}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \tag{25}$$

ab, die später Verwendung finden wird.

2. Es sei

$$u(z) = \frac{\sin pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{z}{1 + z^2}$$

Die Pole, deren Résidus unter die Summe $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}((u))$ fallen, sind

$$az_{\varkappa} = \varkappa + cb$$

und

$$z' = i$$

Sind die entsprechenden Résidus $c_{\varkappa}$ und c', so ist

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}((u)) = c' + c_0 + \sum_{1}^{\infty}(c_{\varkappa} + c_{-\varkappa})$$

Berechnet man die einzelnen Résidus und definirt

$$F(\varkappa, b, a) = \frac{\varkappa^2 + b^2 - a^2}{\varkappa^4 + 2(b^2 + a^2)\varkappa^2 + (b^2 - a^2)^2} \tag{26}$$

so geht (25) über in

$$\underset{-\infty}{\overset{\infty}{}}\mathfrak{E}_{0}^{\infty}((u)) = -\frac{i}{4\pi}\left\{\pi \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} + \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_{1}^{\infty} F(\varkappa, b, a)\right\}$$

endlich ist

$$A = \lim_{k=\infty} \frac{\sin(pke^{i\vartheta})}{r - 2\cos(pke^{i\vartheta})} = -\frac{i}{2}$$

sodass nach (21)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{1 + x^2} = \frac{1}{4}\left\{\pi \frac{e^q + e^{-q} - 2e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} + \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_{1}^{\infty} F(\varkappa, b, a)\right\} \tag{27}$$

Ueberträgt man die von Plana benutzte Methode auf dieses Integral, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{e^q + e^{-c} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi/2}{e^{p+q}-1} \tag{27a}$$

Diese Gleichung liefert mit (27) zusammen die Summe der Reihe:

$$\frac{b}{b^2-a^2} + 2b\sum_1^\infty F(x, b, a) = \pi\,\frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q} - e^p - e^{-p}} \tag{28}$$

Die Entwicklungen der Paragraphen 1. und 2. dienten dazu, die Summenformeln (24) und (28) abzuleiten; in den folgenden Abschnitten werden auf Grund der genannten Formeln weitere Integrale berechnet. Aus (28) erhält man für $b = 0$ (nachdem man vorerst durch b dividirt hat.)

$$\sum_1^\infty \frac{x^2 - a^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2\right\} \tag{28a}$$

und mit Hülfe von (24)

$$\sum_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} = \left(\frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \cdot \left\{\frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a} - 1\right\} \tag{29}$$

und

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left\{\left(\frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a}\right) - \frac{1}{2a^2}\right\} \tag{30}$$

Für das hier berechnete Integral (27a) giebt die Láska'sche Sammlung [1]) einen falschen Wert an, indem dort steht

$$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{1 - 2p\cos rx + p^2} \cdot \frac{x\,dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{rq}}{(1+p)(e^{2qr} - p)} \qquad p < 1$$

mit Angabe der Quelle „Legendre Exerc. 4, 132". Ebenso ist der Fall $p > 1$ nach Ohm [2]) falsch citirt. Die beiden angeführten Stellen enthalten das Integral so, wie es sich aus meiner Formel (27a) ergiebt, wenn man dieselbe mit $e^{\pm q}$ multiplicirt und die Substitution

1) Dr. O. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik pag, 254, 111.

2) Ohm, Auswertungsmethoden bestimmter Integrale pag. 161.

$$x = \frac{y}{s}$$

$$p = s \cdot p'$$

einführt. Ebenso muss die Formel 101 auf pag 253. des genannten Buches corrigirt werden, indem für den Fall $p > 1$ in den Nenner nicht $1 - p$, sondern $p - 1$ zu stehen kommt. Man vergleiche meine Formel (23a), indem man in derselben beiderseits im Nenner mit e^q multiplicirt.

Ueber die Summen (29) und (30) sei noch bemerkt, dass aus ihnen durch Differentiation nach a die Summen

$$\sum_1^\infty \frac{\varkappa^{2m}}{(\varkappa^2 + a^2)^n} \qquad m < n$$

bis zu beliebig hohen Werten von m und n berechnet werden können.

3. Die drei Functionen

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1+z^2} \\ u_2 &= \frac{\cos pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1+z^2} \\ u_3 &= \frac{1 - e^{\gamma q}\cos pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{1}{1+z^2}, \quad \gamma = \pm 1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

liefern die Integrale

$$J_1 = \int_0^\infty u_1(x)\,dx, \quad J_2 = \int_0^\infty u_2(x)\,du, \quad J_3 - \int_0^\infty u_3(x)\,dx$$

von denen das dritte leicht nach der Plana'schen Methode berechnet wird, zugleich aber auch direct aus J_1 und J_2 sich ergiebt und daher für diese eine Controle liefert.

Alle drei Functionen haben die nämlichen Pole:

$$z' = i$$

$$a z_\varkappa = \varkappa + ib \qquad -\infty < \varkappa < \infty$$

Eine weitere gemeinsame Eigenschaft ist

$$A = 0$$

Für alle drei gilt daher

$$J = i\pi \left\{ c' + c_0 + \sum_1^\infty (c_\varkappa + c_{-\varkappa}) \right\}$$

Für u_1 erhält man

$$c' = \frac{i}{2} \frac{1}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^\infty (c_x + c_{-x}) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty F(x, a, b) \right\}$$

man vergleiche die Definition (26) und berechne die Summe über $F(x, a, b)$ nach (28), indem dort a und b und dementsprechend p mit q zu vertauschen ist.

Für u_2 berechnet man

$$c' = \frac{i}{4} \frac{e^p + e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^\infty (c_x + c_{-x}) = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty F(x, a, b) \right\}$$

und mit Hilfe von (2S) wird jetzt

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{p+q} + 1}{e^{p+q} - 1}$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^p + e^q}{e^{p+q}}$$

$$J_3 = J_1 - e^{\gamma q} J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma (p+q)}}$$

Alle drei Integrale lassen sich noch etwas verallgemeinern, wenn man $\frac{x}{s}$ an Stelle von x und $p \, . \, s$ an Stelle von p setzt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps+q} + 1}{e^{ps+q} - 1} \tag{32}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps} + e^q}{e^{ps+q} - 1} \tag{33}$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{\gamma q}\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma (ps+q)}}, \quad \gamma = \pm 1 \tag{34}$$

Das Integral (32) hat bereits Bigler[1]) berechnet und zwar eben-

---

1) Grunert's Archiv, 2. Reihe IX pag. 81.

falls nach den Methoden der Veränderung des Integrationsweges, wenngleich auf etwas andere Art. Gleichung (34) indessen stimmt überein mit einem Resultate, welches viel früher schon Boncompagni [1]) gefunden hat nach der Plana'schen Methode: Man beweist leicht, dass

$$\frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}=\sum_1^\infty \alpha^x\cos \varkappa px$$

wonach

$$\int_0^\infty \frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+{}^2\alpha}\,\frac{dx}{s^2+\varkappa^2}=\frac{\pi}{2s}\,\Sigma\,\alpha^x_{\varkappa}\,e^{-\varkappa ps}=\frac{\pi}{2s}\,\frac{1}{1-\alpha e^{-ps}}$$

Dieses Resultat unterliegt jedoch der Beschränkung

$$\alpha^2<1$$

weil die Reihe $\Sigma\alpha^\varkappa\cos\varkappa px$ divergirt, sobald α^2 die Grenze 1 erreicht. Dagegen hätte Boncompagni leicht auch den Wert des Integrals für $\alpha^2>1$ finden können, wenn er an Stelle seiner Reihe die andere

$$\frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}=-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\varkappa\cos\varkappa px \qquad \alpha^2>1$$

verwendet hätte; man erhält mit deren Hilfe [2])

$$\int_0^\infty \frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=-\frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{\alpha e^{ps}-1} \qquad \alpha^2>1$$

Ein anderes bekanntes Integral leitet man aus (34) ab, indem man dort $e^{\gamma q}=\frac{1}{\sigma}$ setzt und nach σ integrirt:

$$\int_0^\infty \log\{1-2\sigma\cos px+\sigma^2\}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{\pi}{s}\lg\{C\cdot(\sigma-e^{\gamma ps})\},$$

$$\gamma=\pm 1 \text{ jenachdem } \sigma^2 \lessgtr 1$$

Es ist zu erwarten, dass C zwei verschiedene Werte hat, jenachdem $\sigma \gtrless 1$. Es sei $\sigma<1$, $\gamma=1$, so findet man für

$$\sigma=0$$

---

1) Crelle's J. XXV, pag, 93.

2) Ohm, Auswertungsmethoden etc. § 26.

$$0 = \frac{\pi}{s}\lg\{-Ce^{ps}\}, \quad C = -e^{-ps}$$

$$\int_0^\infty \lg\{1 - 2\sigma\cos px + \sigma^2\} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg(1 - \sigma e^{-ps}), \quad \sigma^2 < 1 \quad (35)$$

Von dieser Gleichung subtrahire man die Identität

$$\int_0^\infty \lg(\sigma^2) \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} \qquad = \frac{\pi}{s}\lg\sigma$$

so ergiebt sich, wenn man $\frac{1}{\sigma}$ durch τ ersetzt,

$$\int_0^\infty \lg\{1 - 2\tau\cos px + \tau^2\} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg(\tau - e^{-ps}), \quad \tau^2 > 1 \quad (35a)$$

Eine ganze Serie weiterer Integrale lässt sich aus den Gleichungen (32) und (33) ableiten. Es wurde schon einmal die bekannte Reihe

$$\frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} = \sum_1^\infty e^{-\varkappa q}\sin\varkappa px \quad (36)$$

citirt. Nach dieser Reihe entwickle man die linken Seiten der Gleichungen (32) und (33), die rechten dagegen nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \Sigma_\varkappa x^\varkappa \qquad x^2 < 1$$

beide nach Potenzen von e^{-q}. Man überzeugt sich leicht, dass beide Reihen unbedingt convergent sind; die Coefficienten gleicher Potenzen von e^{-q} müssen daher alle links und rechts übereinstimmen.

Die Berechnung der Coefficienten führt auf die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2\varkappa+1)px}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps} + e^{-ps} - 2e^{-(2\varkappa+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (37)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\varkappa px}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - 2e^{-2\varkappa ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (38)$$

$$\int_0^\infty \sin(2\varkappa+1)px \,.\, \operatorname{ctg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - (e^{ps} + e^{-ps})e^{-(2\varkappa+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (39)$$

$$\int_0^\infty \sin 2\varkappa px \operatorname{ctg} px \,.\, \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}+e^{-ps}}{e^{ps}-e^{-ps}} \{1-e^{-2\varkappa ps}\} \tag{40}$$

Von diesen Gleichungen finden sich (37) und (38) bei Legendre [1]) und Cauchy [2]).

Zwei weitere bemerkenswerte Integrale liefert die Addition resp. Subtraction der Gleichungen (32) und (33):

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 \frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1-e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}+1}{e^{ps+q}-1} \tag{41}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1+e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}-1}{e^{ps+q}-1} \tag{42}$$

Anstatt aus diesen Gleichungen durch Reihenentwicklung, wie aus (32) und (33), neue abzuleiten, kann man einfacher verfahren, indem man unter den Gleichungen (37) — (40) die entsprechenden addirt oder subtrahirt.

Die Additionen (37) + (39) und (38) + (40) ergeben keine neuen Gleichungen, sondern bloss Specialfälle der Gleichung (40). Dagegen erhält man durch die Subtractionen (37) — (39) und (38) — (40), nachdem man noch $2p$ an Stelle von p gesetzt hat,

$$\int_0^\infty \sin(4\varkappa+2)px \,.\, \operatorname{tg} px \,.\, \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \,.\, \{1+e^{-(4\varkappa+2)ps}\} \tag{43}$$

$$\int_0^\infty \sin 4\varkappa px \,.\, \operatorname{tg} px \,.\, \frac{dx}{s^2+x^2} = -\frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1-e^{-4\varkappa ps}\} \tag{44}$$

Die Natur des Integrals (42) gestattet (im Gegensatz zu den anderen Integralen dieses Abschnittes) $s = 0$ zu setzen:

---

1) Exerc. 5. 36.

2) Sav. Etr. 1827 pag. 1; vergl. auch Liebrecht „Ueber einige best. Int." Grunert's Archiv LIX pag. 218.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{e^q - e^{-q}} \tag{45}$$

Doch scheint es mir aus verschiedenen Gründen wünschenswert, dass für die Formel (45) noch ein besonderer Beweis erbracht werde.

Es sei daher

4.

$$u(z) = \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{r - 2\cos z} \cdot \frac{1}{z^2}$$

Hier ist $A = 0$

Die Pole sind

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib), \qquad -\infty < \varkappa < \infty$$

$$i\pi \mathop{E}_{-\infty}^{\infty}{}_{0}^{\infty} ((u)) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^q - 1}{e^q + 1} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \left\{\frac{1}{b^2} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{(\varkappa^2 + b^2)^2}{\varkappa^2 - b^2}\right\}$$

und nach (28a)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{z}}{e^q + e^{-q} - 2\cos x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}}$$

woraus man (45) erhält, indem man px an Stelle von x setzt.

Entwickelt man jetzt auch Gleichung (45) links in die Reihe (36) und rechts in die geometrische Reihe und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von e, so kommt

$$\int_0^{\infty} \sin(4\varkappa + 2)\, px \,.\, \text{tg}\, px \,.\, \frac{dx}{x^2} = \pi \,.\, p \tag{46}$$

$$\int_0^{\infty} \sin 4\varkappa px \,.\, \text{tg}\, px \,.\, \frac{dx}{x^2} = 0 \tag{47}$$

Wie zu erwarten war, erweisen sich diese Gleichungen als übereinstimmend mit (43) und (44).

Für $\varkappa = 0$ liefert Gleichung (46)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 px}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,p \tag{48}$$

Aus (47) kommt für $\varkappa = 1$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\,dx = 0$$

dazu giebt (48)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot p$$

sodass

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,p \tag{49}$$

Jetzt setze man $\varkappa = 1$ in (46) und löse $\sin 6px$ auf nach Potenzen von $\sin px$ und $\cos px$. Benützt man dazu die beiden Gleichungen (49), so kommt

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin^6 px}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^4 px}{x^2}\,dx = \frac{3\pi}{16}\cdot p \\ &\int_0^\infty \frac{\sin^4 px \cos^2 px}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{16}\cdot p \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Analog findet man weiter

$$\int_0^\infty \frac{\sin^8 px}{x^2}\,dx = \frac{5\pi}{16}\cdot p, \quad \text{etc. etc.} \tag{51}$$

Nach dieser Methode berechnet man successive eine beliebige Anzahl Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \sin^{2m} px \,.\, \cos^{2n} px \,.\, \frac{dx}{x^2} \qquad \begin{aligned} m &= 1, 2, 3 \ldots \\ n &= 0, 1, 2 \ldots \end{aligned} \tag{52}$$

5. Durchaus analoge Relationen bestehen für die Function

$$u(z) = \frac{\sin \frac{z}{2}}{r - 2\cos z}\cdot \frac{z}{2} \tag{53}$$

Es wird

$$A = 0$$

die Pole sind

$$z_\kappa = 2\pi(\kappa + ib)$$

$$\Sigma c_\kappa = -\frac{i}{4\pi}\,\frac{1}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}}\left\{\frac{1}{b} + 2b\sum_1^\infty \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2 + b^2}\right\}$$

und nach (25), wenn man noch x durch $p \,.\, x$ ersetzt,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{e^q - e^{-q}} \tag{54}$$

Hieraus ist weiter

$$\sum_1^\infty e^{-\kappa q}\int_0^\infty \frac{\sin 2\kappa px}{\cos px}\cdot\frac{dx}{x} = \pi\sum_1^\infty e^{-(2\kappa+1)q}$$

und, weil beide Reihen unbedingt convergiren,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(4\kappa + 2)px}{\cos px}\,\frac{dx}{x} = \pi \tag{55}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4\kappa px}{\cos px}\,\frac{dx}{x} = 0 \tag{56}$$

Vergleicht man die beiden letzten Gleichungen mit (46) und (47), so sieht man leicht ein, dass allgemein gelten muss

$$\int_0^\infty \sin^{2m+1}px \,.\, \cos^{2m}px \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{1}{p}\int_0^\infty \sin^{2m+2}px\cos^{2m}px \,.\, \frac{dx}{x^2} \tag{57}$$

$$m = 0, 1, 2 \ldots \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

6.

$$u(z) = \frac{\cos\frac{pz}{2}}{r - 2\cos pz}\cdot\frac{1}{1 + z^2} \tag{58}$$

$$A = 0$$

Der Integrationsweg umschliesst zweierlei Pole

$$z' = i$$

und

$$az_\kappa = \kappa + ib$$

$$c' = \frac{i}{4} \cdot e^p \cdot \frac{e^{p|2} + e^{-p|2}}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_x = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^x}{e^{q|2} - e^{-q2}} \cdot \frac{a}{a^2 + (x + ib)^2}$$

$$\Sigma c_x = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{e^{q|2} - e^{-q|2}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} (-1)^x F(x, a, b) \right\}$$

Nun ist nach 28)

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} x\, F(x, a, b) = \pi \frac{e^{2p} - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

Beachtet man ferner, dass

$$F\left(x, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 4 F(2x, a, b)$$

so erhält man, wenn für a und b (und dem entsprechend für p und q) ihre halben Werte gesetzt werden,

$$\frac{2a}{a^2 - b^2} + 4a \sum_1^{\infty} x\, F(2x, a, b) = \pi \frac{e^p - 1}{(e^{p|2} - e^{q|2})(e^{p|2} - e^{-q|2})}$$

Subtrahirt man die erste dieser beiden Summengleichungen von der zweiten, so kommt

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} x (-1)^x F(x, a, b) = \pi \,.\, e^p \frac{(e^{p|2} - e^{-p|2})(e^{q|2} + e^{-q|\;})}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})} \tag{59}$$

Es wird somit

$$i\pi \overset{\infty}{\underset{-\infty}{}} \overset{\infty}{\underset{0}{E}} ((u)) = \frac{\pi}{4} e^{p|2} \frac{(e^p - 1)(e^q + 1) - (e^p + 1)(e^q - 1)}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})(e^q - 1)}$$

und, wenn man noch x ersetzt durch $\frac{x}{s}$ und p durch $2ps$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos 2px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps+q}}{(e^{2ps+q} - 1)(e^q - 1)} \tag{60}$$

Die Reihenentwicklung liefert hier nichts neues, es ergiebt sich die Legendre'sche Formel (38). Man hätte also, nachdem einmal (38) gefunden war, das Integral (60) nach der Reihe (36) entwickeln und mit Hilfe der genannten Formel auf den analytischen Ausdruck

(60) bringen können; doch habe ich die directe Berechnung wiedergegeben wegen der Analogie mit dem nächstfolgenden Integral, welches sich auf dem angedeuteten Wege nicht berechnen lässt.

7.

$$u(z) = \frac{\sin\frac{pz}{2}}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{z}{1+z^2}$$

$$A = 0$$

Pole: $z' = i, \quad az_x = x + ib$

$$c' = -\frac{i}{4} e^{p|2} \frac{e^p - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_x = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^x}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}} \cdot \frac{-b + ix}{a^2 + (x + ib)^2}$$

$$\Sigma c_x = \frac{1/4}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \left\{ \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^\infty x (-1)^x F(x, b, a) \right\}$$

und nach (59), wenn man wieder x durch $\frac{x}{s}$ und p durch $p \,.\, s$ ersetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{1|2 ps + q}}{(e^q + 1)(e^{ps+q} - 1)} \tag{61}$$

Die bei den anderen Integralen angewandte Reihenentwicklung liefert die Gleichungen

$$\int_a^\infty \frac{\sin(4x + 2)px}{\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = \pi \,.\, \frac{1 + e^{-(4x+2)ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \tag{62}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4x\,px}{\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = -\pi \,.\, \frac{1 - e^{-4xps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \tag{63}$$

Der Fall $s = 0$ ist zwar durch diese letzte Entwicklung nicht streng bewiesen, doch bleiben die Gleichungen (61) – (63) für diesen Grenzwert bestehen, wie aus der besonderen Behandlung desselben unter 5. ersichtlich ist. Die Gleichungen (45) — (47) stellen sich in der Tat dar als Specialfälle der Gleichungen (61) — (63).

Endlich können nicht nur aus (62) und (63), sondern auch aus den Gleichungen (37) — (40), (43) und (44) nach dem auf (46) und (47)

angewandten Verfahren die entsprechenden Integrale abgeleitet werden, welche anstatt sin und cos der Vielfachen von px die Potenzen von sin und cos enthalten.

8. Setzt man allgemein

$$u(z) = \frac{\left.\begin{matrix}\sin^n \\ \cos^n\end{matrix}\right\}(tz)}{e^q + e^{-q} - 2\cos pz} \cdot \frac{\varphi^l(z)}{f^m(z)} \tag{64}$$

wobei $\varphi^l(z)$ eine algebraische Function vom $l$ten Grade $f^m(z)$ eine solche vom $m$ten Grade bedeutet, so kann, wenn alle Nullwerte von $f^m(z)$ bekannt sind, das Integral

$$\int_0^\infty u(x)\,dx$$

immer in eine convergente Reihe entwickelt werden, vorausgesetzt, dass für reelle Werte von x

$$u(-x) = u(x)$$

$$u\,.\,s \leqq 1 \quad \text{und} \quad l < m - 1$$

oder

$$n\,.\,s < 1 \quad \text{und} \quad l = m - 1$$

und dass, solange ϑ innerhalb der Grenzen 0 und π bleibt,

$$A = \lim_{k=\infty} k\,.\,e^{i\vartheta}\,.\,u(k\,.\,e^{i\vartheta})$$

einen bestimmten, endlichen oder verschwindenden, von ϑ unabhängigen Wert besitze.

Aus demselben berechnet man weiter die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varkappa px\,.\left\{\begin{matrix}\sin^n \\ \cos^n\end{matrix}\right\}(tx)}{\sin px} \cdot \frac{\varphi^l(x)}{f^m(x)}\,dx \tag{64a}$$

mit Hilfe der Reihenentwicklung (36).

III. Summirung einer Gruppe von trigonometrischen Reihen.

Im folgenden Abschnitte bedeute

$$\left.\begin{aligned}
&T = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{N}\, dx, \quad U = \int_0^\infty \frac{e^x \sin \alpha x}{N}\, dx \\
&U = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{N}\, dx, \quad W = \int_0^\infty \frac{e^x \cos \alpha x}{N}\, dx \\
&N = e^{2x} - 2e^x \cos y + 1 = (e^x - e^{iy})(e^x - e^{-iy})
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Alle vier Integrale lassen sich in trigonometrische Reihen entwickeln, wie folgt

$$U - e^{-iy} T = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^x - e^{iy}}\, dx = \sum_1^\infty e^{i(\varkappa - 1)y} \int_0^\infty e^{-\varkappa x} \sin \alpha x\, dx$$

$$W - e^{-iy}\, V = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{e^x - e^{iy}}\, dx = \sum_1^\infty e^{i(\varkappa - 1)y} \int_0^\infty e^{-\varkappa x} \cos \alpha x\, dx$$

Die unter der Summe stehenden Integrale sind nach der Formel

$$\int_0^\infty e^{-px} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (qx)\, dx = \frac{\begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}}{p^2 + q^2}$$

zu berechnen. Die erste der beiden Gleichungen ergiebt nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$U - T \cos y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\cos(\varkappa - 1)y}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

$$T \sin y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\sin(\varkappa - 1)y}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

oder

$$U \cos y - T = \alpha \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

$$U \sin y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$C = \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^2 + \alpha^2}, \quad S = \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2 + \alpha^2} \tag{66}$$

so wird

$$U\cos y - T = \alpha C, \quad U\sin y = \alpha S$$

und, wie sich durch analoge Rechnung ergiebt,

$$W\cos y - V = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad W\sin y = -\frac{\partial C}{\partial y} \tag{67}$$

Setzt man jetzt

$$u(z) = \frac{\sin \alpha z}{e^z - 1} \tag{68}$$

und führe das Integral $\int u\,dz$ um das unendlich lange Rechteck $0ABC$ (Fig. 3), worin

$$0A = CB = \infty$$
$$0C = AB = y$$
$$2n\pi < y < 2n + 2)\pi$$

so wird

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,dx = \alpha \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \tag{68a}$$

$$\int_A^B u\,dz = i \lim_{k=\infty} \int_0^y \frac{\sin \alpha(k + iy)}{e^{k+iy} - 1}\,dy = 0 \tag{68b}$$

$$\int_B^C u \,.\, dz = -\tfrac{1}{2} \int_0^\infty \{\sin\alpha x(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + i\cos x(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\}$$
$$.\,(e^x\cos y - 1 - ie^x\sin y)\,.\,\frac{dx}{N}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\{(e_{ay} + e^{-\alpha y})(U\cos y - T) + (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})W\sin y\}$$
$$+ \frac{i\{}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})U\sin y - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})(W\cos y - V))$$

und nach (66) und (67)

$$\begin{aligned}\int_B^C u\,dz = &-\tfrac{1}{2}\left\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\,.\,\alpha C - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\frac{\partial C}{\partial y}\right\} \\ &+ \frac{i}{2}\left\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\,.\,\alpha S - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\frac{\partial S}{\partial y}\right\}\end{aligned} \tag{68c}$$

Das Integral $\int_C^0 u(z)\,dz$ zerfällt in zwei Gruppen von Teilintegralen: solche auf Halbkreisen mit dem Radius δ um die Pole

$$z_h = i2h\pi \qquad h = 1, 2, 3, \ldots n$$

im negativen Sinn der Drehung — ihre Summe sei $\frac{\pi}{2} \cdot D_{2n}$ — und solche zwischen den Polen auf der Y Achse — ihre Summe sei $R + iS$ —, so dass

$$\int_C^0 u\,dz = R + iS + \frac{\pi}{2} \cdot D_{2n} \tag{68d}$$

Die Radien δ sollen gegen null convergirende Grössen sein.

Nun ist

$$D_{2n} = -i\delta \sum_1^n h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(z_h + \delta e^{i\vartheta}) e^{i\vartheta} d\vartheta$$

wird aber δ verschwindend klein, so geht D_{2h} über in

$$D_{2n} = \sum_1^n (e^{2h\pi a} - e^{-2h\pi a}) = \frac{e^{(2n+1)\pi a} + e^{-(2n+1)\pi a} - e^{\pi a} - e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \tag{69}$$

Sollte y eine der Grenzen erreichen, so wäre der Integrationsweg noch um einen Viertelskreis zu vermindern resp. zu vergrössern. Es soll aber später bewiesen werden, dass die auf diese Weise bestimmten Grenzwerte

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= \tfrac{1}{2}(D_{2n-2} + D_{2n}) \qquad & y &= 2n\pi \\ D_{2n+2} &= \tfrac{1}{2}(D_{2n} + D_{2n+2}) \qquad & y &= (2n+2)\pi \end{aligned} \tag{69a}$$

vollständig zwecklos sind.

Weiter findet man

$$\left.\begin{aligned} R &= -\tfrac{1}{4}\int_0^y (e^{ay} - e^{-ay})\,dy = -\frac{e^{ay} + e^{-ay} - 2}{2a} \\ S &= -\tfrac{1}{4}\left\{\int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \ldots \int_{2n\pi+\delta}^{y} (e^{ay} - e^{-ay}) \operatorname{ctg}\frac{y}{2} \cdot dy\right\} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Die Pole der Function (68) sind alle durch den Integrationsweg ausgeschlossen, daher ist

$$\int u\, dz = 0$$

woraus die Trennung des reellen Teiles vom imaginären mit Hilfe der Gleichungen (68) — (70) ergiebt:

$$\tfrac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\, C - \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y} - 2}{4\alpha^2} \tag{71}$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha} D_{2n} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) S - \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha g}}{2\alpha} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} \tag{72}$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{\delta=0} \left\{ \int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \ldots \int_{2n\pi+\delta}^{y} \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \operatorname{ctg}\frac{y}{2} \cdot dy \right\}$$

NB. Gleichung (72) gilt nur für verschwindend kleine Werte von δ [wäre δ endlich, so wäre die Summe D_{2n} nicht reell, sondern enthielte, wie man sich überzeugen kann, imaginäre Glieder, die in (72) auftreten müssten!] Nichtsdestoweniger bleibt das Integral in (72) endlich und bestimmt, da die Pole auf Kreisen umgangen wurden und daher die δ an den Teilstellen gleich sind.

Unter C und S hat man sich nicht die Reihen (66), sondern den analytischen Ausdruck für deren Summe vorzustellen. Dann kann man C und S nach Belieben differentiiren, während die Reihen selbst schon durch die zweite Differentiation divergent werden.

Man differentiire Gleichung (71) nach y; dann nimmt dieselbe folgende einfache Gestalt an

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \alpha^2 C - \tfrac{1}{2} = 0$$

woraus

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha C = \pi \frac{A_{2n} e^{\alpha y} + B_{2n} e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} \tag{73}$$

Die Constanten A und B wurden von vornherein mit einem Index versehen, da sie von D_{2n} abhängig und also Functionen von n sein müssen. Aus (73) ist

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_{2n} e^{\alpha y} - B_{2n} e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}$$

Setzt man diese Werte von C und $\frac{\partial C}{\partial y}$ ein in (72), so kommt

$$\frac{A_{2n}+B_{2n}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} = D_{2n} + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^2+\alpha^2}\right\}$$

und mit Hilfe von (24)

$$A_{2n} + B_{2n} = e^{(n+1)\alpha\pi} + e^{-(2n+2)\alpha\pi}$$

Setzt man ferner in (73) $y = (2n+1)\pi$

so kommt

$$\frac{A_{2n}\, e^{(2n+1)\alpha\pi} + B_{2n}\, e^{-(2n+1)\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^\infty \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^2+\alpha^2}\right\}$$

und nach (25)

$$A_{2n}\, e^{(2n+1)\alpha\pi} + B_{2n}\, e^{-(2n+1)\alpha\pi} = 2$$

sodass endlich

$$A_{2n} = e^{-(2n+1)\alpha\pi}, \quad B_{2n} = e^{(2n+1)\alpha\pi}$$

wonach (73) übergeht in [1])

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \pi \,.\, \frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi-y]} + e^{-\alpha[(2n+1)\pi-y]}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} \tag{74}$$

Die Differentiation nach y ergiebt

$$\sum_1^\infty \varkappa \frac{\varkappa \sin \varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi-y]} - e^{-\alpha[(2n+1)\pi-y]}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} \tag{75}$$

$$2n\pi < y < (2n+2)\pi$$

Für diese Gleichungen sind die Grenzwerte D_{2n}' und D_{2n}'' ohne Bedeutung; ihnen zufolge wäre

$$A'_{2n} = \tfrac{1}{2}(A_{2n-2} + A_{2n}), \quad B_{2n}' = \tfrac{1}{2}(B_{2n-2} + B_{2n})$$
$$A''_{2n} = \tfrac{1}{2}(A_{2n} + A_{2n+2}), \quad B_{2n}'' = \tfrac{1}{2}(B_{2n} + B_{2n+2})$$

Nun erkennt man aber leicht, dass (74) an den Grenzen gilt, wenn man allgemein

$$A'_{2n} = \frac{pA_{2n-2} + qA_{2n}}{p+q} \text{ etc.}$$

setzt, wobei p und q beliebige Zahlen sind. Allerdings gilt dann die Gleichung nicht mehr streng, d. h. sie gilt unter Umständen nicht mehr an den Grenzen, nachdem man sie differentiirt hat. Es wäre demnach zu erwarten, dass (75) an den Grenzen nur dann bestehen bliebe, wenn

---

1) Vgl. Schlömilch, „Neue Methode zur Summirung etc.“ Grunert's Archiv XII, pag 131.

$$p = q = 1$$

Doch ist eine weitere Untersuchung darüber gegenstandslos, da die Summe (75) für die Werte

$$y = m\pi$$

so wie so ihre Bedeutung verliert, wie im Folgenden kurz bewiesen werden soll.

$$S(m\pi) = \lim_{\substack{\delta=0 \\ k=\infty}} \sum_1^k \frac{\varkappa \sin \varkappa(m\pi \pm \delta)}{\varkappa^2 + \alpha^2}$$

Es besteht zwischen den unendlich kleinen Grössen δ und $\frac{1}{k}$ keine Relation, so dass

$$\beta = \delta \,.\, k$$

eine willkürliche positive Grösse ist

$$S(m\pi) = \pm(-1)^m \lim_{k=\infty} \sum_1^k \frac{\varkappa \sin \frac{\varkappa}{k}\beta}{\varkappa^2 + \alpha^2} = \pm(-1)^m \int_0^\beta \frac{\sin x}{x} dx$$

$S(m\pi)$ hat also einen unbestimmten Wert, welcher entweder zwischen $-S'$ [1]) und 0 oder zwischen 0 und S' liegt, jenachdem m gerade oder ungerade ist und y gegen die Grenze wächst oder abnimmt. Für

$$p = q = 1$$

erhält man bloss den Specialwert, welchen $S(m\pi)$ annimmt, wenn man willkürlich festsetzt, dass, während y gegen die Grenze $m\pi$ wächst, $\beta = \infty$, d. h., dass k von einer höheren Ordnung unendlich werden soll, als $\frac{1}{\delta}$, was aber absolut keinen Sinn hat. —

Für die folgende Ableitung nehme man

$$0 < y < 2\pi$$

(worin weiter keine Beschränkung liegt) und integrire Gleichung (74), nachdem man dieselbe durch die Substitution

$$\alpha = 0, \qquad n = 0$$

auf die Form

$$\sum^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^2} = \frac{y^2}{4} - \frac{\pi}{2} y + \frac{\pi^2}{6} \tag{74a}$$

---

1) Wobei S' das Maximum der Function $\mathfrak{S}(x)$ bedeutet [vergl. Abschnitt I] nämlich $S(\pi) = 1{,}851\ 936$.

gebracht hat, wiederholt nach y zwischen den Grenzen 0 und y und führe nach der Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^{2n}} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n}$$

die Bernoulli'schen Zahlen ein. Setzt man endlich noch

$$y = 2\pi x$$

so erhält man allgemein [1])

$$\frac{2\,.\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{\cos 2\varkappa\pi x}{\varkappa^{2n}} = B_{2n} - \binom{2n}{2} B_{2n-2}\, x^2$$
$$+ \binom{2n}{4} B_{2n-4}\, x^4 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{2n}{2} B_2 x^{2n-2}$$
$$+ (-1)^n x^{2n-1} \{n - x\} \tag{76}$$

$$\frac{2\,.\,(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \cdot \sum_1^\infty \varkappa \frac{\sin 2\varkappa\pi x}{\varkappa^{2n+1}} = \binom{2n+1}{1} B_{2n}\, x - \binom{2n+1}{3} B_{2n-2}\, x^3$$
$$+ \binom{2n+1}{5} B_{2n-4}\, x^5 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{2n+1}{2} B_2 x^{2n-1}$$
$$+ (-1)^n x^{2n} \left\{\frac{2n+1}{2} - x\right\} \tag{77}$$
$$0 < x < 1$$

Setzt man in (76) $x = \frac{1}{2}$, so geht die linke Seite über in die Summe

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^{2n}}$$

welche, wie man leicht beweist, den Wert

$$- B_{2n} \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-1}}$$

hat, man erhält somit aus (76) die folgende Recursionsformel für die Bernoulli'schen Zahlen

$$2(2^{2n}-1)\, B_{2n} = \binom{2n}{2} 2^{2n-2} B_{2n-2} - \binom{2n}{4} 2^{2n-4} B_{2n-4} + \binom{2n}{6} 2^{2n-6} B_{2n-6}$$
$$- \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2} 2^2 B_2 + (-1)^{n+1}\{2n-1\} \tag{78}$$

Es lassen sich ferner für die Reihen

---

1) cf. Raabe, Crelle's J. XLII, pag. 348.

$$C_n = \sum_1^\infty \frac{\cos xy}{x^n}, \quad S_n = \sum_1^\infty \frac{\sin xy}{x^a} \tag{79}$$

eine Serie von Recursionsformeln aufstellen durch Integration der Function

$$u(z) = \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} \tag{80}$$

über den Umfang des Rechteckes $0ABC$ (Fig. 3.)

Da, wie schon bemerkt, in der Bedingung

$$0 < y < 2\pi$$

keine wesentliche Beschränkung liegt, so soll dieselbe im Folgenden gelten; es ist übrigens nach den für die Function (68) angestellten Betrachtungen nicht schwer, zu dem allgemeinen Fall $2n\pi < y < (2n+2)\pi$ überzugehen.

Die Teilintegrale stellen sich dar als

$$\int_0^A u\,dz = \sum_1^\infty \int_0^\infty e^{-xn} x^{2n-1} = (2n-1)!\sum_1^\infty \frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{2}\,\frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n}$$

$$\int_A^B u\,dz = 0$$

$$\int_B^C u\,dz = -\int_0^\infty \frac{(x+iy)^{2n-1}(e^{x-iy}-1)}{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}\,dx$$

$$\int_C^0 u\,dz = -\frac{i}{2}\int_0^y \frac{(iy)^{2n-1}(e^{-iy}-1)}{1-\cos y}\,dy$$

und, weil der Integrationsweg keinen Pol umschliesst,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n} = \int_0^\infty (x+iy)^{2n-1}(e^x \cos y - 1 - 2e^x \sin y)\frac{dx}{N}$$

$$+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{y^{2n}}{2n} + i\int_0^y y^{2n-1}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\,dy\right\}$$

wobei

$$N = e^{2x} - 2e^{x}\cos y + 1$$

Zur Ausführung des Integrals $\int_0^\infty$ setze man

$$F_m = \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{N}, \quad G_m = \int_0^\infty \frac{e^x x^m\,dx}{N}$$

Dann erhält man analog der am Anfang dieses Abschnittes für die Integrale T und U ausgeführten Rechnung

$$G_m \cos y - F = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{m+1}}$$

$$G_m \sin y = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{m+1}}$$

wonach schliesslich

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi]^{2n}}{}\frac{B_{2n}+(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} = \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!}\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-2}} + \dots \\ &\quad + y\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-1}} - \frac{y^3}{3!}\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-3}} + \dots \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{\frac{y^{2h}}{(2h)!} C_{2n-2h} + \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} S_{2n-2h-1}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\int_1^y t^{2n-1}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot dt = \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!}\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-2}} \\ &\quad + \dots - y\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-1}} + \frac{y^3}{3!}\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-3}} - \dots \\ &= \sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h \left\{\frac{y^{2h}}{(2h)!} S_{2n-2h} - \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} C_{2n-2h-1}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Will man zu dem allgemeinen Fall $2m\pi < y < (2m+2)\pi$ übergehen, so ist der Integrationsweg, wie im letzten Beispiel, um die entsprechenden Halbkreise (Fig. 3) zu vergrössern. Es ist dann in (81) rechts das Glied

$$E_{2m} = (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{h=1}^{m} h^{2n-1}$$

$$2m\pi < y < (2m+2)\pi$$

hinzuzufügen. Eine Bestimmung von Grenzwerten für E_{2m} wäre auch hier völlig zwecklos, da (81) immer das Glied $\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa}$ enthält, welches an den Grenzen unbestimmt wird. In (82) hat diese Erweiterung nicht viel Sinn, da, wie in (72) ein unbequemer Grenzwert auftritt.

Die Recursionsformeln (81) und (82) können zugleich als Differentialgleichungen der Functionen C_n und S_n angegeben werden, deren Lösungen in der Hälfte der Fälle, nämlich für C_{2n} und S_{2n+1} durch die Gleichungen (76) und (77) gegeben sind.

Transcendente höherer Ordnung sind die Functionen S_{2n} und C_{2n+1}. Einzig C_1 wird durch eine verhältnissmässig einfache Function dargestellt. Es ergiebt sich aus (82) für $n = 1$

$$\frac{1}{2}\int_0^x t \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \cdot dt = \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2} - x\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = \int C_1\, dx - xC_1 + \text{const}$$

Man differentiirt nach x:

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad C = \gamma - \lg\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$

für $x = \pi$ wird

$$\gamma = -\{1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots\} = \lg\tfrac{1}{2}$$

$$C_1 = \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = -\lg\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \quad 0 < x < 2\pi$$

Die Beschränkung $0 < x < 2\pi$ fällt weg, wenn man schreibt

$$\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = -\tfrac{1}{2}\lg\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right) \tag{83}$$

Hieraus kommt durch Integration von 0 bis x

$$\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2} = -\frac{x}{2}\lg\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^x t\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \cdot dt \tag{84}$$

Es ist also bereits S_2 nicht mehr durch einfache analytische Functionen auszudrücken. Die numerische Berechnung geschieht

wohl am besten mit Hilfe der Kinkelin'schen Function $G(x)$ [1]), welche für ganzzahlige Argumente der Function

$$G(n+1) = 1^1 . 2^2 . 3^3 . 4^4 . \,.\,.\, n^n$$

entspricht. Es wird

$$\pi \int_0^x t \operatorname{ctg} \pi t \,.\, dt = x \lg (2 \sin \pi x) - \lg \frac{G(1-x)}{Gx} \tag{84a}$$

Diese Formel empfiehlt sich zur Berechnung von S_3, da für den Logarithmus der Function G rasch convergente Reihen existiren, welche denjenigen für $\lg \Gamma$ sehr ähnlich sind. Die Berechnung kann mit sehr grosser Genauigkeit ausgeführt werden, da die Constanten dieser Reihen

$$S_h = \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^h}$$

bis zu S_{70} auf 30 Decimalen berechnet worden sind [2]).

In Gleichung (87) giebt die Substitution $y = \pi$

$$(2^{2n} - 1) B_{2n} - \binom{2n}{2} (2^{2n-3} - 1) B_{2n-2} + \binom{2n}{4} (2^{2n-5} - 1) B_{2n-4} - \,.\,.$$
$$+ (-1)^{n+1} \binom{n}{2} B_2 + \frac{(-1)^n}{2} = 0 \tag{81a}$$

Dividirt man jetzt Gleichung (78) durch 2 und subtrahirt sie von (81a), so kommt, wenn man noch $n+1$ an Stelle von n setzt,

$$\binom{2n+2}{2} B_{2n} - \binom{2n+2}{4} B_{2n-2} + \,.\,.\,. - + (-1)^n \,.\, n = 0 \tag{85}$$

Diese Formel ist der einfachste Specialfall einer allgemeineren, von Arndt [3]) gefundenen Formel

$$\frac{x-1}{2} = \binom{x+1}{2} B_2 - \binom{x+1}{4} B_4 + \,.\,.\,. + (-1)^{\frac{x-\mu-1}{2}} \,.\, \binom{x+1}{x-\mu+1} B_{x-\mu+1}$$

für

$$x = 2n+1, \quad \mu = 2$$

---

1) Kinkelin, Ueber eine neue mit der Γ Function verwandte Transcendente etc. Crelles J. LVII, pag. 122.

2) Stieljes, Tables des valeurs des sommes S_k. Acta math. IX, 299.

3) Crelles J. XXXI, pag. 249.

Es ist dies die einfachste aller bis jetzt gefundenen Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen, soviel deren von Schlömilch [1]), Göpel [2]), Dienger [3]), Malmsten [4]), Worpitzky [5]) und Anderen aufgestellt worden sind.

Ganz anderer Natur, als die Lösung der Differentialgleichung (71), an welche sich die vorstehenden Betrachtungen anknüpften, ist diejenige von (72), deren vollständiges Integral

$$4\alpha S = -e^{\alpha y}\int_p^y e^{-\alpha t}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt + e^{-\alpha y}\int_q^y e^{\alpha t}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt \tag{86}$$

ist, wobei p und q die zwei willkürlichen Constanten sind. Dieselben lassen sich auf zwei verschiedene Arten bestimmen. Man erhält entweder

$$4\alpha\sum_1^\infty\frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \int_y^\pi\{e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt$$
$$+ 2\{e^{\alpha(\pi-y)} - e^{-\alpha(\pi-y)}\}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{\varkappa+1}\,.\,\varkappa}{\varkappa^2+\alpha^2} \tag{86a}$$

oder man schreibt den folgenden Grenzwert

$$4\alpha\sum_1^\infty\frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \lim_{\delta=0}\left\{-\int_\delta^p[e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-1)}]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\alpha y}-e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}\,.\int_\delta^\pi[e^{\alpha(\pi-t)} - 2^{-\alpha(\pi-t)}]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt\right\} \tag{86b}$$

Für beide Formeln ergiebt sich die Ableitung aus (86) mit Leichtigkeit. Jedoch muss ich an dieser Stelle von einer Behandlung der Function

$$S = \sum_1^\infty\,.\,\frac{\sin\varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}$$

in extenso absehen, da sie zu weit vom eigentlichen Thema dieses Aufsatzes ablenken würde.

---

1) Grunert's Archiv III., pag. 9.

2) ibid. III, pag. 64.

3) Crelle's J. XXXIV, pag. 75.

4) ibid. XXXV, pag. 59.

5) ibid. XCIV, pag. 203.

II.

Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern.

Von

Dr. E. Rehfeld
in Elberfeld.

Als Huyghens sich mit der Aufgabe beschäftigte die Schwingungszeit eines physischen Pendels zu berechnen, wurde er auf den Begriff des Trägheitsmomentes, auf den Ausdruck Σmr^2 geführt. Ihm verdankt man auch den wichtigen Satz, dass das Trägheitsmoment irgend eines geometrischen Systems (Strecke, Fläche, Körper) für eine Drehachse gleich ist dem Trägheitsmoment des Systems für die parallele Schwerpunktsachse, vermehrt um das Product der Gesamtmasse des Systems in das Quadrat der Abstände der beiden Achsen. Erst Euler führt für den Ausdruck Σmr^2 den Namen Moment der Trägheit — ein. Da das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf irgend eine Achse als die Summe unendlich vieler Producte aus den einzelnen Massenteilchen und das Quadrat der Abstände dieser Massenpunkte von der Momentenachse angegeben wird, so kann dasselbe im allgemeinen nur unter Anwendung der Infinitesimalrechnung gefunden werden. Das in vielen elementaren Lehrbüchern der Physik angewandte Verfahren zur Berechnung der Trägheitsmomente etwa von Strecken, rechteckigen und quadratischen Platten, Dreiecks- und Kreisflächen, rechtwinkligen Parallelepipeda, geraden Cylindern und Kegeln, und welches darin besteht, dass man das vorliegende System in n Teile teilt, die bei der einen Entwickelung gleich, bei der andern ungleich sind, und für jeden Teil das Trägheitsmoment durch zwei Grenzen einschliesst,

führt streng genommen doch zur Integration, denn man benutzt schliesslich ein Additionsverfahren, bei welchem der Quotient $\frac{\Sigma_1^n n^k}{n^{k+1}}$ bei constantem ganzen positiven k und unendlich wachsendem n gegen die Grenze $\frac{1}{k+1}$ convergirt.

Dass aber eine ganz elementare Behandlung der Trägheitsmomente vieler homogener Systeme möglich ist, soll diese kleine Arbeit zeigen: sie soll den Beweis erbringen, dass in vielen Fällen die geometrische Verwandtschaft von Systemen zur Bestimmung benutzt werden kann. Das Wesen dieser neuen Bestimmungsart besteht darin, dass man die gegebenen Systeme in unter sich und dem ganzen ähnliche Elemente zerlegt, und mit Hülfe der bestehenden Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten der Teile und des ganzen Systems, das letztere berechnet. Besonders ist bei diesem Verfahren noch hervorzuheben, dass die gefundenen Resultate in der allgemeinsten Form auftreten, d. h. für alle Momentenachsen gültig sind. Dieses wird dadurch erreicht, dass bei der Bestimmung der Trägheitsmomente keine Grössen verwandt werden, die dem System direct entnommen sind, es werden Projectionen von Strecken auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene benutzt; und diese Projectionen nehmen eben für jede neue Achse neue Werte an. Behandelt werden die Trägheitsmomente der Strecke, des Dreiecks, Parallelogramms, der Ellipse, des dreiseitigen schiefen Prismas, schiefen Parallelepipedons, elliptischen Cylinders, der dreiseitigen Pyramide, des elliptischen Kegels und des Ellipsoids.

Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten von ähnlichen homogenen geometrischen Systemen bezogen auf ähnlich liegende Achsen.

Werden ähnliche geometrische Systeme (Linien, Flächen, Körper) von gleicher Dichtigkeit in gleich viel ähnliche Elemente geteilt, und sind die Massen von entsprechenden Elementen m und μ, die Abstände dieser Elemente von ähnlich liegenden Achsen r und ϱ, so stehen die Trägheitsmomente dieser Elemente mr^2 und $\mu\varrho^2$, sowie die Trägheitsmomente der ganzen homogenen Systeme Σmr^2 und $\Sigma\mu\varrho^2$ für ähnlich liegende Achsen in einem constanten Verhältniss.

Ist λ das Verhältniss von zwei entsprechenden Strecken in dem ähnlichen homogenen Systeme, so ist

$$m : \mu = 1 : \lambda^m$$

und zwar ist $m = 1$ für Systeme von einer Dimension (Linien), $m = 2$ für Systeme von zwei Dimensionen (Flächen), $m = 3$ für Systeme mit drei Dimensionen (Körper). Uud da ferner

$$r : \varrho = 1 : \lambda$$
$$r^2 : \varrho^2 = 1 : \lambda^2$$

so verhalten sich

$$mr^2 : \mu\varrho^2 = 1 : \lambda^n$$
$$\Sigma mr^2 : \Sigma \mu\varrho^2 = 1 : \lambda^n$$

Für Linien ist $n = 3$, für Flächen $n = 4$, für Körper $n = 5$.

Bezeichnet man die Trägheitsmomente ähnlicher homogener Systeme bezogen auf ähnlich liegende Achsen mit T und τ, so gilt allgemein

$$\tau = \lambda^n T$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Strecke.

Enthalte die homogene Strecke AB (Fig. 1) bei gleichmässiger Verteilung die Masse m, und werde das Trägheitsmoment derselben bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Momentenachse h_s mit T_s, bezogen auf eine durch den Eckpunkt A zu h_s parallele Momentenachse h_a mit T_a bezeichnet, so besteht nach dem Huyghens-schen Satze die Beziehung

$$T_a = T_s + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

wenn l den Abstand des zweiten Endpunkts B der Strecke von der Achse h_a oder die Projection der Strecke AB auf eine l_s oder h_a senkrechte Ebene angiebt. Das Trägheitsmoment T_s ist aber gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Hälften SA und SB. Da aber entsprechende Punkte dieser Teile von l_t gleiche Abstände haben, so sind die Trägheitsmomente von SA und SB bezogen auf h_s gleich und halb so gross als T_s selbst. Das Trägheitsmoment von AS bezogen auf h_a hat denselben Wert wie das Trägheitsmoment von SB bezogen auf h_s, nämlich $\frac{1}{2}T_s$. Nun sind aber AB und AS ähnlich liegende Systeme für das Aehnlichkeitsverhältniss $\lambda = 2$ bezogen auf dieselbe Achse h_a, es ist deshalb

$$T_a = 2^3 \cdot \tfrac{1}{2}T_s = 4T_s$$

Aus den beiden Gleichungen von T_a leitet man schliesslich ab

$$T_s^a = \frac{1}{12} ml^2$$

Belastet man die Projection um AB auf eine zu h_s senkrechte Ebene, nämlich A_0B_0 gleichmässig mit der Masse m von AB, so kann auch

$$T_s = \frac{1}{12} ml^2$$

gedeutet werden als das Trägheitsmoment der Projection A_0B_0 bezogen auf die im Schwerpunkt S_0 senkrecht stehende Momentachse. Es kann mithin das Trägheitsmoment einer Strecke für eine schiefe Schwerpunktsachse ersetzt werden durch das Trägheitsmoment der Projection der Strecke auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn nur die Projection die Masse der gegebenen Strecke gleichmässig auf die Länge verteilt in sich birgt.

Geht die Achse durch den Endpunkt A der Strecke, so ist der Wert des zugehörigen Trägheitsmomentes

$$T_a = 4T_s = \tfrac{1}{3} ml^2$$

Für die durch den beliebigen Punkt P parallel zu h_s verlaufende Achse h_p, welche von h_S den Abstand u hat, wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$T_p = T_S + mu^2$$

und liegt der Punkt P auf der Strecke AB selbst, und heissen die Projectionen der Teile auf die zu h_p senkrechte Ebene l_1 und $_2(l_2 > l_1)$, so ist

$$l = l_1 + l_2, \quad u = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

und es wird

$$T_p = \tfrac{1}{3} m(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2)$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Dreiecksfläche.

Enthalte das homogene materielle Dreieck ABC bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse m. Seien DEF die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks (Fig. 2). Das Trägheitsmoment des Dreiecks bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Momentenachse h_s, nämlich T_s, ist für dieselbe Achse gleich der Summe der Trägheitsmomente der vier Unterdreiecke, welche unter sich congruent und dem ganzen Dreieck nach dem Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind. Die um das mittlere Unter-

dreieck herumliegenden Dreiecke haben für die durch die Ecken A, B, C parallel zu h_s verlaufenden Achsen $h_a h_b h_c$ dieselben Trägheitsmomente wie für h_s.

Wird nämlich das Trägheitsmoment des Dreiecks AEF mit dem Schwerpunkt G für die zu h_s parallele Schwerpunksachse h_g mit t_g bezeichnet, während das Trägheitsmoment dieses Dreiecks für h_s durch t_{gs} angegeben wird, so ist das Trägheitsmoment des Unterdreiecks, wenn der Abstand der Achsen h_s und h_g noch u heisst

$$t_{gs} = t_g + \frac{m}{4} u^2$$

Andererseits ist für die Achse h_a das Moment desselben Dreiecks, wenn v den Abstand der Achsen h_a und h_g ergiebt

$$t_{ga} = t_g + \frac{m}{4} v^2$$

Nun ist aber $AG = GS$, woraus folgt $u = v$; es ist mithin

$$t_{gs} = t_{ga}$$

Ebenso besteht

$$t_{hs} = t_{hb}$$

$$t_{ks} = t_{kc}$$

Heisst das Trägheitsmoment des Dreiecks DEF für die Achse $h_s : t_s$, so ist das Trägheitsmoment des ganzen Dreiecks für h_s

$$T'_s = t_{ga} + t_{hb} + t_{kc} + t_s$$

Werden die Trägheitsmomente des ganzen Dreiecks für die Achsen h_a, h_b, h_c mit T_a, T_b, T_c bezeichnet, so liefert die Aehnlichkeit der Teildreiecke mit dem ganzen die Beziehungen

$$T_a = 2^4 t_{ga}$$
$$T_b = 2^4 t_{hb}$$
$$T_c = 2^4 t_{kc}$$
$$T_s = 2^4 t_s$$

Nach dem Huygens'schen Satze ist aber, wenn die Abstände der Achse h_5 von h_a, h_b und h_c einzeln mit p, q, r bezeichnet werden.

$$T_a = T_s + mp^2$$
$$T_b = T_s + mq^2$$
$$T_c = T_s + mr_2$$

Aus den letzten Gleichungen folgt aber

$$T_s = \frac{1}{16}(T_a + T_b + T_c + T_s) = \frac{1}{12}m(p^2 + q^2 + r^2)$$

Fällt h_5 in die Ebene des gegebenen Dreiecks, so bezeichnen p, q, und r die Abstände der Ecken des Dreiecks von der Achse h_5. Steht die Achse geneigt zur Ebene des Dreiecks und heisst seine Projection auf eine zu h_s senkrechte Ebene $A_0B_0C_0$, so sind p, q, r d. h. die Abstände der Ecken ABC von h_s, gleich den Verbindungslinien des Schwerpunktes S_0 des projicirten Dreiecks mit den Ecken dieses Dreiecks selbst. Heissen die Schwerpunktstransversalen des projicirten Dreiecks $t_a t_b t_c$, so besteht zwischen diesen und den Seiten a, b, c der Projection die bekannte Beziehung

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

und weil

$$p = \tfrac{2}{3} t_a, \quad q = \tfrac{2}{3} t_b, \quad r = \tfrac{2}{3} t_c$$

also

$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ist, so findet man auch für T_s die Ausdrücke

$$T_5 = \frac{1}{36}m(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{27}m(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

Steht die Achse h_s zur Ebene des Dreiecks ABC senkrecht, so nehmen p, q, r sowie a, b, c ihre grössten Werte AS, BS, CS an. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks wird daher ein Maximum für eine zur Ebene des Dreiecks senkrechte Achse.

Da h_s zur Ebene der Projection senkrecht steht, so kann

$$\frac{1}{36}m(a^2 + b^2 + c^2)$$

auch als das Trägheitsmoment dieser Projection aufgefasst werden.

Das Trägheitsmoment eines homogenen materiellen Dreiecks für eine beliebige zur Ebene des Dreiecks schief stehende Schwerpunktsachse ist demnach für dieselbe Achse gleich dem Trägheitsmoment der Projection des Dreiecks auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn die Masse des gegebenen Dreiecks gleichmässig über die Projection verteilt gedacht wird.

Mit Hülfe der gefundenen Werte für das Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf eine Schwerpunktsachse kann das Trägheitsmoment für jede andere Achse nach dem Satze von Huyghens leicht abgeleitet werden.

Für die zu h_5 parallel laufende Achse h_a durch den Eckpunkt

A wird das zugehörige Trägheitsmoment T_a, gleichviel ob h_a in der Ebene des Dreiecks liegt, oder dazu geneigt ist, angegeben durch

$$T_a = T_s + mp^2$$

oder da

$$p^2 = \frac{4}{9} t_a^2 = \frac{4}{36}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

durch

$$T_a = \frac{1}{12} m(3b^2 + 3c^2 - a^2) = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + 4t_a^2)$$

Geht die Achse durch die Mitte D der Seite BC, so ist für die Achse h_d das Trägheitsmoment

$$T_d = T_s + m\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

Wird die Seite BC Momentenachse, so wird $b = c = h$, und das gesuchte Trägheitsmoment hat den Wert $\frac{1}{6}mh^2$.

Fällt die Momentenachse mit der Transversalen AD zusammen, so wird

$$b = c = \frac{a}{2}$$

und man erhält für das zugehörige Trägheitsmoment den Ausdruck

$$\frac{1}{6} mb^2 = \frac{1}{24} ma^2$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen materiellen Parallelogramms.

Enthalte das homogene materielle Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 3) bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse m. Man zerlege das Parallelogramm durch Parallele zu den Seiten in den mittleren Abständen der Gegenseiten in vier congruente Parallelogramme, die dem ganzen nach dem Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind. Die über Kreuz liegenden Unterparallelogramme AS und CS, sowie BS und DS haben in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S des gegebenen Parallelogramms gehende Achse h_s dasselbe Trägheitsmoment, weil entsprechende Punkte von der Momentenachse gleichen Abstand haben. Wird bezogen auf h_s das Trägheitsmoment des ganzen Parallelogramms, sowie der Unterparallelogramme AS und BS einzeln mit T_s, t_{sa}, t_{sb} bezeichnet, so ist

$$T_s = 2(t_{sa} + t_{sb})$$

Heissen nun die Trägheitsmomente des ganzen Parallelogramms für die zu h_s durch die Eckpunkte C und D parallel laufenden Achsen h_c und h_d beziehungsweise T_c und T_d, so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Parallelogramme AS und AC, sowie BS und BD für die ähnlich liegenden Achsen h_s und h_s, sowie h_s und h_s, die Beziehungen

$$T_c = 2^4 t_{sa}, \quad T_d = 2^4 t_{sb}$$

Andererseits besteht aber nach dem Satze von Huyghens, wenn e und f die Abstände der Achse h_s von h_c und h_d bezeichnen,

$$T_c = T_s + me^2, \quad T_d = T_s + mf^2$$

Aus den letzten Gleichungen leitet man ab

$$T_s = \frac{1}{8}(T_c + T_d) = \frac{1}{6} m(e^2 + f^2)$$

Liegt h_s in der Ebene des Parallelogramms, so geben e und f die Abstände der Eckpunte C und D von h_s an. Für eine zur Ebene des Parallelogramms geneigte Achse h_s können e und f nicht grösser werden als die halben Diagonalen des gegebenen Parallelogramms, deren Projectionen auf eine zu h_s senkrechte Ebene eben e und f sind. Es ist deshalb T_s für eine zur Ebene des Parallelogramms senkrechte Ebene ein Maximum.

Werden die Projectionen der Seiten des Parallelogramms auf eine zu h_s senkrechte Ebene mit a, b, c, d bezeichnet, so ist, gleich viel ob h_s in der Ebene des Parallelogramms liegt oder zu derselben geneigt ist,

$$4(e^2 + f^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{24} m(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Hieraus folgt:

Das Trägheitsmoment eines Parallelogramms für eine beliebige zur Ebene der Fläche geneigte Schwerpunktsachse ist für dieselbe Achse gleich dem Trägheitsmoment der Projection des Parallelogramms auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn die Masse des gegebenen Parallelogramms gleichmässig über die Projection verteilt gedacht wird.

Die Berechnung des Trägheitsmomentes eines Parallelogramms für eine schiefe Achse ist mithin auf das Trägheitsmoment der Projection der Fläche für eine senkrechte Achse zurückführbar.

Das obige numerische Ergebniss hätte auch sofort aus dem

Werte des Trägheitsmomentes eines Dreiecks für die Schwerpunktsachse einer Seite gefunden werden können.

$$T_s = \frac{\frac{1}{2}m}{12}(a^2 + b^2) + \frac{\frac{1}{2}m}{12}(c^2 + d^2) = \frac{1}{24}m(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Auch hätte man aus dem Werte für das Trägheitsmoment des Parallelogramms, welcher verhältnissmässig leichter gefunden wird als der Wert des Trägheitsmomentes des Dreiecks, auf letzteren schliessen können. Doch sind, wie auch später noch einige Male, an dieser Stelle die Ableitungen getrennt durchgeführt, um die Fruchtbarkeit des Principes, welches die Trägheitsmomente von homogenen ähnlichen Systemen in Bezug auf ähnlich liegende Achsen in einfache Beziehung setzt, ausführlicher darzutun.

Mit Hülfe des gefundenen Wertes für das Trägheitsmoment eines Parallelogramms bezogen auf eine Schwerpunktsachse, kann das Moment für jede andere Achse nun leicht berechnet werden.

Für die Eckenachse h_c ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$T_c = \frac{1}{6}m(7e^2 + f^2) = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2 + 12c^2)$$

Geht diese Achse durch den Schwerpunkt parallel der Seite BC, ist also $b = d = 0$, so ist

$$T_s = \frac{1}{12}ma^2$$

Fällt die Achse mit BC zusammen, so ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$\frac{1}{12}ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ma^2$$

Für die Diagonale AC als Achse ist $a = b = c = d$, und es wird

$$T_s = \frac{1}{6}ma^2$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Ellipsenfläche.

Die Ellipse enthalte bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse m.

Man teile die Fläche (Fig. 4) durch Radienvectoren in eine grade Anzahl gleicher Ellipsenausschnitte, einer Forderung, der dadurch genügt wird, dass man den Hauptkreis der Ellipse in die ge-

forderte Anzahl gleicher Teile teilt und die Schnittpunkte der Ordinaten dieser Teilpunkte und der Ellipse mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbindet. Für eine durch den Schwerpunkt der Fläche S gehende Momentenachse h_s ist dann das Trägheitsmoment der Ellipsenfläche gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ausschnitte.

Nun ist aber nach dem Früheren S. 42 das Trägheitsmoment eines Dreiecks für eine beliebige Eckenachse h_a (Fig. 2)

$$T_a = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + 4 t_a^2)$$

wenn b, c, t_a die Projectionen der Seiten und der Transversale, die von der Ecke A ausgehen, bezeichnen.

Wird die Anzahl der Ellipsenausschnitte aber gross, so kann man jedem Ellipsenausschnitt als ein schmales Dreieck auffassen, dessen Masse $\frac{m}{n}$ ist und für den Fall, dass $n = \infty$ wird, erhält man als Wert für das Trägheitsmoment des ersten Ellipsenausschnittes SAB für die Momentenachse h_s

$$t_{s1} = \frac{1}{12} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_1^2 + 4 r_1^2) = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_1^2$$

weil b, c, t_a für die Grenze $n = \infty$ den Wert r_1 des Radiusvector der Projection des Halbmessers des ersten Ellipsenausschnittes auf eine zu h_s senkrechte Ebene annimmt.

Für die folgenden Ellipsenausschnitte findet man entspechend

$$t_{s2} = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_2^2$$

$$\vdots$$

$$t_{sn} = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_n^2$$

woraus durch Addition hervorgeht

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)$$

Nun lässt sich aber für die Projection der Ellipse, welche im allgemeinen selbst wieder eine Ellipse ist, die Summe der Quadrate der Radienvectoren zu Paaren so ordnen, dass man $\frac{1}{2} n$ Summen

von Quadraten conjugirter Halbmesser der projicirten Ellipse erhält. Heissen ein Paar conjugirte Halbmesser der Projection ϱ und τ, so ist

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \tfrac{1}{2}n(\varrho^2 + \tau^2)$$

und es hat T_s den Wert

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

Es ist demnach das Trägheitsmoment einer Ellipse für eine beliebige Schwerpunktsachse gleich dem Product aus der Masse der Ellipse in den vierten Teil der Quadratensumme der Abstände der Endpunkte conjugirter Halbmesser von dieser Achse, oder gleich dem Product aus der Masse der Ellipse in den vierten Teil der Quadratensumme der Projectionen von zwei conjugirten Halbmessern der Ellipse auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Der gefundene Wert

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

kann auch für die projicirte Ellipse (Grundellipse) gedeutet werden, und man findet dann, dass das Trägheitsmoment einer Ellipse für eine schiefe Schwerpunktsachse immer auf das Trägheitsmoment der Grundellipse mit senkrechter Schwerpunktsachse zurückgeführt werden kann, nur muss dabei der Grundellipse die Masse der gegebenen Ellipse zuerteilt werden.

Aus dem gewonnenen Resultat ergeben sich leicht die Werte der Trägheitsmomente für bestimmte Fälle.

Steht die Achse im Schwerpunkt der Ellipse mit den Halbachsen a und b senkrecht, so ist das Trägheitsmoment

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(a^2 + b^2)$$

Für den Kreis hat man für diesen speciellen Fall

$$T_s = \tfrac{1}{2}mr^2$$

Fällt die Achse mit einem Durchmesser λ der Ellipse zusammen, so gilt auch

$$T_s = \tfrac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

es geben aber in diesem Falle ϱ und τ die senkrechten Abstände der Endpunkte von zwei conjugirten Halbmessern der Ellipse von der Achse λ an. Nun ist aber, wie am Schlusse dieser Betrachtung bewiesen werden soll, in jeder Ellipse die Quadratensumme der Projectionslote aus den Endpunkten von zwei conjugirten Halbmessern

auf irgend einem Durchmesser λ eine constante Grösse, gleich dem Quadrate des Projectionslotes aus dem Endpunkte des zu λ conjugirten Durchmessers r auf den Durchmesser λ selbst. Hat dieses Projectionslot die Länge d, so ist

$$T_s = \frac{1}{4} m d^2$$

Für die Hauptachsen a und b als Rotationsachsen erhält man die zugehörigen Trägheitsmomente

$$T_a = \frac{1}{4} m b^2$$
$$T_b = \frac{1}{4} m a^2$$

und für den Kreis hat man das specielle Resultat

$$T_s = \frac{1}{4} m r^2$$

Lehrsatz. In jeder Ellipse ist die Quadratsumme der Projectionslote aus den Endpunkten conjugirter Halbmesser auf irgend eine Mittelpunktsachse eine constante Grösse, nämlich gleich dem Quadrate des Projectionslotes aus dem Endpunkte des Halbmessers, der der Projectionsachse conjugirt ist.

Haben die Endpunkte E und F (Fig. 4) von zwei conjugirten Halbachsen $0E = \alpha$, und $0F = \beta$ auf das schiefwinklige Coordinatensystem der conjugirten Halbaxen $0C = \gamma$, $0D = \delta$ bezogen, die Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$. Es bestehen dann die Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = \alpha^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 = \beta^2$$
$$\frac{x_1^2}{\gamma^2} + \frac{y_1^2}{\delta^2} = 1$$
$$\frac{x_2^2}{\gamma^2} + \frac{y_2^2}{\delta^2} = 1$$

woraus bei Beachtung der Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$$

folgt

$$x_1^2 + x_2^2 = \gamma^2$$

Wird der spitze Coordinatenwinkel COD mit ϱ bezeichnet, so ist

$$x_1^2 \sin^2\varrho + x_2^2 \sin^2\varrho = \gamma^2 \sin^2\varrho$$
$$EE_1^2 + FF_1^2 = CC_1^2$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen dreiseitigen schiefen Prismas mit parallelen Grundflächen.

Man zerlege das dreiseitige Prisma, welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse m haben möge, durch drei durch die Mitten der Grundkanten geführte Schnitte und durch einen Schnitt parallel der Grundfläche in der mittleren Höhe in acht unter sich congruente Teilprismen, welche dem ganzen Prisma im Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind (Fig 5).

Das Trägheitsmoment des Prismas für irgend eine Schwerpunktsachse h_s wird gleich sein dem Trägheitsmoment der 8 Teilprismen für dieselbe Achse.

Bezogen auf die Momentenachse h_s sei das Trägheitsmoment des ganzen Prismas T_s, das Trägheitsmoment des der Kante AH anliegenden Prismas für dieselbe Achse h_s werde mit t_{sa} bezeichnet, die Bezeichnungen für die anderen Teilprismen seien entsprechend t_{sb}, t_{sc}, t_{sd}, t_{se}, t_{sf}. Die beiden mittleren Teilprismen liegen für h_s so, dass sich immer je zwei entsprechende Punkte bestimmen lassen, welche von h_s gleichen Abstand haben, diese Prismen haben deshalb gleiches Trägheitsmoment, welches mit t_s bezeichnet werden soll Es besteht demnach

$$T_{sa} = t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd} + t_{se} + t_{sf} + 2t_s$$

Die um die mittleren Prismen herumliegenden sechs Teilprismen haben für die durch die Ecken $ABCDEF$ parallel zu h_s verlaufenden Achsen $h_a \ldots h_f$ dasselbe Moment wie für h_s; heissen die Trägheitsmomente für die neuen Achsen $t_a \ldots t_f$, so ist beispielsweise $t_{sa} = t_a$, d. h. das Trägheitsmoment des Teilprismas an der Kante AH hat für die Achsen h_s und h_a denselben Wert.

Liegt der Schwerpunkt des Teilprismas an der Kante AH in S_1 und heisst die durch S_1 parallel zu h_s und h_a verlaufende Achse h_1 und das Trägheitsmoment des Teilprismas für diese Schwerpunktsachse t_1, so bestehen, wenn die Abstände der Achsen h_s und h_1, sowie h_1 und h_a durch u und v angegeben werden, die Gleichungen

$$t_{sa} = t_1 + \frac{m}{8} u^2$$

$$t_a = t_1 + \frac{m}{8} v^2$$

Nun liegt aber S_1 auf der Verbindungslinie von A nach S und halbirt dieselbe, denn ist G der Schwerpunkt der unteren Grund-

fläche des Teilprismas, so ist einmal, wie beim Dreieck gezeigt wurde,

$$GS = GH$$

zum andern liegt S_1 auf der durch G zu HA parallelen Achse in halber Höhe, d. h. es ist:

$$GS_1 = \tfrac{1}{2} HA$$

woraus hervorgeht, dass die Punkte $AS_1 S$ in gerader Linie liegen und

$$AS_1 = S_1 S$$

ist. Sind aber diese Strecken gleich, so sind es auch ihre Projectionen u und v auf eine zu h_1 senkrechte Ebene. Hieraus geht aber hervor

$$t_{sa} = t_a$$

Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass

$$t_{sb} = t_b$$

es ist deshalb auch

$$T_s = t_a + t_b + t_c + t_d + t_e + t_f + 2t_s$$

Führt man für die Trägheitsmomente des ganzen Prismas bezogen auf die Eckenachsen $h_a \ldots h_f$ die Bezeichnungen $T_a \ldots T_f$ ein, so liegen für jede Eckenachse je ein Teilprisma und das ganze Prisma ähnlich, und es liefert die Aehnlichkeit der Prismen für ähnlich liegende Achsen die Beziehungen

$$\begin{aligned} T_a &= 2^5 t_a & \qquad T_d &= 2^5 t_d \\ T_b &= 2^5 t_b & \qquad T_e &= 2^5 t_e \\ T_c &= 2^5 t_c & \qquad T_f &= 2^5 t_f \end{aligned}$$

In Bezug auf h_s liegt das ganze Prisma zu den beiden mittleren Teilprismen nicht ähnlich. Zieht man aber durch die Schwerpunkte der Grundflächen des ganzen Prismas O und N zu h_s parallele Achsen, welche von h_s den Abstand $\frac{1}{2}d$ haben mögen, so liegen für diese neuen Achsen und für h_s die Teilprismen und das ganze Prisma ähnlich, es besteht deshalb die Beziehung

$$T_s + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2^5 t_s$$

Unter Benutzung der sieben letzten Gleichungen findet man

$$\frac{15}{16} T_s = \frac{1}{32}(T_a + T_b + T_c + T_d + T_e + T_f) + \frac{1}{64} m8^2$$

Andererseits bestehen aber nach dem Huyghens'schen Satze,

wenn die Abstände der Achsen $h_a h_b \ldots h_f$ von h_s mit $r_a \ldots r_f$ genannt werden, die Gleichungen

$$T_a = T_s + mr_a^2 \qquad T_d = T_s + mr_d^2$$
$$T_b = T_s + mr_b \qquad T_e = T_s + mr_e^2$$
$$T_c = T_s + mr_c^2 \qquad T_f = T_s + mr_f^2$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{24} m(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 + r_e^2 + r_f^2) + \frac{1}{48} md^2$$

In dieser Form können die Grössen $r_a \ldots r_f$ noch durch die Projectionen der Kanten des gegebenen Prismas auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene ersetzt werden.

Heissen die Abstände des Schwerpunktes S von den sechs Ecken $R_a \ldots R_f$ die Grundkanten A, B, C, die Seitenkante D, so folgt aus dem Dreieck ASD

$$AS^2 + DS^2 = AH^2 + DH^2 + 2SH^2$$

oder

$$R_a^2 + R_d^2 = \tfrac{1}{2}D^2 + 2SH^2$$

ebenso bestehen

$$R_b^2 + R_e^2 = \tfrac{1}{2}D^2 + 2SK^2$$
$$R_c^2 + R_f^2 = \tfrac{1}{2}D^2 + 2SL^2$$

Durch Addition findet man hieraus

$$\begin{aligned} R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 + R_d^2 + R_e^2 + R_f^2 &= \tfrac{3}{2}D^2 + 2(SH + SK + SL)^2 \\ &= \tfrac{3}{2}D^2 + \tfrac{2}{3}(A^2 + B^2 + C^2) \end{aligned}$$

Diese Beziehung geht bei der Projection auf eine zu h_s senkrechte Ebene über in

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 + r_e^2 + r_f^2 = \tfrac{3}{2}d^2 + \tfrac{3}{2}(a^2 + h^2 + c^2)$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2)$$

Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas für eine beliebige Schwerpunktsachse ist demnach gleich dem Product aus der Masse des Prismas und dem 36 ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der drei Grund- und drei Seitenkanten auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Stellt man T_s dar durch

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{12} m d^2$$

und beachtet, dass $\frac{1}{36}m(a^2+b^2+c^2)$ das Trägheitsmoment eines Schnittes HKL (Mitteldreieck) parallel zu den Grundflächen durch den Schwerpunkt des Prismas, $\frac{1}{12}md^2$ das Trägheitsmoment der Achse ON des gegebenen Prismas bezeichnet, so ergiebt sich der Satz:

Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen schiefen homogenen Prismas ist für eine beliebige Schwerpunktsachse gleich dem Trägheitsmoment des Mitteldreiecks und der Achse, wenn sowol das Mitteldreieck als auch die Achse mit der Masse des Prismas belastet werden.

Heissen die Schwerpunktstransversalen des Mitteldreiecks t_a, t_b, t_c, so kann man, wie beim Dreieck T_s auf die Form bringen

$$T_s = \frac{1}{27}m(t_a^2+t_b^2+t_c^2)+\frac{1}{12}md^2$$

Es sollen noch einige specielle Werte für das Trägheitsmoment angegeben werden.

Ist h_s der Seitenkante parallel, fällt also h_s mit der Achse zusammen, so ist $d=0$, und es wird das Trägheitsmoment des Prismas gleich dem Trägheitsmoment der Grundfläche, wenn dieselbe die Masse des Prismas enthält

$$T_s = \frac{1}{36}m(a^2+b^2+c^2)$$

Ist AH Momentenachse, so ist das Trägheitsmoment

$$T_a = \frac{1}{12}m(3b^2+3c^2-a^2) = \frac{1}{12}m(b^2+c^2+t_a^2)$$

Das Trägheitsmoment für die Schwerpunktstransversale HT des Mitteldreiecks ist, weil $b=c=\frac{a}{2}$

$$\frac{1}{24}ma^2+\frac{1}{12}md^2 = \frac{1}{24}m(a^2+2d^2)$$

Läuft h_s parallel KL durch S, so ist $a=0$, $b=c$ und das Moment wird angegeben durch

$$\frac{1}{36}m(2b^2+3d^2)$$

Für die Momentenachse KL wird das Trägheitsmoment

$$\frac{1}{36} m(2b^2 + 3a^2) + m \left(\frac{t_a}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} w(2b^2 + d^2)$$

Geht die Momentenachse durch die Ecke L des Mitteldreiecks HKL, so ist, da der Abstand der parallelen Achsen h_s und h_l gleich $\frac{2}{3} t_c$ ist,

$$T_l = T_s + \frac{4}{9} t_c^2$$

welcher Ausdruck wegen der Relation

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

auch in die Form gebracht werden kann

$$T_l = \frac{1}{36} m(3a^2 + 3b^2 + 12t_c^2 + 3d^2)$$

Das Trägheitsmoment eines homogen schiefwinkligen Parallelepipedons.

Man zerlege das Parallelepipedon, welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse m enthalten möge, durch drei durch die Mitten von je vier parallelen Kanten geführte Schnitte in acht congruente Teile, welche dem gegebenen Körper nach dem Verhältniss $h = \frac{1}{2}$ ähnlich sind (Fig. 6).

Inbezug auf eine durch den Schwerpunkt S des ganzen Parallelepipedons gehende Momentenachse h_s haben je zwei über Kreuz liegende Teilparallelepipeda, so SA und SG etc. dasselbe Moment, weil die Elemente dieser Körper einander so zugeordnet werden können, dass dieselben von der Achse h_s gleichen Abstand besitzen. Die Trägheitsmomente der Teilparallelepipeda für die Achse h_s mögen heissen $t_{sa} \ldots t_{sh}$, dann wird das Trägheitsmoment des ganzen Parallepipedons für die Achse h_s angegeben durch

$$T_s = 2(t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd})$$

Heissen nun die Trägheitsmomente des ganzen Parallelepipedons für die zu h_s durch die Eckpunkte $EEGH$ parallel laufenden Achsen $h_e \ldots h_h$ beziehungsweise $T_e \ldots T_h$, so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Parallelepipeda SC und EC, für die zu den Körpern ähnlich liegenden Achsen h_s und h_e; SD und FD für h_s und h_f; SA und GA für h_s und h_g; SB und HB für h_s und h_h die Beziehungen

$$T_e = 2^3 t_{sc} \qquad T_g = 2^3 t_{sa}$$
$$T_f = 2^3 t_{sd} \qquad T_h = 2^3 t_{sb}$$

Werden die Abstände der Ecken *EFGH* von h_s, oder die Projectionen der halben Diagonalen des Parallelepipedons auf eine zu h_s senkrechte Ebene mit $r_e r_f r_g r_h$ bezeichnet, so bestehen auch nach dem Satze von Huyghens die Gleichungen

$$T_e = T_s + mr_e^2 \qquad T_g = T_s + mr_g^2$$
$$T_f = T_s + mr_f^2 \qquad T_h = T_s + mr_h^2$$

woraus man ableitet

$$T_s = \frac{1}{12} m(r_e^2 + r_f^2 + r_g^2 + r_h^2)$$

Zwischen den halben Diagonalen des Parallelepipedons R_e, R_f, R_g, R_h und den Kanten desselben A, B, C besteht aber, wie durch einfache Rechnung gefunden wird, die Beziehung

$$R_e^2 + R_f^2 + R_g^2 + R_h^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

welche für die Projection auf eine zu h_s senkrechte Ebene übergeht in

$$r_e^2 + r_f^2 + r_g^2 + r_h^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

so dass

$$T_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2 + c^2)$$

wird, wenn *abc* die Projectionen von drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten auf eine zu h_s senkrechte Ebene bedeuten.

Das Trägheitsmoment eines schiefen Parallelepipedons ist demnach gleich dem Producte aus der Masse in den zwölften Teil der Quadratensumme aus den Projectionen der vier halben Diagonalen oder der drei Kanten, die eine Ecke bilden.

Bringt man T_s in die Form

$$T_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) + \frac{1}{12} mc^2$$

und beachtet, dass $\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ des Trägheitsmoment eines Schnittes *KLMN* (Mittelparallelogramm) parallel den Grundflächen durch den Schwerpunkt, $\frac{1}{12} me^2$ das Trägheitsmoment der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen *OP* d. h. der Achse bezeichnen, so kommt man zu dem Satze:

Das Trägheitsmoment eines schiefen Parallelepipedons für eine beliebige Schwerpunktsachse ist gleich dem Trägheitsmoment des

Mittelparallelogramms und der Achse, wenn Mittelparallelogramm und Achse einzeln mit der Masse des Parallelepipedons belastet werden.

Ist h_s der Kante AE parallel, so ist $r_e = r_g$ und $r_f = r_h$ und ferner $c = 0$, man erhält die bei dem Parallelogramm gefundenen Werte

$$T_h = \frac{1}{6} m(r_e^2 + r_f^2) = \frac{1}{6} m(p^2 + q^2)$$

$$= \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Fällt h_s mit AE zusammen, so ist

$$T_a = T_s + mr_e^2 = \frac{1}{6} m(7r_e^2 + r_f^2)$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Cylinders mit parallelen Grundflächen.

Man zerlege den Cylinder, dessen Masse bei gleicher Dichtigkeit m sein möge, durch Achsenschnitte in eine gerade Anzahl (n) gleicher Ausschnitte von der Masse $\frac{m}{n}$. Legt man durch den Schwerpunkt S des Cylinders, der im Mittelpunkt der Achse AD liegt, eine Momentenachse h_s, so ist bezogen auf diese Achse, das Trägheitsmoment des Cylinders gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzeln Cylinderausschnitte (Fig. 7.)

Nach dem Früheren ist aber das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas für eine Achse durch die Mitte einer Kante (Fig. 5)

$$T_l = \frac{1}{36} m(3n^2 + 3b^2 + 12t_e + 3d^2)$$

wenn a, b_1', t_e die Projcctionen der Seiten und der Transversale des Mitteldreiecks von der Ecke L aus und d die Projection der Seitenkante des Prismas auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene bezeichnet.

Wird die Anzahl der Cylinderausschnitte sehr gross, so kann man jeden Ausschnitt als ein schmales dreiseitiges Prisma von der Masse $\frac{m}{n}$ betrachten, und für den Fall $n = \infty$ wird das Trägheitsmoment des ersten Ausschnittes für die Achse

$$t_{s_1} = \frac{1}{36}\frac{m}{n}(3r_1^2 + 3s_1^2 + 12v_1^2 + 3d^2)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m}{n}r_1^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{n}d^2$$

weil für $n = \infty$, $a = b = t_s = r_1$ gleich dem Radiusvector der Projection des Halbmessers des ersten Ellipsenausschnittes wird, der in der Mittelellipse des Cylinders liegt.

Für die folgenden Cylinderausschnitte erhält man die entsprechenden Werte für die Trägheitsmomente

$$t_{s_2} = \frac{1}{2}\frac{m}{n}r_2^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{n}d^2$$

.
.
.

$$t_{sn} = \frac{1}{2}\frac{m}{n}(r_1^2 + r_2^2 + \ldots r_n^2) + \frac{1}{12}md^2$$

Durch Addition findet man das Trägheitsmoment des Cylinders für eine beliebige Schwerpunktsachse

$$T_s = \frac{1}{2}\frac{m}{n}r_n^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Die Summe der Quadrate der n Radienvectoren der Projection der Mittelellipse, lassen sich aber zu Paaren so anordnen, dass man $\frac{n}{2}$ Summen von Quadraten conjugirter Halbmesser der projicirten Ellipse bekommt Heissen demnach ein Paar conjugirte Halbmesser der Projection ϱ und τ, so ist

$$T^s = \frac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2) + \frac{1}{12}md^2$$

Für die Achse h_s kann $\frac{1}{4}m(\varrho^2 + \tau^2)$ gedeutet werden als das Trägheitsmoment des elliptischen Schnittes (Mittelellipse), der parallel einer Grundfläche durch den Schwerpunkt des Cylinders gelegt ist, ebenso kann $\frac{1}{12}md^2$ als das Trägheitsmoment der Cylinder-Achse AD angesehen werden. Man kann demnach für die Schwerpunktsache den Satz aufstellen:

Das Trägheitsmoment eines elliptischen Cylinders ist gleich dem Trägheitsmoment der Mittel-Ellipse und der Achse, wenn die Mittel-Ellipse sowol wie die Achse mit der Masse des Cylinders belastet werden.

Wird die Achse des Cylinders zur Momentenachse, so ist $d = 0$ und

$$T_5 = \frac{1}{4}m(\varrho^2 + T^2)$$

Fällt die Achse mit einem Durchmesser der Mittel-Ellipse zusammen, so ist nach dem bei der Ellipse angestellten Betrachtungen

$$T_s = \frac{1}{4}m(l^2 + n^2) + \frac{1}{12}md^2 = \frac{1}{4}m\varrho^2 + \frac{1}{12}md^2$$

wenn l und n die Abstände der Endpunkte conjugirter Durchmesser von der Momentenachse bezeichnen, und o den Abstand des Endpunktes des zur Momentenachse conjugirten Durchmesser von der Drehachse angiebt.

Für die mit den Hauptachsen $2p$ und $2q$ der Mittel-Ellipse zusammenfallenden Momentenachsen sind die Trägheitsmomente

$$T_p = \frac{1}{4}mq^2 + \frac{1}{12}md^2$$

$$T_q = \frac{1}{4}mp^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Wird der Cylinder zu einem Rotationscylinder, so ist das Trägheitsmoment für eine im Schwerpunkt auf der Achse senkrechte Momentenachse

$$T_r = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Für die geometrische Achse des Rotationscylinders erhält man das Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{2}mr^2$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen dreiseitigen Pyramide.

Es sollen zunächst einige allgemeine Betrachtungen über die Lage des Schwerpunktes, und überdies Beziehungen, die zwischen den Kantenlängen und den Verbindungsstrecken des Schwerpunktes mit den Ecken und den Kantenmitten bestehen, abgeleitet werden. (Fig. 8).

Drei durch die Mittender Kanten geführte Ebenen EFG, FJK, $FGHJ$, zerlegen die Pyramide in zwei congruente Pyramiden (gleiche Grundfläche und Höhe), welche der gebenen Pyramide nach dem Verhältniss $\lambda = \frac{1}{2}$ ähnlich sind und in zwei dreiseitige inhaltsgleiche Prismen

($\frac{1}{4}$ Grundfläche $\times$ $\frac{1}{2}$ zugehörig. Höhe $=$ $\frac{1}{8}$ geb. Pyramide). Es teilt demnach das Parallelogramm $FGHS$ (FG und JH parallel und gleich $\frac{1}{2}$ BC) die gegebene Pyramide in zwei inhaltsgleiche Hälften, es enthält deshalb das Parallelogramm den Schwerpunkt der Pyramide. Für die Parallelogramme $EFHK$ und $EGKJ$ gilt dasselbe, es liegt mithin der Schwerpunkt der Pyramide im Schnitte der drei Parallelogramme, d. h. im Schnitte S der Diagonalen des Parallelogramms $FGHJ$. Beachtet man, dass $EFGHJK$ Halbirungspunkte der Kanten sind, so findet man, dass der Schwerpunkt auf den Verbindungslinien der Mitten gegenüber liegender Kanten liegt, und dass diese Verbindungslinien im Schwerpunkt halbirt werden. Zerlegt man andererseits die gegebene Pyramide durch Schnitte parallel der Fläche ABC in viele dünne Platten, so liegt der Schwerpunkt jeder Platte und mithin auch der Schwerpunkt S der Pyramide auf der Verbindungslinie der Spitze D mit dem Schwerpunkt O der Grundfläche. Ist L der Schnitt der Transversale DO mit der Ebene EFG, so ist $DL = LO$, es ist aber auch $LS = SO$ weil $FS = SH$ ist, woraus hervorgeht $SO' = \frac{1}{4} DO$. Es teilt mithin der Schwerpunkt einer Pyramide die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Schwerpunkt der Gegenfläche nach dem Verhältniss 1 :3.

Ist N der Schwerpunkt der Teilpyramide $DEFG$, so halbirt N die Strecke DS, denn

$$DN = \frac{3}{4} DL = \frac{3}{8} DO$$

$$NS = NL + LS = \frac{1}{4} DO + SO = \frac{1}{8} DI + \frac{1}{4} \dot{D}O = \frac{3}{8} DO.$$

Aus den Dreiecken DAK, DBH und DCJ leitet man ab:

$$\begin{aligned} 2DO^2 &= DA^2 + DK^2 = AO^2 - OK^2 = DA^2 + DK^2 - 3OK^2 \\ &= DB^2 + DH^2 - BO^2 - OH^2 = DB^2 + DH^2 - 3OH^2 \\ &= DC^2 + DJ^2 - CO^2 - OJ^2 = DC^2 + DJ^2 - 6OJ^2 \end{aligned}$$

Für die Begrenzungsflächen bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4DK^2 &- 2DB^2 + 2DC^2 - BC^2 \\ 4DH^2 &= 2DC^2 + 2DA^2 - AC^2 \\ 4DJ^2 &= 2DA^2 + 2DB^2 - AB^2 \end{aligned}$$

woraus folgt

$$4(DK^2 + DH^2 + DJ^2) = 4(DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$
$$4(AK^2 + BH^2 + CJ^2) = 3(AB^2 + BC^2 + CB^2)$$

$$OK^2 + OH^2 + OJ^2 = \frac{1}{12}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Bei Bemerkung dieser Formeln findet man

$$DO^2 = \tfrac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \tfrac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

und weil $DS = \frac{3}{4} DO$

$$DS^2 = \frac{3}{16}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{16}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

In ähnlicher Weise leitet man ab

$$CS^2 = \frac{3}{16}(CA^2 + CB^2 + CD^2) - \frac{1}{16}(AD^2 + DB^2 + BA^2)$$

$$BS^2 = \frac{3}{16}(BA^2 + BC^2 + BD^2) - \frac{1}{16}(AD^2 + DC^2 + CA^2)$$

$$AS^2 = \frac{3}{16}(AB^2 + AC^2 + AD^2) - \frac{1}{16}(BC^2 + CD^2 + DB^2)$$

hieraus geht hervor:

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = \tfrac{1}{4}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Es ist also die vierfache Quadratensumme der Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Ecken gleich der Quadratsumme über den Kanten.

Es bestehen ferner die Gleichungen

$$2SE^2 = SA^2 + SD^2 - DE^2 - AE^2 = SA^2 + SD^2 - \tfrac{1}{2}DA^2$$

$$2SF^2 = SD^2 + SB^2 - \tfrac{1}{2}DB^2$$

$$2SG^2 = SD^2 + SC^2 - \tfrac{1}{2}DC^2$$

$$2SJ^2 = SB^2 + SA^2 - \tfrac{1}{2}AB^2$$

$$2SH^2 = SA^2 + SC^2 - \tfrac{1}{2}AC^2$$

$$2SK^2 = SB^2 + SC^2 - \tfrac{1}{2}BC^2$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}2(SE^2 + SF^2 + SG^2 + SH^2 + SJ^2 + SK^2) &= 3(SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2) \\ &= SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2)\end{aligned}$$

Die achtfache Quadratensumme der Verbindungslinien des Schwer-

punktes mit den Kantenmitten ist gleich der Summe der Quadrate über den Kanten.

Es bedarf wol kaum einer Erwähnung, dass die abgeleiteten Beziehungen auch für die Projectionen der Strecken auf dieselbe Ebene richtig bleiben.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen soll nun die eigentliche Aufgabe die Berechnung des Trägheitsmomentes einer dreiseitigen Pyramide in Angriff genommen werden. Enthalte die Pyramide bei gleicher Dichtigkeit die Masse m.

Das Trägheitsmoment der Pyramide bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Achse h_s wird gleich dem Trägheitsmoment der beiden Teilpyramiden und der beiden Prismen sein, in die eingangs die Pyramide zerlegt wurde.

Heisst in Bezug auf h_s das Moment der gegebenen Pyramide T_s, und wird für dieselbe Achse das Trägheitsmoment der den Ecken $ABCD$ anliegenden Teilkörper entsprechend t_{sa}, t_{sb}, t_{sc}, t_{sd} genannt, so besteht

$$T_s = t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd}$$

Die Trägheitsmomente t_{sa} und t_{sc} sind als Trägheitsmomente von halben Parallelepipeda für Achsen, die durch den Schwerpunkt S der ganzen Parallelepipeda gehen, sofort ihrem Werte nach anzugeben.

Wird durch sa die Projection der Strecke SA auf eine zu h_s senkrechte Ebene bezeichnet, und haben die Strecken die durch kleine Buchstaben angegeben werden, entsprechende Bedeutung, so ist

$$t_{sa} = \frac{\frac{3}{8}m}{12}(se^2 + sf^2 + sg^2 + sa^2)$$

$$t_{sb} = \frac{\frac{5}{8}m}{12}(sh^3 + si^2 + sk^2 + sc^2)$$

Die Trägheitsmomente der Teilpyramiden an den Ecken B und D bezogen auf h_s nämlich t_{sb} und t_{sd} sind gleich den Trägheitsmomenten t_b und t_d dieser Pyramiden für die durch B und D parallel zu h_s gezogenen Achsen h_b und h_d. Heisst nämlich das Moment der Teilpyramide $DEFG$ für die an h_s parallele Achse h_n durch den Schwerpunkt N dieser kleinen Pramide t_n, so haben die Achsen h_s und h_d von h_n gleichen Abstand u, weil $ND = NS$ ist, und es wird

$$t_{sd} = t_d = t_n + \frac{1}{8}mu^2$$

Analog zeigt man die Gleichheit von t_{sb} und t_b.

Die Teilpyramiden an den Ecken B und D liegen zu der ganzen Pyramide in Bezug auf die Ecken Achsen h_b und h_d ähnlich, und da die Pyramide ebenfalls ähnlich sind, so besteht, wenn die Trägheitsmomente der ganzen Pyramide für h_b und h_d mit T_b und T_d bezeichnet werden

$$T_b = 2^5 t_b \qquad T_d = 2^5 t_d$$

und da nach dem Huyghens'schen Satze

$$T_b = T_s + m\, sb^2$$
$$T_d = T_s + m\, sd^2$$

so findet man für das Trägheitsmoment der ganzen Pyramide

$$T_s^* = \frac{1}{32} m(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si^2 + sk^2 + sa^2 + sc^2)$$
$$+ \frac{1}{16} T_s + \frac{1}{32} m(sb^2 + sd^2)$$

$$T_s = \frac{1}{30} m(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si + sk^2 + sa^2 + sb^2 + sc^2 + sd^2)$$

und weil

$$2(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si^3 + sk^2) = sa^2 + sb^2 + sc^2 + sd^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

$$T_s = \frac{1}{10} m(se^2 + sf^2 + sg^2 + sh^2 + si^2 + sk^2)$$
$$= \frac{1}{20} m(sa^2 + sb^2 + sc^2 + sd^2)$$
$$= \frac{1}{80} m(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

Hieraus gehen die Sätze hervor:

Das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide für eine beliebige Schwerpunktsachse ist gleich

1) dem Producte aus der Masse in den 10ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der Transversalen vom Schwerpunkt nach den Mitten der Kanten,

2) dem Producte aus der Masse in den 20ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der Transversalen vom Schwerpunkte nach den Ecken,

3) dem Producte aus der Masse in den 80ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der Kanten,

wenn die Projectionen erfolgen auf eine zu der Momentenachse senkrechte Ebene.

Wegen der Relation

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 3do^2 + \tfrac{1}{3}(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

kann man auch schreiben

$$T_s = \frac{1}{60}\, m(ab^2 + bc^2 + ca^2) + \frac{3}{80}\, m\, do^2$$

Ist h_s der Kante DA parallel, so ist

$$da = 0, \quad dc = ac, \quad db = ab$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{80}\, m(2\, db^2 + 2\, dc^2 + bc^2) = \frac{1}{40}\, m(2dk^2 + bc^2)$$

Wird DA zur Momentenachse, so ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$T_s + m\left(\frac{dk}{2}\right)^2 = \frac{1}{40}\, m(12\, dk^2 + bc^2) = \frac{1}{20}\, m(3db^2 + 3dc^2 - bc^2)$$

Für die Schwerpunktstransversale DO wird das Trägheitsmoment, da $sd = 0$ und $sa^2 + sb^2 + se^2 = \frac{1}{3}(ab^2 + bc^2 + ea^2)$ ist

$$T_s = \frac{1}{60}\, m(ab^2 + bc^2 + ca^2) = \frac{1}{3}\, m(oh^2 + bi^2 + ok^2)$$

Fällt die Achse mit der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten mit FH zusammen, so ist das Moment

$$\frac{1}{10}\, m(se^2 + sg^2 + si^2 + sk^2) = \frac{1}{5}\, m(se + cg^2)$$

Wird die Schwerpunkstransversale einer Begrenzungsfläche DK Momentenachse, so ist das Trägheitsmoment

$$\frac{1}{40}\, m(3ak^2 + 3ck^2 - ac^2 + 3ak^2 + 3bk^2 - ab^2)$$

$$= \frac{1}{40}\, m\left(6\, ak + \frac{6}{4}\, bc^2 - ac^2 - ab^2\right) = \frac{1}{40}\, m\left[\frac{3}{2}(2ac^2 + 2ab^2 - bc^2)\right.$$

$$\left. + \tfrac{3}{2} bc^2 - ac^2 - ab^2\right] = \frac{1}{20}\, m(ac^2 + ab^2)$$

Für die zu h_s parallele Eckenachse durch D findet man

$$T_s = \frac{1}{80} m(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2) + m\,sd^2$$

und weil

$$16\,sd^2 = 3(da^2 + db^2 + dc^2) - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

$$T_s = \frac{1}{20} m(da^2 + db^2 + dc^2) + \frac{4}{5} m\,sd^2$$

$$= \frac{1}{20} m(da^2 + db^2 + dc^2 + 9do^2)$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Kegels.

Man zerlege den Kegel, der bei gleicher Dichtigkeit die Masse m enthalte, durch Achsenschnitte in eine gerade Anzahl ($n = 2p$) gleicher Ausschnitte von der Masse $\frac{m}{n}$ (Fig. 9).

Legt man durch den Schwerpunkt S des Kegels, der die Achse nach dem Verhältniss 1 : 3 teilt, eine beliebige Momentenachse, so ist für diese Achse das Trägheitsmoment des Kegels gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ausschnitte. Heissen die Schwerpunkte von zwei sich diametral gegenüberliegenden Ausschnitten AB_1C_1D, AB_2C_2D bezüglich P_1 und P_2, so sind die Trägheitsmomente dieser Ausschnitte, welche bei grossem n als schmale dreiseitige Pyramiden aufgefasst werden können, für die durch P_1 und P_2 zu h_s parallelen Achsen h_{p_1} und h_{p_2}, wenn die Projectionen der Kanten auf eine zu h_s senkrechte Ebene mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden

$$t_{p_1} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} (ab_1^2 + ac_1^2 + ad^2 + b_1c_1^2 + c_1d^2 + db_1^2)$$

$$t_{p_2} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} (ab_2^2 + ac_2^2 + ad^2 + b_2c_2^2 + c_2d^2 + db_2^2)$$

Bezogen auf die Achse h_s wird die Summe der Trägheitsmomente der beiden Ausschnitte, deren Grundflächen B_1C_1D und B_2C_2D congruent sind, angegeben durch

$$t_{s_1} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} [(ab_1^2 + ab_2^2) + (ac_1^2 + ac_2)^2 + 2ad^2 + 2b_1c_1^2 + 2c_1d^2 + 2db_1^2]$$

$$+ \frac{m}{n}(p_1s^2 + p_2s^2)$$

wenn $p_1 s$ und $p_2 s$ die Abstände der Achsen h_{p_1} und h_{p_2} von h_s bezeichnen.

Heissen O_1 und O_2 die Schwerpunkte der congruenten Flächen B_1C_1D und B_2C_2D, so teilen P_1 und P_2 die Strecken AO_1 und AO_2 nach dem Verhältniss 1 : 3, und weil auch $DS = \frac{1}{4}AS$ ist, so wird

$$P_1S = \tfrac{3}{4}O_1D \quad \text{und} \quad P_2S = \tfrac{3}{4}O_2D$$

sein. Nun teilen aber O_1 und O_2 die gleichen Schwerpunktstransversalen DG_1 DG_2 der congruentnn Flächen B_1C_1D und B_2C_2D nach dem Verhältniss 1 : 2, so dass

$$O_1D = \tfrac{2}{3}DG_1 \quad \text{und} \quad P_1S = P_2S = \tfrac{1}{2}DG_1$$

ist. Für die Dreiecke B_1C_1D; C_1AC_2 und B_1AB_2 bestehen ferner die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4DG_1{}^2 &= 2B_1D^2 + 2C_1D^2 - B_1C_1{}^2 \\ AC_1{}^2 + AC_2{}^2 &= 2C_1D^2 + 2AD^2 \\ AB_1{}^2 + AB_2{}^2 &= 2B_1D^2 + 2AD^2 \end{aligned}$$

Beachtet man, dass die letzten vier Gleichungen auch für die Projectionen bestehen bleiben, dass also die Relationen gelten

$$\begin{aligned} p_1{}^s &= p_2{}^s = \tfrac{1}{2}dg_1 \\ 4ad_1{}^2 &= 2b_1d^2 + 2c_1d^2 - b_1c_1 \\ ac_1{}^2 + ac_2{}^2 &= 2c_1d^2 + 2d^2 \\ ab_1{}^2 + ab_2{}^2 &= 2b_1d^2 + 2ad^2 \end{aligned}$$

so kann nunmehr der Ausdruck für t_{s_1} in die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} t_{s_1} &= \frac{1}{80}\,\frac{m}{n}\,(2b_1c_1{}^2 + 4b_1d^2 + 4dc_1{}^2 + 6ad^2) + \frac{1}{2}\,\frac{m}{n}\,dg_1{}^2 \\ &= \frac{1}{80}\,\frac{m}{n}\,(8b_1d^2 + 8dc_1{}^2 + 32dg_1{}^2 + 6ad^2) \end{aligned}$$

Für den Grenzfall $n = \infty$ wird

$$b_1d = dc_1 = dg_1$$

gleich dem Radiusvector r_1 der Projection des Halbmessers des Ellipsenausschnittes, der als Grundfläche zu dem betrachteten Kegelausschnitt gehört; die Projection erfolgt hierbei auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Es nimmt für diesen Grenzfall t_{s_1} den Wert an

$$t_{s_1} = \frac{3}{5}\frac{m}{n}r_1^2 + \frac{3}{40}\frac{m}{n}ad^2$$

Für die folgenden Paare von Kegelausschnitten erhält man die entsprechenden Werte für die Trägheitsmomente

$$t_{s_2} = \frac{3}{5}\frac{m}{n}r_2^2 + \frac{3}{40}\frac{m}{n}ad^2$$

.

.

.

$$t_{sn} = \frac{3}{5}\frac{m}{n}r_n^2 + \frac{3}{40}\frac{m}{n}ad^2$$

Durch Summation dieser Gleichungen findet man das doppelte Trägheitsmoment des Kegels für eine beliebige Schwerpunktsachse h_s

$$2T_s = \frac{3}{5}\frac{m}{n}(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2) + \frac{3}{40}m \,.\, ad^2$$

und da auch hier wie bei der Ellipse und dem Cylinder

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \tfrac{1}{2}n(\varrho^2 + \tau^2)$$

so hat man, wenn noch $ad = d$ gesetzt wird

$$T_s = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2) + \frac{3}{80}m \,.\, d^2;$$

ϱ und τ bezeichnen in dieser Formel die Projectionen von zwei conjugirten Halbachsen der Grundfläche, d die Projection der Achse des Kegels auf ein zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Geht die Ache durch den Schwerpunkt D der Grundfläche, so ist

$$T_d = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2) + \frac{1}{10}m \,.\, d^2$$

Für eine Achse durch die Spitze A ist das Trägheitsmoment

$$T_a = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2) + \frac{3}{5}m\,d^2$$

Wird die Achse des Kegels AD zur Momentenachse, so wird das Moment angegeben durch

$$T_{ad} = \frac{3}{20}m(\varrho^2 + \tau^2)$$

welches für den Rotationskegel (r = Radius des Grundkreises) übergeht in

$$T_{ad} = \frac{3}{30} m r^2$$

Für einen Durchmesser der Grundfläche als Achse findet man den Wert des Trägheitsmomentes

$$T = \frac{3}{20} m (l^2 + n^2) + \frac{1}{10} m d^2$$

wenn l und n die Abstände der Endpunkte conjugirter Durchmesser der Grundfläche von der Momentenachse angeben.

Für die Hauptachsen (p und q Hauptachsen) hat man die Werte

$$T_p = \frac{3}{20} m q^2 + \frac{1}{10} m d^2, \quad T_q = \frac{3}{20} m p^2 + \frac{1}{10} m d^2$$

ist $p = q = r$, so geht der elliptische Kegel zum Rotationskegel über, dessen Trägheitsmoment in diesem Falle angegeben wird durch

$$T_r = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{1}{10} m d^2$$

Das Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoides

Man denke sich das Ellipsoid (Fig. 10), welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse m enthalten möge, durch Ebenen durch den Mittelpunkt in $n = 3p$ (d. h. durch 3 teilbar) unter sich gleiche Ausschnitte von der Masse $\frac{m}{n}$ geteilt.

Für eine durch den Mittelpunkt (Schwerpunkt S des Ellipsoides gehende Achse, wird das Trägheitsmoment des Ellipsoides gleich der Summe der Trägheitsmomente der n einzelnen Ausschnitte sein. Wird die Anzahl dieser Ausschnitte aber gross genommen, so kann jeder als eine schmale dreiseitige Pyramide mit kleiner Grundfläche angesehen werden. Nach dem Früheren wird aber das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide $SABC$ für die Eckenachse h_s, wenn sa, sb, sc, so die Abstände der drei Eckpunkte ABC und des Schwerpunktes O der Grundfläche ABC von der Momentenachse bezeichnen, oder wenn sa, sb, sc, so die Projectionen von SA, SB, SC und SO sind, angegeben durch

$$t_s = \frac{1}{20} m(sa^2 + sb^2 + sc^2 + 9so^2)$$

Wird die Anzahl der Ausschnitte des Ellipsoides unendlich gross, so ist das Trägheitsmoment des ersten Ausschnittes

$$t_{s_1} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_1^2$$

weil für die Grenze $n = \infty$ die Abstände

$$sa = sb = sc = so$$

gleich sind der Projection r_1 des Radiusvector nach dem Oberflächen-Element, welches die Grundfläche der ersten Teilpyramide bildet, auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Für die folgenden Ellipsoidenausschnitte erhält man in Bezug auf dieselbe Achse h_s entsprechende Werte

$$t_{s_2} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_2^2$$

.

.

.

$$t_{sn} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_n^2$$

woraus man durch Addition das Trägheitsmoment T_s des Ellipsoides findet

$$T_s = \frac{3}{5} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)$$

Nun lassen sich die n Quadrate der Projectionen der Radienvectoren des Ellipsoides so anordnen, dass jedesmal die Projectionen von drei conjugirten Halbachsen zusammenstehen, und da die Quadratensumme der Projectionen von drei conjugirten Halbachsen nach Salmon-Fiedler 3. Auflage 1879 Art. 99, auf eine beliebige Ebene constant *) ist, so hat man

---

*) Für das Ellipsoid ist ein ganz elementarer Beweis wol kaum zu erbringen. Hier möge der Satz für die Kugel bewiesen werden. Es stehen bei der Kugel die conjugirten Halbachsen (Radien) senkrecht zu einander. Bildet die Momentenachse h_s mit einem beliebigen System conjugirter Radien die Winkel $\alpha\beta\gamma$, so ist

$$\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = r^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 3r^2 - r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \tfrac{1}{5}n(\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)$$

wenn ϱ, σ, τ die Projectionen von drei beliebigen conjugirten Halbachsen des gegebenen Ellipsoides auf eine zu der Momentenachse h_s senkrechte Ebene bezeichnen, und es wird

$$T_s = \tfrac{1}{5}m(\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)$$

Für die Hauptachsen a, b, c des Ellipsoides hat man die Trägheitsmomente

$$T_a = \tfrac{1}{5}m(b^2 + c^2)$$
$$T_b = \tfrac{1}{5}m(c^2 + a^2)$$
$$T_c = \tfrac{1}{5}m(a^2 + b^2)$$

Das Trägheitsmoment für einen Durchmesser der Kugel hat den speciellen Wert

$$T_r = \tfrac{2}{5}mr^2$$

Fällt man um den beliebigen Punkt P der Momentenachse auf die Ebene durch je zwei Radien die Lote PP_1, PP_2, PP_3 so besteht, wenn S der Mittelpunkt der Kugel ist,

$$SP^2 = SP_1^2 + SP_2^2 + SP_3^2$$

woraus folgt

$$\frac{SP_1^2 + SP_2^2 + SP_3^2}{SP^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

so dass

$$\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 2r^2$$

ist und T_s den Wert annimmt

$$T_s = \tfrac{2}{5}mr^2$$

III.

Ueber goniometrische Relationen, die bei der Kreisteilung auftreten.

Von

Prof. Dr. B. **Sporer** in Ehingen (Würtemberg.)

I. Ueber gewisse Functionen.

Durch den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems sei eine „ungerade Anzahl von n Geraden gelegt, die den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile zerlegen.“ Deren Gleichungen mögen sein:

$$\left.\begin{array}{lll} L_1 = x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 = 0 & \text{wo} & \alpha_1 = \alpha \\ L_2 = x\sin\alpha_2 - y\cos\alpha_2 = 0 & & \alpha_2 = \alpha + \frac{2\pi}{n} \\ L_3 = x\sin\alpha_3 - y\cos\alpha_3 = 0 & & \alpha_3 = \alpha + \frac{4\pi}{n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ L_n = x\sin\alpha_n - y\cos\alpha_n = 0 & & \alpha_n = \alpha + \frac{2(n-1)}{n} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes ein, so stellen die sich ergebenden Werte L_1', L_2', L_3' . . . L_n' die Entfernungen dieses Punktes von den Geraden L dar, und zwar haben alle Punkte auf der einen Seite einer dieser Geraden positive Entfernungen und alle auf der andern Seite negative solche Entfernungen, und wir können gewissermassen von einer positiven und einer negativen Seite dieser Geraden reden. Beschreiben wir

um den Ursprung einen Kreis und bezeichnen die verschiedenen Seiten die Geraden L längs dieses Kreises durch die Zeichen $+$ und $-$, so erhalten wir die durch die Figur 1 ersichtliche Anordnung und es tritt also in Bezug auf diese Zeichen längs des Kreises eine gewisse Symmetrie auf, die wir als cyklische Symmetrie bezeichnen wollen.

Es möge nun etwa die Function

$$\left.\begin{aligned} F(L) &= L_1^p + L_2^p + L_3^p + \ldots + L_n^p \\ &= \Sigma L^p = \Sigma(x \sin\alpha - y\cos\alpha)^p \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

gegeben sein. Setzen wir hier den Wert der Function gleich einer Constanten A, so erhalten wir die Gleichung

$$F(L) = A$$

die im allgemeinen eine Curve des $p$ten Grades darstellt, etwa eine Curve C^p. Diese letztere Curve hat aber offenbar die Halbirungslinien der Winkel, die je zwei aufeinanderfolgende Geraden L mit einander bilden, zu Symmetrieachsen. Seien nämlich P_1 und P_2 zwei zu einer dieser Halbirungslinien symmetrische Punkte, so sind die zu diesen Punkten gehörigen Werte $F(L)$ dieselben, indem die Entfernungen dieser Punkte von den Geraden L, abgesehen von einer Vertauschung unter denselben, gleich sind und auch mit den Vorzeichen übereinstimmen. Ist p zudem gerade, so sind auch die Geraden L selbst solche Symmetrieachsen, indem je zwei einer Geraden L symmetrisch gelegene Punkte P_1 und P_3 von den Geraden L ebenfalls entsprechend gleiche Entfernungen haben, die Verschiedenheit einzelner Vorzeichen aber ohne Einfluss ist.

Diese Eigenschaft beschränkt sich aber keineswegs auf das oben gewählte Beispiel einer solchen Function, sondern wir werden vielmehr eine beliebig grosse Menge solcher, in den Werten L homogener Functionen aufstellen können, die alle gleich Constanten gesetzt im allgemeinen Curven darstellen, die n oder $2n$ Symmetrieachsen haben, je nachdem die Function von ungerader oder von gerader Ordnung ist. Eine solche Function, die auf diese Eigenschaften führt, möge kurz eine cyklisch-symmetrische Function der L genannt sein. In Bezug auf den Wert p haben wir weiter verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Fall: p ungerade und $< n$.

Bleiben wir bei dem obigen Beispiel. Die Gleichung

$$F(L) = 0$$

ist dann von ungeradem Grade und muss also notwendig einen reellen Factor $ax+by$ enthalten. Da das durch die Gleichung dargestellte System von Geraden aber n Symmetrieachsen besitzt, liefert die Gerade $ax+by=0$ wenigstens weitere $n-1$ Geraden, die gleichfalls in $F(L)=0$ als Factoren enthalten sein müssten. Dies ist aber nicht möglich, da $F(L)$ nur vom Grade p ist. Hieraus folgt aber, dass die Function $F(L)$ identisch verschwinden muss; oder:

„Jede cyklisch-symmetrische Function von ungerader Ordnung „kleiner als n verschwindet stets identisch.“

II. Fall: $n=p$.

Ist dagegen $n=p$, so wird es möglich sein solche n lineare Factoren zu erhalten, die n Gerade mit n Symmetrieachsen darstellen. Aber auch jetzt noch werden diese Geraden mit den Geraden L oder aber den Symmetrieachsen selbst zusammenfallen müssen, indem für eine andere Annahme einer solchen Geraden, unmittelbar $2n$ solcher Geraden aus den obigen Symmetrien sich ergeben. Kehren wir jetzt zu unserer Figur zurück und nehmen an, die Geraden

$$ax+by=0$$

fallen auf die Symmetrieachsen, so wären diese Geraden aber Asymptoten der Curven $F(L)=A$, und aus ihrer Eigenschaft als Symmetrieachsen würde unmittelbar folgen, dass sie zugleich Rückkehrtangenten für Rückkehrpunkte auf der unendlich fernen Geraden wären. Auf dieser letzteren müssten also n solche Rückkehrpunkte liegen, und das ist unmöglich. Die Geraden

$$ax+by=0$$

müssen also notwendig auf die Geraden L selbst fallen, oder:

„Jede cyklisch-symmetrische Function vom Grade n zerfällt in „das mit einem constanten Factor multiplicirte Product der Ge- „raden L.“

III. Fall: p gerade und $<2n$.

Setzen wir auch hier die Function $F(L)=0$, so muss dieselbe in $p/_2$ Factoren $ax^2+bxy+cy^2$ fallen. Aus den $2n$ Symmetrien folgt aber, dass diese Factoren mindestens in die Zahl n auftreten müssten, wenn sie nicht die Form x^2+y^2 haben. Da das erstere nicht sein kann ist nur das zweite möglich, aber dann ist die Gleichung

$$F(L) = a(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}$$

gültig und wir erhalten:

„Für gerade $p < 2n$ ist jede cyklisch-symmetrische Function „der Ordnung p gleich einer mit einer Constanten multiplicirten „Potenz von x^2+y^2, und dieselbe gleich einer Constanten gesetzt „stellt p_2 concentrische Kreise dar."

IV Fall: p ungerade und $> n$ oder p gerade und $\geqq 2n$.

Ganz gleicherweise finden wir für ungerade $p > n$, dass die gleich null gesetzte Function, wenn $p < 2n$ ist, in die Geraden L und eine Potenz von x^2+y^2 zerfällt. In allen andern Fällen aber wird $F(L) = 0$ nur aus den Factoren L, aus Gruppen von 2n Factoren $ax+by$ und aus Factoren x^2+y^2 bestehen können. Wir werden uns jedoch auf die drei ersten Fälle beschränken.

Ist n gerade, so fallen je zwei Geraden L aufeinander, für ungerade p tritt keine Symmetrie auf, aber wir werden doch auch hier von $F(L)$ behaupten können, dass es oft verschwindet, indem die Glieder sich dann paarweise aufheben. Ist dagegen p gerade, so ist die Zahl der Symmetrieachsen gleich n und wir erhalten für die Gültigkeit des Satzes in Fall III. die Bedingung $p < u$.

II. Goniometrische Gleichungen.

1) Möge das Zeichen $\equiv$ identisch gleich null bedeuten. Aus dem Satze im ersten Fall in I. folgt aber für $p = 2q+1$ unmittelbar die Gleichung

$$\Sigma(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{2q+1} \equiv 0, \quad \text{für} \quad 2q+1 < n \tag{3}$$

Geben wir hier q nach einander die Werte 0, 1, 2, 3 . . . und setzen die Coefficienten gleich null, so erhalten wir aber:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\sin\alpha &= \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\ldots+\sin\alpha_n = 0\\
\Sigma\sin^3\alpha &= \sin^3\alpha_1+\sin^3\alpha_2+\sin^3\alpha_3+\ldots+\sin^3\alpha_n = 0\\
\Sigma\sin^5\alpha &= \sin^5\alpha_1+\sin^5\alpha_2+\sin^5\alpha_3+\ldots+\sin^5\alpha_n = 0\\
\Sigma\sin^7\alpha &= \sin^7\alpha_1+\sin^7\alpha_2+\sin^7\alpha_3+\ldots+\sin^7\alpha_n = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

u. s. w. für Exponenten $<$ n. Ebenso ist

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\cos\alpha = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n = 0\\ \Sigma\cos^3\alpha = \cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n = 0\\ \Sigma\cos^5\alpha = \cos^5\alpha_1 + \cos^5\alpha_3 + \ldots + \cos^5\alpha_n = 0\end{array}\right\} \quad (5)$$

u. s. w. für Exponenten $< n$.

Ausser diesen Relationen erhalten wir aus der Gleichung z. B. noch:

$$\Sigma\sin\alpha^r\cos\alpha^s = \cos^r\alpha_1\sin^s\alpha_1 + \cos^r\alpha_2\sin^s\alpha_2 + \ldots + \cos^r\alpha_n\sin^s\alpha_n = 0$$

wo $$r + s = 2q + 1$$

also eine ungerade Zahl $< n$ ist. Ueberhaupt können wir aus dem in Fall I. Bemerkten schliessen, dass jeder solche cyklisch-symmetrische Ausdruck, der in den Werten $\cos\alpha$ vom Grade r und in den Werten $\sin\alpha$ vom Grade s ist, gleich null wird, wenn $r+s$ ungerade und $< n$ ist.

2) Ist p gerade $= 2q$ und $< 2n$, so sehen wir, dass z. B. die Gleichung

$$\Sigma(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{2q} \equiv a(x^2 + y^2)^q$$

gültig ist, wobei a eine bestimmte Constante ist. Entwickeln wir beiderseits nach dem binomischen Satze, so erhalten wir

$$x^{2q}\Sigma\sin^{2q}\alpha - \binom{2q}{1}x^{2q-1}\Sigma\sin^{2q-1}\alpha\,.\,\cos\alpha + \binom{2q}{2}\Sigma\sin^{2q-2}\alpha\,.\,\cos^2\alpha$$
$$- \ldots \equiv a\left(x^{2q} + \binom{q}{1}x^{2q-2}y^2 + \binom{q}{2}x^{2q-4}y^4 + \ldots\right)$$

und hieraus durch Gleichsetzung der Coefficienten rechts und links:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\sin^{2q}\alpha = a\\ \Sigma\sin^{2q-1}\alpha\,.\,\cos\alpha = 0\\ \Sigma\sin^{2q-2}\alpha\,.\,\cos^2\alpha = \dfrac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{2}}\,.\,a\\ \Sigma\sin^{2q-3}\alpha\,.\,\cos^3\alpha = 0\\ \Sigma\sin^{2q-4}\alpha\,.\,\cos^4\alpha = \dfrac{\binom{q}{2}}{\binom{2q}{4}}\,.\,a \quad \text{u. s. w.}\end{array}\right\} \quad (6)$$

Nun ist aber auch

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^q = n$$

oder entwickelt:

$$\Sigma \sin^{2q}\alpha + \binom{q}{1} \Sigma \sin^{2q-2}\alpha \,.\, \cos^2\alpha + \binom{q}{2} \Sigma \sin^{2q-4}\alpha \,.\, \cos^4\alpha + \ldots = n$$

Setzen wir aber hierin die in Gl. (6) erhaltenen Werte ein, so finden wir für a den Wert

$$a = \frac{n}{\frac{\binom{q}{0}^2}{\binom{2q}{0}} + \frac{\binom{q}{1}^2}{\binom{2q}{2}} + \frac{\binom{q}{2}^2}{\binom{2q}{4}} + \ldots + \frac{\binom{q}{q}^2}{\binom{2q}{2q}}} = n \,.\, \varphi(q)! \tag{7}$$

Nach den Gleichungen (6) ist aber auch

$$\Sigma \sin^{2q-2} \,.\, \cos^2\alpha = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{2}} \,.\, \varphi(q) \,.\, n$$

Setzen wir hierin für $\cos^2\alpha$ aber $1 - \sin^2\alpha$, so erhalten wir

$$\Sigma \sin^{2q-2}\alpha^0 - \Sigma \sin^{2q} = n \,.\, \varphi(q-1) - n \,.\, \varphi(q) = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{1}} \,.\, n \,.\, \varphi(q)$$

und also:

$$\varphi(q) = \frac{2q-1}{2q} \,.\, \varphi(q-1)$$

Es ist aber unmittelbar:

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}$$

also

$$\varphi(2) = \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}, \quad \varphi(3) = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}$$

und allgemein

$$\varphi(q) = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots 2q-1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2q} \tag{8}$$

Geben wir jetzt q nach einander den Wert 1, 2, 3, 4, 5 . . . , so finden wir ferner

$$\left.\sin^2\alpha = \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 + \ldots + \sin^2\alpha_n = \frac{1}{2} \,.\, n\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\sin^4\alpha &= \sin^4\alpha_1+\sin^4\alpha_2+\sin^4\alpha_3+\ldots+\sin^4\alpha_n - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,n\\ \Sigma\sin^6\alpha &= \sin^6\alpha_1+\sin^6\alpha_2+\sin^6\alpha_3+\ldots+\sin^6\alpha_n - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,n\end{aligned}\right\} \quad (9$$

u. s w. Ebenso wird

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\,.\,n, \quad \Sigma\cos^4\alpha = \Sigma\sin^4\alpha = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,n\\ &\Sigma\cos^6\alpha = \Sigma\sin^6\alpha = \frac{1\,.\,2\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,n\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

u. s. w. für Exponenten $< 2n$.

3) Es ist auch

$$\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha = \cos^{n-2}\alpha(1-\cos^2\alpha) = \cos^{n-2}\alpha - \cos^n\alpha$$

$$\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha = \cos^{n-4}\alpha - \binom{2}{1}\cos^{n-2}\alpha + \cos^n\alpha$$

$$\cos^{n-6}\alpha\,.\,\sin^6\alpha = \cos^{n-6}\alpha - \binom{3}{1}\cos^{n-4}\alpha + \binom{3}{2}\cos^{n-2}\alpha - \cos^n\alpha$$

und allgemein

$$\cos\alpha^{n-2q}\,.\,\sin^{2q}\alpha = \cos^{n-2q}\alpha - \binom{q}{1}\,.\,\cos^{n-2q+2}\alpha + \binom{q}{2}\cos^{n-2q+4}\alpha\,. - \ldots + (-1)^q\,.\,\cos^n\alpha$$

Ist n ungerade, und geben wir α nach einander die Werte α_1 α_2, α_3 . . . α_n und addiren, so folgt aus der letzten Gleichung, da alle Werte $\Sigma\cos^{n-2p}$ verschwinden (Gl. 4):

$$\Sigma\cos^{n-2q}\alpha\,.\,\sin^{2q}\alpha = (-1)^q\,.\,\Sigma\cos^n\alpha$$

Ganz ebenso finden wir (11)

$$\Sigma\sin^{n-4q}\alpha\,.\,\cos^{2q}\alpha = (-1)^q\,.\,\Sigma\sin^n\alpha$$

Weiterhin ist aber

$$\cos n\alpha = \cos^n - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha - \ldots$$

Ist auch hier n ungerade und setzen wir wieder für α nacheinander die Werte α_1, α_2 . . . und addiren, so folgt aber, da $\cos n\alpha_1 = \cos n\alpha_2 = \cos n\alpha_3 = \ldots$ ist, mittelst der Gleichungen (11):

$$n\cos n\alpha = \left\{1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots\right\} \Sigma\cos n\alpha$$

oder da der Ausdruck in der Klammer $\frac{1}{2}(1+1)^n = 2^{n-1}$ ist:

$$n \, . \, \cos n\alpha = 2^{n-1} \, . \, \Sigma\cos^n\alpha$$

Oder wir halten

$$\Sigma\cos^n\alpha = \cos^n\alpha_1 + \cos^n\alpha_2 + \ldots + \cos^n\alpha_n = \frac{n \, . \, \cos n\alpha}{2^{n-1}}$$

und ebenso:

$$\Sigma\sin^n\alpha = \sin^n\alpha_1 + \sin^n\alpha_2 + \ldots + \sin^n\alpha_n = \frac{n \, . \, \sin n\alpha}{2^{n-1}} \, . \, (-1)^{\frac{n-1}{2}} \qquad (12)$$

Kehren wir jetzt zu der Gleichung

$$\Sigma L^n = \Sigma(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^n = k$$

zurück, wo k eine Constante ist, und entwickeln, so erhalten wir aber

$$x^n \Sigma\sin^n\alpha - \binom{n}{1} x^{n-1} y \, \Sigma\sin^{n-1}\alpha \, . \, \cos\alpha + \binom{n}{2} x^{n-2} \, . \, y^2 \Sigma\sin^{n-2}\alpha \, . \, \cos^2\alpha - \ldots = k$$

und hieraus durch Benutzung der Gleichungen (11) und (12):

$$\Sigma(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^n \equiv \left\{x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} \, . \, y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4} \, . \, y^4 - \ldots\right\} \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \, . \, n(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$- \left\{y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} \, . \, x^2 + \binom{n}{4} \, . \, y^{n-5} \, . \, x^4 - \ldots\right\} \, . \, \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}} \, . \, n = k \qquad (13)$$

Nach dem Fall III. in I. fanden wir aber, dass ΣL^n in das mit einer Constanten ε multiplicirte Product ΠL der Geraden L zerfallen muss, und wir haben also:

$$\Sigma L^n \equiv \varepsilon \, . \, \Pi L \qquad (14)$$

Hieraus folgt aber zur Bestimmung der Constanten ε, wenn wir auch die Producte aus den Werten $\sin\alpha$ resp. $\cos\alpha$ mit $\Pi\sin\alpha$ und $\Pi\cos$ bezeichnen:

$$\Sigma \sin^n \alpha = \varepsilon \,.\, \Pi \sin \alpha \quad \text{und} \quad \Sigma \cos^n \alpha = \varepsilon \,.\, \Sigma \cos \alpha$$

Aus Gl. (13) erhalten wir nun weiter

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \,.\, \Pi \sin \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{n \,.\, \sin n\alpha}{2^{n-1}} \\ \varepsilon \,.\, \Pi \cos \alpha &= \frac{n \,.\, \cos n\alpha}{2^{n-1}} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Nun ist aber auch

$$\varepsilon \,.\, \Pi \sin 2\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{n \,.\, \sin 2a\alpha}{2^{n-1}} \qquad (16)$$

indem die Werte 2α gleichfalls eine Reihe von a Winkeln bilden, welche sich mit den einer Reihe

$$\beta, \quad \beta + \frac{2\pi}{n}, \quad \beta + \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots \beta + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

decken, wenn wir für Winkel $> 2\pi$ den um 2π verkleinerten setzen

Durch Multiplication der Gleichungen (15) erhalten wir ferner

$$2^n \,.\, \varepsilon^2 \,.\, \Pi \sin \alpha \,.\, \Pi \cos \alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{n^2 \,.\, \sin 2n\alpha}{2^{n-1}} \qquad (17$$

$\varepsilon = n$, also mittelst Gl. (16):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma L^n &\equiv n \Pi L \\ \Pi \sin \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \\ \Pi \cos \alpha &= + \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}} \\ \Pi \operatorname{tang} \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \operatorname{tang} n\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Ausserdem erhalten wir noch die interessanten Relationen:

$$\left.\begin{aligned} 1 \quad \Sigma \sin^n \alpha - n \,.\, \Pi \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma \cos^n \alpha - n \,.\, \Pi \cos \alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

So ist z. B. für $n = 3$:

$$\left.\begin{aligned}&\sin^3\alpha+\sin^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^3\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-3\sin\alpha\,.\,\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\\&\qquad\qquad .\,\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0\\&\cos^3\alpha+\cos^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-3\cos\alpha\,.\,\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\\&\qquad\qquad .\,\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Die Gleichung $\Sigma L^n \equiv n\,\Pi L$ können wir aber auch schreiben:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{x^n-\binom{a}{2}x^{n-2}\,.\,y^2+\binom{n}{4}x^{n-4}\,.\,y^4-\,.\,.\,.\right\}\frac{n\,.\,\sin n\alpha}{2^{n-1}}$$

$$-\left\{y^n-\binom{n}{2}y^{n-2}\,.\,x^2+\binom{n}{4}y^{n-5}\,.\,x^4-\,.\,.\,.\right\}\frac{n\,.\,\cos n\alpha}{2^{n=1}}\equiv$$

$$n\,.\,\Pi\sin\alpha(x-y\cot\alpha)\equiv n\,.\,\Pi\cos\alpha(x\tan\alpha-x)]$$

$$\equiv\frac{(-1)^{n-1}n\,.\,\sin n\alpha}{2^{n-1}}(x^n-G_1x^{n-1}\,.\,y+G_2x^{n-2}\,.\,y^2-G_3\,.\,x^{n-3}\,.\,y^3+\,.\,.\,.)$$

$$\equiv-\frac{n\,.\,\cos n\alpha}{2^{n-1}}(y^n-H_1xy^{n-1}+H_2x_2y^{n-2}-H_3x_3y^{n-3}+\,.\,.\,.)$$

wobei G_1, G_2, G_3 . . . die Summen der Combinationen der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Classe der Werte $\cot\alpha$ und ebenso H_1, H_2, H_3 die der Werte $\tan\alpha$ sind. Durch Gleichsetzung der Coefficienten rechts und links erhalten wir aber daraus:

$$\left.\begin{aligned}&G_1=+\binom{n}{1}\cot n\alpha \quad\text{und}\quad H_1=\pm\binom{n}{1}\tan n\alpha\\&G_2=-\binom{n}{2}\qquad\qquad H_2=\mp\binom{n}{2}\\&G_3=-\binom{n}{3}\cot n\alpha\qquad H_3=\mp\binom{n}{3}\tan n\alpha\\&G_4=+\binom{n}{4}\qquad\qquad H_4=\pm\binom{n}{4}\\&G_5=+\binom{n}{5}\cot n\alpha\ \text{u.s.w.}\ H_5=\pm\binom{n}{5}\tan n\alpha\ \text{u. s. w.}\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

4) Die so gefundenen Gleichungen gestatten es uns wieder eine Menge neuer aufzustellen. Auf solche führen uns z. B. die Beziehungen zwischen den Coefficienten einer Gleichung und den

Potenzsummen der Wurzeln der Gleichungen. Bezeichnen wir so die Summen der Combinationen der ersten Classe der Werte $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ mit C_p, so erhalten wir aus den Gleichungen (4) und (9):

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 = 0, & C_2 = -\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot n(\\ C_3 = 0, & C_4 = -\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot n(n-3) \\ C_5 = 0, & C_7 = -\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^6}\cdot n(n-4)(n-5) \\ C_7 = 0, & C_8 = +\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^8}\cdot n(n-5)(n-6)(n-7) \\ C_9 = 0, & C_{10} = -\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) \end{array}\right\} \quad (21)$$

u. s. w. oder auch umgekehrt geordnet:

$$\left.\begin{array}{l} C_{n-2} = \pm\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n \\ C_{n-3} = \mp\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n\,.\,(n^2-1) \\ C_{n-5} = \pm\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n\,.\,(n^2-1)(n^2-9) \\ C_{n-7} = \mp\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n\,.\,(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25) \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad (22)$$

Ebenso erhalten wir, wenn wir die Summen der Combinationen aus den Werten $\sin^2\alpha$ oder $\cos^2\alpha$ der einzelnen Classen durch D_1, D_2, . . . bezeichnen:

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot n \\ D_2 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot n)(2n-3) \\ D_3 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot n(2n-4)(2n-5) \end{array}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} D_4 &= \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot n(2n-5)(2n-6)(2n-7) \\ D_5 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^9} \cdot n(2n-6)(2n-7)(2n-8)(2n-9) \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Insbesondere ist

$$D_{n-1} = \frac{n^2}{2^{2n-2}} \quad (24)$$

5) Bezeichnen wir ebenso die Summen der Combinationen der einzelnen Classen aus den Werten $\frac{1}{\sin\alpha}$ und $\frac{1}{\cos\alpha}$ mit E_1, E_2, E_3 . . . resp. F_1, F_2, F_3 . . . , so erhalten wir weiter:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \pm \frac{C_{n-1}}{\Pi \sin\alpha} = \frac{n}{\sin n\alpha} \quad \text{und} \quad F_1 = \pm \frac{n}{\cos n\alpha} \\ E_2 &= \frac{C_{n-2}}{\Pi \sin\alpha} = 0 \qquad F_2 = 0 \\ E_3 &= \frac{C_{n-q}}{\Pi \sin\alpha} = -\frac{n}{3!} \frac{n^3-1}{\sin n\alpha} \qquad F_3 = \pm \frac{n}{3!} \cdot \frac{n^2-1}{\cos n\alpha} \\ E_4 &= \frac{C_{n-4}}{\Pi \sin\alpha} = 0 \qquad F_4 = 0 \\ E_5 &= \frac{C_{n-5}}{\Pi \sin\alpha} = \frac{n}{5!} \cdot \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{\sin n\alpha} \quad \text{und} \\ & \qquad F_5 = \pm \frac{n}{5!} \cdot \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{\cos n\alpha} \\ E_6 &= \frac{C_{n-6}}{\Pi \sin\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad F_6 = 0 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

6) Die Gleichungen (20) ermöglichen uns es auch Formeln für die Summen der Potenzen der Tangenten und Cotangenten der Winkel α aufzustellen. Durch die oben erwähnten Newton'schen Beziehungen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \Sigma \operatorname{tang}\alpha = \binom{n}{1} \operatorname{tang} n\alpha = \pm n \,.\, \operatorname{tang} n\alpha \quad \text{(Euler)} \\ J_2 &= \Sigma \operatorname{tang}^2\alpha = \binom{n}{2}^2 \operatorname{tang}^2 n\alpha + 2\binom{n}{2} = u^2 \operatorname{tang}^2 n\alpha \\ & \qquad + n(n-1) \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned}J_3 &= \Sigma\,\mathrm{tang}^3\alpha = \pm\binom{n}{1}^3\mathrm{tang}^3 n\alpha \pm 3\binom{n}{1}\binom{n}{2}\mathrm{tang}\,n\alpha \\ &\qquad + 3\binom{n}{3}\mathrm{tang}\,n\alpha \\ &= \pm n^3\,\mathrm{tang}^3 n\alpha \pm n(n^2-1)\,\mathrm{tang}\,n\alpha \\ J_4 &= \Sigma\,\mathrm{tang}^4\alpha = \binom{n}{1}^4\mathrm{tang}^4 n\alpha + 4\binom{n}{1}^2\binom{n}{2}\mathrm{tang}^2\alpha \\ &\qquad - 4\binom{n}{1}\binom{n}{3}\mathrm{tang}^2 n\alpha + {}^2\binom{n}{2}^2 - 4\binom{n}{4} \\ &= n^4\,\mathrm{tang}^4 n\alpha + \tfrac{4}{3}n^2(n^2-1)\,\mathrm{tang}^2 n\alpha \\ &\qquad + \tfrac{1}{3}n(n-1)(n^3+n-3)\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

und so weiter. Ebenso:

$$\left.\begin{aligned}K &= \Sigma\cot\alpha = +\,n\cot n\alpha \quad \text{(Euler)} \\ K_2 &= \Sigma\cot^2\alpha = n^2\cot^2 n\alpha + n(n-1) \\ K_3 &= \Sigma\cot^3\alpha = n^3\cot^3 n\alpha + n(n^2-1)\cot n\alpha \\ K_4 &= \Sigma\cot^4\alpha = \cot^4 n\alpha + \tfrac{4}{3}n^2(n^2-1)\cot^2 n\alpha + \tfrac{1}{3}n(n-1) \\ &\qquad .\,(n^2+n-3) \\ &\text{u. s. f.}\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

7) Desgleichen finden wir mittelst der Gleichungen (25) die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}M_1 &= \Sigma\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{n}{\sin n\alpha} \quad \text{(Euler)} \\ M_2 &= \Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{n^2}{\sin^2 n\alpha} \\ M_3 &= \Sigma\frac{1}{\sin^3\alpha} = \frac{n^3}{\sin^3 n\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{n(n^2-1)}{\sin n\alpha} \\ M_4 &= \Sigma\frac{1}{\sin^4\alpha} = \frac{n^4}{\sin^4 n\alpha} - \frac{2}{3}\,\frac{n^2(n^2-1)}{\sin^2 n\alpha} \\ M_5 &= \Sigma\frac{n^5}{\sin^5 n\alpha} - \frac{5}{6}\,\frac{n^3(n^3-1)}{\sin^3 n\alpha} + \frac{1}{24}\,\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{\sin n\alpha} \\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Und dann

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= \Sigma \frac{1}{\cos\alpha} = \pm \frac{n}{\cos n\alpha} \quad \text{(Euler)} \\
N_2 &= \Sigma \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{n^2}{\cos^2 n\alpha} \\
N_3 &= \Sigma \frac{1}{\cos^3\alpha} = \pm \frac{n^3}{\cos^3 n\alpha} \mp \frac{n}{2} \frac{(n^2-1)}{\cos n\alpha} \\
N_4 &= \Sigma \frac{1}{\cos^4\alpha} = \frac{n^4}{\cos^4 n\alpha} - \frac{2}{3} \frac{n^2(n^2-1)}{\cos^2 n\alpha} \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Die in den Gleichungen (20), (22), (25), (26) und (29) enthaltenen doppelten Vorzeichen beziehen sich auf die Fälle, in denen $\mu = 4p+1$ oder $= 4p-1$ ist.

8) Zum Schlusse wollen wir hier noch die Werte ableiten, die wir für die Summen des Producte von je zwei aufeinander folgenden Werten $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ aufstellen.

Wir haben:

$$\sin\alpha_p \,.\, \sin\alpha_{p+1} = \sin\alpha_p \left(\sin\alpha_p \,.\, \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} \,.\, \cos\alpha_p\right)$$

also:

$$\Sigma \sin\alpha_p \,.\, \sin\alpha_{p+1} = \Sigma \sin^2\alpha_p \,.\, \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} \,.\, \Sigma \sin\alpha_p \,.\, \cos\alpha_p$$

Nun finden wir aber aus unserem allgemeinen Satze, dass

$$\Sigma \sin\alpha_p \cos\alpha_p = 0$$

und

$$\Sigma \sin^2\alpha_p = \frac{n}{2}$$

ist, und erhalten also:

$$P = \Sigma \sin\alpha_p \,.\, \sin\alpha_{p+1} = \frac{n}{2} \,.\, \cos\frac{2\pi}{n}$$

und ebenso

$$Q = \Sigma \cos\alpha_p \,.\, \cos\alpha_{p+1} = \frac{n}{2} \,.\, \cos\frac{2\pi}{n} \quad (30)$$

III. Goniometrische Relationen für gerade n.

1) Wir haben bisher immer n als ungerade vorausgesetzt. Ist n gerade, so gelten eine Reihe der entwickelten Relationen entweder überhaupt nicht oder nicht mehr bis zu denselben Grenzen $n-1$ resp. $2n-2$, jenachdem die Functionen von ungerader oder gerader

Ordnung sind. Die Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ resp. ihre Verbindungen treten zudem jetzt paarweise auf, und es sind für Functionen ungerader Ordnung diese Paare von entgegengesetzten Vorzeichen, und wir werden aber, wie bereits oben in einem besondern Falle bemerkt wurde, die Gleichungen als gültig ansehen dürfen. Ist der Grad der Function gerade, so werden wir um Constanten zu erhalten diesen nicht grösser als $n-2$ annehmen dürfen, da die Zahl der Symmetrien in diesem Falle nur gleich n ist. Es bietet auch keine Schwierigkeit in jedem besondern Falle diese Fragen zu erledigen. Anders ist es aber, wenn der Grad der Function der Werte $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ gleich n ist.

2) Wir fanden z. B. für $n=7$:

$$\Pi\sin\alpha = \sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\,.\,.\, \sin\alpha_7 = -\frac{\sin 7\alpha}{2^6}$$

Ist $n=14$, so zerlegen wir die 14 Werte $\sin\alpha$ in zwei Gruppen und erhalten

$$\Pi\sin\alpha' = \sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_5 \,.\,.\,.\, \sin\alpha_{13} = -\frac{\sin 7\alpha_1}{2^6}$$

und

$$\Pi\sin\alpha'' = \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_4 \,.\, \sin\alpha_6 \,.\,.\,.\, \sin\alpha_{14} = -\frac{\sin 7\alpha_2}{2^6} + \frac{\sin 7\alpha_1}{2^6}$$

Hieraus folgt aber:

$$\Pi\sin\alpha = -\frac{\sin^2 7\alpha}{2^{12}}$$

und dann:

$$\Pi\cos\alpha = -\frac{\cos^2 7\alpha}{2^{12}}$$

und es ist leicht die Frage für den Fall, dass n nur durch den geraden Factor 2 teilbar ist, also die Form $4p+2$ hat, das Resultat zu geben.

Ist n durch 4 teilbar, so gehen wir von der Zahl 4 selbst aus. Es ist dann leicht zu zeigen, dass

$$\Pi\sin\alpha = \sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_4 = \tfrac{1}{4} \,.\, \sin^2 2\alpha$$

Hieraus erhalten wir durch Zerlegung in drei Teile z. B. für $n=12$ die Relation:

$$\Pi\sin\alpha = \frac{1}{64} \,.\, \sin^2 2\alpha_1 \,.\, \sin^2 2\alpha_2 \cdot \sin^2 2\alpha_3 = \frac{1}{2^{10}} \,.\, \sin^2 6\alpha$$

Ist n durch 8 teilbar, so führt eine analoge Rechnung zum Ziel, es ist dann für $n = 8$ selbst:

$$\Pi \sin\alpha = \frac{1}{2^6} \cdot \sin^2 3\alpha \quad \text{u. s. f.}$$

Analoge Betrachtungen führen bei den andern Gleichungen auf entsprechende Relationen.

Anwendungen.

IV. Aufstellung weiterer goniometrischer Gleichungen.

1) Die bisher gegebenen Entwicklungen gestatten uns ausser den bereits gegebenen noch eine Menge anderer goniometrischer Relationen anzugeben. Um solche zu erhalten, können wir wie folgt verfahren. Wie wir sahen, stellt eine cyklisch symmetrische Function der Geraden L von gerader Ordnung $< 2n$ immer eine mit einer Constanten multiplicirte Potenz von x^2+y^2 dar und verschwindet für ungerade Ordnungen $< n$ identisch. Um diese Constante zu erhalten, genügt es jeweils einen einzigen Coefficienten in der Function $F(L)$ zu bestimmen. Ist dieser bekannt, so resultiren dann von selbst für die andern Coefficienten solche goniometrische Gleichungen. So erhalten wir z. B. für die Summe der Combinationen der L die identisehen Gleichungen:

$$C^2(L) = -\frac{1}{2^2} \cdot n(x^2 + y^2)$$

$$C^3(L) = +0$$

$$C^4(L) = +\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot n(n-3)(x^2 + y^2)^2$$

$$C^5(L) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso erhalten wir für die Summen der Combinationen aus den Werten L^2 die Relationen

$$C^2(L_2^2) \equiv \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot n(2n-3)(x^2 + y^2)^2$$

$$C^3(L^2) \equiv \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot n(2n-4)(2n-5)(x^2 + y^2)^3$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3n}}-\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{3n}}-\frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3n}}+\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{3n}}+\dots\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\cos\frac{2n-1}{6n}\pi}=2n\\
&\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3n}}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{3u}}+\frac{1}{\cos^2\frac{4\pi}{3n}}+\frac{1}{\cos^2\frac{5\pi}{3n}}+\dots\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\cos^2\frac{3n-1}{6n}\pi}=4n^2\\
&\frac{1}{\cos^3\frac{\pi}{3n}}-\frac{1}{\cos^3\frac{2\pi}{3n}}-\frac{1}{\cos^3\frac{4\pi}{3n}}+\frac{1}{\cos^3\frac{5\pi}{3n}}+\dots\\
&\qquad\qquad\pm\frac{1}{\cos^3\frac{3n-1}{6n}\pi}=7n^3+n
\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

u. s. f.

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tang}\frac{\pi}{3n}-\operatorname{tang}\frac{2\pi}{3n}+\operatorname{tang}\frac{4\pi}{3n}-\operatorname{tang}\frac{5\pi}{3n}+\dots\\
&\qquad\qquad\pm\operatorname{tang}\frac{3n-1}{6n}\pi=n\sqrt{3}\\
&\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{3n}+\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{3n}+\operatorname{tang}^2\frac{4\pi}{3n}+\operatorname{tang}^2\frac{5\pi}{3n}+\dots\\
&\qquad\qquad+\operatorname{tang}^2\frac{3n-1}{6n}\pi=4n^2-n\\
&\operatorname{tang}^3\frac{\pi}{3n}-\operatorname{tang}^3\frac{3\pi}{3n}+\operatorname{tang}^3\frac{4\pi}{3n}-\operatorname{tang}^3\frac{5\pi}{3n}+\dots\\
&\qquad\qquad\pm\operatorname{tang}^3\frac{3n-1}{6n}\pi=(4n^3-n)\sqrt{3}
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

etc.

$$\left.\begin{aligned}
&\cot\frac{\pi}{3n}-\cot\frac{2\pi}{3n}+\cot\frac{4\pi}{3n}-\cot\frac{5\pi}{3n}+\dots\\
&\qquad\qquad\pm\cot\frac{3n-1}{6n}\pi=\frac{n}{\sqrt{3}}
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cot^2\frac{\pi}{3n}+\cot^2\frac{2\pi}{3n}+\cos^2\frac{4\pi}{3n}+\cot^2\frac{5\pi}{3n}+\ldots\\
&\qquad+\cot^2\frac{3u-1}{6n}\pi=\frac{4n^2}{5}-n\\
&\cot^3\frac{\pi}{3n}-\cot^3\frac{2\pi}{3n}+\cot^3\frac{4\pi}{3n}-\cot^3\frac{5\pi}{3n}+\ldots\\
&\qquad\pm\cot^3\frac{3u-1}{6n}\pi=\left(-n\right)\sqrt{3}\\
&\qquad\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

Eine Schwierigkeit bei Aufstellung dieser Relationen tritt nur dann ein, wenn je eines der Glieder rechts und links die Form ∞ annimmt. Dies ist z. B. der Fall für $\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}$, wenn $\alpha_1=1$ ist. Wir erhalten dann aber

$$\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha_1}=\frac{n^2}{\sin^2 n\alpha_1}-\frac{1}{\sin^2\alpha_1{}^2}$$

Ersetzen wir hier α und $n\alpha$ durch die Werte $\alpha-\frac{\nu^3}{3!}$ und $n\alpha-\frac{n^3\alpha^3}{3!}$, so erhalten wir ohne Schwierigkeit

$$\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha_1}=\frac{n^2-1}{3}$$

Da in $\Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha}$ mit Ausnahme der ausgeschiedenen Glieder aber alle andern paarweise gleich sind, so folgt daraus wieder:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}=\frac{n^2-1}{6}$$

(Euler) (40)

Ganz ebenso finden wir noch z. B.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^4\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^4\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\sin^4\frac{n-1}{2n}\pi}\\
&\qquad=\frac{n^4+10n^2-11}{90}
\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{n-1}{2n}\pi}\\
&\qquad=\frac{n^2-3n+2}{6}\\
&\frac{1}{\operatorname{tang}^4\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\operatorname{tang}^4\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\operatorname{tang}^4\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{tang}^4\frac{n-1}{2n}\pi}\\
&\qquad=\frac{n^4-20n^2+45n-26}{90}
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Die Bestimmung der Werte, die zu den Exponenten, 6, 8, 10 u. s. w. gehören führt auf mehr umständliche als schwierige Rechnungen.

Ist n gerade, so erhalten wir ganz ebenso:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n-1}{2n}}=\frac{n^2-1}{6}$$

(Euler)

4) Wie wir weiterhin sehen ist:

$$\Pi\sin\alpha=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \quad \text{und} \quad \Pi\cos\alpha=\frac{\cos n\nu}{2^{n-1}}$$

Geben wir auch hier α verschiedene Werte, so resultiren entsprechende Werte. Ist $\alpha=0$, so wird, da $\frac{\sin n\alpha_1}{\sin\alpha_1}=n$ ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{n}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{n}\;\ldots\;\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}\\
&\qquad\text{(Euler)}\\
&\cos^2\frac{\pi}{n}\cdot\cos^2\frac{2\pi}{n}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{n}\;\ldots\;\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi=\frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Ist $\alpha=\frac{\pi}{3}$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}+\ldots\\
&\qquad\ldots\sin\frac{3n-1}{6n}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2^n}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos^0\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{3}+\ldots\\ \qquad\ldots\cos\frac{3n-1}{6n}\pi=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{2^n}\\ \qquad\text{u. s. f.}\end{array}\right\}\qquad(43)$$

V. Summirung reciproker Potenzreihen.

Durch die Gleichungen (27) und (28) ist es uns möglich gemacht, eine Menge von Summenformeln für Reihen aufzustellen, deren Glieder reciproke Potenzen ganzer Zahlen sind. Gehen wir etwa von der Reihe

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}-\frac{4}{\sin\frac{4\pi}{u}}-\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{n}}++\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{n}}+\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{1}{\sin\frac{3n-1}{6n}}=\frac{2n}{\sqrt{3}}$$

aus, so erhalten wir aus dieser

$$\frac{\frac{\pi}{3n}}{\sin\frac{\pi}{3n}}+\frac{\frac{2\pi}{3n}}{\sin\frac{2\pi}{3n}}-\frac{\frac{\pi}{3n}}{\sin\frac{4\pi}{3n}}-\ldots\pm\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{3n-1}{6n}\pi}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Lassen wir jetzt n in's Unendliche wachsen, so dürfen wir an Stelle der Sinusse die Winkel setzen und erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\ldots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ \text{(Euler)}\\ \text{und ebenso:}\\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots=\frac{4\pi^2}{27}\\ \qquad\text{(Euler)}\\ \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{10^3}-\ldots=\frac{5\pi^3}{87\sqrt{3}}\end{array}\right\}\qquad(44)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{7}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\ldots=\frac{8\pi^4}{729} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{4^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{10^5}-\ldots=\frac{17\pi^4}{2906\sqrt{3}} \\ \qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\} \quad (44)$$

Ganz ebenso können wir von den Reihen für $\Sigma \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha^p}$ ausgehen und erhalten dann für die ungeraden Exponenten die weiteren Reihen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{19^3}-\ldots=\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(Euler)} \\ \qquad\qquad\text{u. s. f.}\end{array}\right\} \quad (45)$$

Weiter erhalten wir z. B. noch für $\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{array}{l}1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4} \text{ (Leibnitz)} \\ 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{3} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\ldots=\frac{\pi^3}{32} \text{ (Euler)} \\ \frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\ldots= \\ \frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96} \text{ (Euler)} \\ \qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\} \quad (46)$$

Desgleichen erhalten wir solche Reihen, wenn wir für α die Werte $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{8}$ etc. setzen. Dieses Verfahren versagt

aber für den Wert $\alpha = 0$. In diesem Falle müssen wir die bereits oben gefundenen Grenzwerte benutzen oder aber können wir die sich ergebenden Reihen von der Form

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \cdots$$

etwa aus den Reihen

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \cdots$$

bestimmen. So folgt z. B. für

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

aus der Reihe:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{4\pi^2}{27}$$

$$\frac{4}{27}\pi^2 + \frac{1}{9}S = S, \quad S = \frac{\pi^2}{6}$$

VI. Reihen in denen Binomialcoefficienten auftreten.

1) Wir sind bereits oben auf die merkwürdige Relation gestossen:

$$\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{C}} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{3}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \cdots + \frac{\binom{p}{p}^2}{\binom{2p}{2p}} = \frac{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, . \, . \, 2p}{1 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, (2p-1)}$$

Ausser dieser lassen sich aber noch eine Menge anderer solcher Beziehungen zwischen Binomialcoefficienten durch die oben gegebenen goniometrischen Formeln ableiten. Um die obige Relation zu erhalten, gingen wir von der Gleichung

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^p = n$$

aus. Gehen wir ebenso von der Gleichung

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^p \, . \, \sin^{2q}\alpha = \Sigma\sin^{2q}\alpha = \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, . \, . \, 2q-1}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, . \, . \, 1g} \, . \, n$$

aus, so finden wir, da wir n jedenfalls grösser als $2p + 2q$ wählen können, aus der entwickelten Gleichung

$$\Sigma \sin^{2p+2q} + \binom{p}{1} \Sigma \sin^{2p+2q-2} \,.\, \cos^2\alpha + \binom{p}{2} \Sigma \sin^{6p+2q-4}\alpha \,.\, \cos\alpha^4 + \ldots$$

$$= \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\,.\,.\, 2q-1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\,.\,.\, 2p} \,.\, u$$

durch Einsetzen der aus den Gl. (16) und den folgenden sich ergebenden Werten:

$$\Sigma \sin^{2p+2q} = \frac{\binom{p+q}{0}}{\binom{2p+2q}{0}} \,.\, \varphi(p+q)$$

$$\Sigma \sin^{2p+q-2}\alpha \,.\, \cos^2\alpha = \frac{\binom{p+q}{1}}{\binom{2p+2d}{2}} \,.\, \varphi(p+q)$$

$$\Sigma \sin^{2p+5q-4}\alpha \,.\, \cos^4\alpha = \frac{\binom{p+d}{2}}{\binom{2p+2q}{4}} \,.\, \varphi(p+q) \quad \text{etc.}$$

$$\varphi(p+q) = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\,.\,.\, (2p+2q-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\,.\,.\, (2p+2q)}:$$

$$\frac{\binom{p}{0}\binom{p+q}{0}}{\binom{2p+2q}{0}} + \frac{\binom{p}{1}\binom{p+q}{1}}{\binom{2p+2q}{2}} + \frac{\binom{p}{2}\binom{p+q}{2}}{\binom{2p+2q}{4}} + \ldots$$

$$= \frac{(2q+2)(2q+4) \,.\,.\,.\, (2q+2p)}{(2q+1)(2q+3) \,.\,.\,.\, (2q+2p-1)} \tag{47}$$

Wird insbesondere $p = q$ genommen, so ist

$$\frac{\binom{p}{0}\binom{2p}{0}}{\binom{4p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}\binom{2p}{1}}{\binom{4p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}\binom{2p}{2}}{\binom{4p}{4}} + \ldots$$

$$= \frac{(2p+2)(2p+4) \,.\,.\,.\, (4p)}{(2p+1)(2p+3) \,.\,.\,.\, (4p-1)} \tag{48}$$

2) Wählen wir dagegen die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

so haben wir

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^p$$

oder

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma \cos^{2p}\alpha - \binom{p}{1}\Sigma \cos^{2p-2}\alpha \,.\, \sin^2\alpha + \binom{p}{2}\Sigma \cos^{2p-4}\alpha \,.\, \sin^4\alpha - \ldots$$

Ist hier p ungerade, so ergiebt sich eine Reihe, deren Glieder sich paarweise aufheben, ist dagegen p gerade, so finden wir, wenn wir anstatt p den Wert $2q$ setzen:

$$\frac{\binom{2q}{0}^2}{\binom{4q}{6}} - \frac{\binom{2q}{1}^2}{\binom{4q}{2}} + \frac{\binom{2q}{2}^2}{\binom{4q}{4}} + \ldots$$

$$= \frac{\varphi(2q)}{\varphi(4q)} = \frac{(2q+2)(2q+4)\ldots(4q)}{(2q+1)(2q+3)\ldots(4q-1)} \tag{49}$$

3) Es ist ferner

$$2\sin 2\alpha \,.\, \cos 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^4\nu$$

also:

$$\Sigma \sin^p\alpha = 4^p\,\Sigma \sin^p\alpha\cos^p\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^p)$$

oder:

$$\frac{1}{2^{2p}} \,.\, \Sigma\sin^p 4\alpha = \Sigma \sin\alpha \,.\, \cos^{3p}\alpha - \binom{p}{1} \,.\, \Sigma\sin^{p+2}\alpha \,.\, \cos\alpha^{3p-2} + \binom{\eta}{2} \,.\, \Sigma \sin^4\alpha \,.\, \cos^{3p-2}\alpha - \ldots$$

und hieraus für $p = 2q$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\binom{4q}{4}\binom{2q}{0}}{\binom{8q}{2q}} - \frac{\binom{4q}{q+1}\binom{2q}{1}}{\binom{2q+2}{8q}} + \frac{\binom{4q}{q+2}\binom{2q}{2}}{\binom{8q}{2q+4}} + \ldots \\ &= \frac{\varphi(8q)}{\varphi(2q)} \cdot \frac{1}{1^{4q}} = \frac{(2q+2)(2q+4)(2q+6)\ldots(8q)}{(2q+1)(2q+3)(2d+5)\ldots(8q-1)}\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

4) Aus

$$\cos^4\alpha - \sin^4 a = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha$$

folgt desgleichen:

$$\Sigma(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)^p = \Sigma \cos^p 2\alpha$$

$$\Sigma \cos^{4p}\alpha - \binom{p}{1}\Sigma \cos^{4p4}\alpha \,.\, \sin^4\alpha + \binom{p}{2}\Sigma \cos^{4p-8} \,.\, \sin^8\alpha - \ldots = \Sigma\cos^p 2\alpha$$

oder für $p = 2q$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\binom{4q}{0}\binom{2q}{0}}{\binom{8q}{6}}-\frac{\binom{4q}{2}\binom{2q}{1}}{\binom{8q}{4}}+\frac{\binom{4q}{4}\binom{2q}{2}}{\binom{8q}{8}}-\ldots\\&\qquad=\frac{(4q+2)(4q+4)\ldots(8q)}{(4q+1)(4q+3)\ldots(8q-1)}\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

5) Da

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

folgt weiter aus

$$\Sigma\cos^{2p}\alpha = \Sigma(1-\sin^2\alpha)^p$$

$$\Sigma\cos^{2p}\alpha = n-\binom{p}{1}\Sigma\sin^2\alpha+\binom{p}{2}\Sigma\sin^4\alpha-\binom{p}{3}\Sigma\sin^6\alpha+\ldots$$

oder:

$$1-\frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1}+\frac{1.3}{2.4}\binom{p}{2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{p}{3}+\ldots$$
$$\pm\frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4.6\ldots 2p}=\frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4.6\ldots 2p}$$

Ist p gerade $=2q$, so erhalten wir daraus:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\cdot\binom{2q}{1}+\frac{1.3}{2.4}\binom{2q}{2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{2q}{3}+\ldots\\&\qquad-\frac{1.3.5\ldots(2q-3)}{2.4.6\ldots(4q-2)}\cdot\binom{2q}{2q-1}=0\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Ist dagegen $p=2q+1$, so wird

$$\left.\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}\cdot\binom{2q+1}{1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\binom{2q+1}{2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\\&\cdot\binom{2q+1}{3}+\ldots+\frac{2.4.6\ldots(4q)}{1.3.5\ldots(4q-1)}\cdot\binom{2q+1}{2q}\\&\qquad=2\,\frac{1.3.5\ldots(4q+1)}{2.4.6\ldots 4q+2}\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

6) Aus

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

folgt analoger Weise

$$\Sigma(1+\cos 2\alpha)^p = 2^p\,\Sigma\cos^{2p}\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}\binom{p}{2}+\frac{1.3}{2.4}\binom{p}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{p}{4}+\ldots\\&\qquad=\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{p!}\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

7) Desgleichen giebt $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma(1 - 2\sin^2\alpha)^p$$

oder wenn wir das eine mal $p = 2q$, das andre mal $p = 2q + 1$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} &1 - \frac{1}{1!}\binom{2q}{1} + \frac{1.3}{2!}\binom{2q}{2} - \frac{1.3.5}{3!}\binom{2q}{3} + \ldots \\ &\qquad = \frac{1.3.5\ldots(4q-1)}{2.4.6\ldots(4q)} \\ &1 - \frac{1}{1!}\binom{2q+1}{1} + \frac{1.3}{2!}\binom{2q+1}{2} - \frac{1.3.5}{3!}\binom{2q+1}{3} \\ &\qquad + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

8) Multipliciren wir $\cos 2\alpha$ mit $(1 - \cos 2\alpha)^p$ und ebenso $(-2\sin^2\alpha$ mit $2^p \sin^{2p}\alpha$, so erhalten wir

$$\cos 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)^p = 2^p \sin^{2p}\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1} + \frac{1.3}{2.4}\binom{p}{3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{p}{5} + \ldots \\ &= 2^p\left\{\frac{1.3.5\ldots(2p+1)}{2.4.6\ldots(2p)}.2 - \frac{1.3.5\ldots2p-1}{2.4.6\ldots2p}\right\} \\ &\qquad = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{p!}.\frac{p}{p+1} \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

9) Weitere solche Relationen ergeben sich noch aus

$$a + b\cos^2\alpha = a\sin^2\alpha + (a+b)\cos^2\alpha$$

So ist z. B.

$$1 + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$$

also:

$$\Sigma(1 + \cos^2\alpha)^p = \Sigma(\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)^p$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2}\cdot\binom{p}{1} + \frac{1.3}{2.4}\binom{p}{2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{p}{3} + \ldots \\ &\left\{\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}.2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}}.2^2 + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}}.2^3 + \ldots\right\} \\ &\qquad .\frac{1.3.5\ldots2p-1}{2.4.6\ldots2p} \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Ebenso aus

$$1+2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} &1+\frac{1}{2}\cdot 2^1\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot 2^2\cdot\binom{p}{2}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot 2^3\cdot\binom{p}{3}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots\\ &-\left\{\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}}\cdot 3^0+\frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}\cdot 3^1+\frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}}\cdot 3^2+\frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}}\cdot 3^3+\ldots\right\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,(2p)} \end{aligned}\right\}\quad(58)$$

10) Eine weitere Formel liefert uns auch

$$\begin{aligned} \sin^4\alpha+\cos^4\alpha &= (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= \tfrac{1}{2}(2-\sin^2 2\alpha) = \tfrac{1}{2}(\sin^2 2\alpha+2\cos^2 2\alpha) \end{aligned}$$

Potenziren wir mit p, so erhalten wir hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{\binom{2p}{0}\binom{p}{0}}{\binom{4p}{1}}+\frac{\binom{2p}{2}\binom{p}{1}}{\binom{4p}{4}}+\frac{\binom{2p}{4}\binom{p}{2}}{\binom{4p}{8}}+\ldots\right\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(4p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,(4p)}\\ &=1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\binom{p}{2}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{2^3}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\binom{p}{3}+\ldots\\ &-\left\{\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}}+2\,\frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}}+2^2\,\frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}}+2^3\,\frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}}+\ldots\right\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2p-1)}{p!} \end{aligned}\right\}\quad(59)$$

$$=\left\{1+\tfrac{1}{2}\cdot\binom{p}{1}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\binom{p}{2}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\binom{p}{3}+\ldots\right\}\cdot\frac{1}{2^p}\quad\text{(Gl. 57)}$$

11) Zum Schlusse wollen wir noch eine Formel ableiten, die zwar keine Binomialcoefficienten enthält, aber sonst von Interesse ist.

Wie wir sahen, gelten die Gleichungen:

$$\Pi(1-\cos 2\alpha) = 2^n \Pi \sin^2\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{2^{n-2}}$$

$$\Pi(1+\cos 2\alpha) = 2^n \Pi \cos^2\alpha = \frac{\cos^2 n\alpha}{2^{n-2}}$$

Hieraus folgt aber durch Addition:

$$\Pi(1-\cos 2\alpha)+\Pi(1+\cos 2\alpha) = \frac{1}{2^{n-2}}$$

oder:

$$1+C_2+C_4+C_6+\ldots+C_{n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} &1-\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot n+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot n(n-3)-\frac{1}{3!}\frac{1}{2^6}\cdot n(n-4)(n-5) \\ &+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^8}n(n-5)(n-6)(n-7)-\ldots\pm\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{2n-1}} \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

VII. Anwendungen auf die Ellipse.

1) Eine Ellipse möge durch die Gleichungen

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha$$

gegeben sein. Geben wir hierin dem Winkel α nach und nach die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, wo

$$\alpha_p = \alpha_1 + \frac{2(p-1)}{n}\pi$$

ist, so erhalten wir auf der Ellipse die Ecken eines flächengrössten n Ecks, das ihr einbeschrieben ist. Bezeichnen wir weiter mit r_1, r_2, $r_3 \ldots r_n$ die Entfernungen eines Punktes P von den Ecken dieses n-Ecks $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, so erhalten wir, wenn p und q die Coordinaten des Punktes P sind, die Gleichung

$$r^2 = (p-a\cos\alpha)^2+(q-b\sin\alpha)^2$$

und hieraus:

$$= p^2+q^2+a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha-2ap\cos\alpha-2bq\sin\alpha$$

und

$$\Sigma r^2 = n(p^2+q^2) + \Sigma(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha - 2ap\cos\alpha - 2bq\sin\alpha)$$
$$= n(p^2+q^2) + \frac{a^2+b^2}{2}\,.\,n \tag{61}$$

Dies giebt uns aber den Satz:

„Ziehen wir nach den Ecken eines beliebigen flächengrössten „einer Ellipse einbeschriebenen n-Ecks $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ von einem „beliebigen Punkte P die Strahlen PA_1, $PA_2 \ldots PA_n$, so ist die „Summe der Quadrate dieser Strahlen

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_n^2$$

„constant, wenn das n-Eck sich ändert oder aber der Punkt P auf „einem Kreise um den Mittelpunkt der Ellipse sich bewegt. Diese „Summe wird zudem ein Minimum, wenn der Punkt P in den Mittel-„punkt der Ellipse zu liegen kommt und zwar ist sie dann immer

$$= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\ ^{*)}$$

*) Ausserdem finden wir z. B. für flächengrösste der Ellipse einbeschriebene Dreiecke noch:

„Die Summe der reciproken Höhenquadrate ist constant, nämlich gleich

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

„und ebenso ist die Summe der reciproken Biquadrate der Höhen constant, „nämlich gleich

$$\frac{2}{27}\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)$$

Ebenso finden wir für die Summe der Quadrate der Ecktransversalen eines solchen Dreiecks nach den Seitenmitten die constante Summe

$$\frac{27}{8}(a^2+b^2)$$

und für die Summe der Biquadrate desgleichen

$$\frac{243}{128}(a^4+2a^2b^2+3b^4)$$

und hieraus, wenn wir diese Summe mit

$$\Sigma\frac{1}{h^2},\ \Sigma\frac{1}{h^4},\ \Sigma t^2 \text{ und } \Sigma t^4$$

bezeichnen. In jedem Dreieck ist

$$\left(\frac{\Sigma\, t^2}{\Sigma\frac{1}{h^2}}\right)^2 = \frac{\Sigma\, t^4}{\Sigma\frac{1}{h^4}}$$

Für $n = 4$ erhalten wir den bekannten Satz für die Quadratsumme conjugirter Halbmesser, für $n = 3$ gab die Erweiterung Jakob Steiner. Es ist weiterhin klar, dass wir ausser der Summe der Quadrate irgend welche cyklisch-symmetrische Functionen der Werte r^2, für gerade n bis zum Grade $\frac{n-2}{2}$ und für ungerade n bis zur Ordnung $n-1$ nehmen dürfen. Wir werden dann immer Constanten erhalten. Für einen beliebigen Punkt P werden aber die sich ergebenden Summen keine einfachen mehr und wir wollen uns deshalb darauf beschränken einzelne Fälle für den besondern Umstand, dass P Mittelpunkt der Ellipse ist, zu erörtern.

2) Bilden wir für den letztgenannten Fall die Summe der $2p$ten Potenzen der r, so erhalten wir

$$\Sigma PA^{2p} = \Sigma r^{2p} = \Sigma(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)^p$$

$$= a^{2p}\Sigma\cos^{2p} + \binom{p}{1} a^{2p-2}b^2\,\Sigma\cos^{2p-2}\alpha\sin^2\alpha + \ldots$$

Setzen wir hierin für $\Sigma\cos^{2p}\alpha$ etc. die früher gefundenen Werte und für $\varphi(p)$ zudem den Wert aus Gl. (7) ein, so haben wir aber:

„Ziehen wir von dem Mittelpunkt einer Ellipse nach den Ecken „eines einbeschriebenen flächengrössten n-Ecks Strahlen, so ist die „Summe der $2p$ten Potenzen dieser Strahlen für $2p < o$ oder „$2p < 2u$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, constant, näm„lich es ist diese Summe gleich:

$$\frac{a^{2p} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} a^{2p-2}\,.\,b^2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} a^{2p-0}\,.\,b^4 + \ldots}{1 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}} + \ldots}$$

3) Sei gleicherweise eine Ellipse gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und ziehen wir durch den Mittelpunkt dieser Ellipse Strahlen, welche mit der x-Achse die oft genannten Winkel α bilden, so erhalten wir, wenn wir $x = \varrho\,.\cos\alpha$, $y = \varrho\,.\sin\alpha$ setzten:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

Hieraus erhalten wir ebenso:

$$\Sigma \frac{1}{\varrho^{2p}} = \Sigma\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\mu}{b^2}\right)^p$$

und wie oben:

„Ziehen wir desgleichen durch den Mittelpunkt einer Ellipse n „Strahlen, die den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile zerlegen, so ist „auch die Summe der 2pten reciproken Potenzen der n Halbmesser „constant, wenn p die obigen Bedingungen erfüllt, und zwar ist diese „Summe gleich:

$$\frac{1}{a^{2p}b^{2p}} \frac{a^{2p} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} a^{2p-2} \,.\, b^2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} \,.\, a^{2p-4} \; b^4 + \ldots}{1 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \ldots}$$

Ist $n = 4$, so resultirt daraus der bekannte Satz über die Summe der reciproken Quadrate zweier senkrechten Ellipsenhalbmesser.

Wir brauchen auch hier kaum zu erwähnen, dass wir uns hiebei nicht auf die genannten Potenzsummen zu beschränken brauchen.

4) Die zuletzt erwähnte Eigenschaft lässt sich auch auf die Hyperbel ausdehnen; sie gestattet aber noch eine Erweiterung, die sich auf Kegelschnitte überhaupt bezieht. Sei die Gleichung irgend eines Kegelschnitts gegeben durch

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$$

und legen wir durch den Coordinatenursprung eine Gerade, welche mit der x-Achse den Winkel α bildet, so erhalten wir für die Abschnitte ϱ_1 und ϱ_2, die auf dieser durch den Kegelschnitt bestimmt sind, die Gleichung:

$$(A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha)\varrho^2 + 2(C\cos\alpha + D\sin\alpha)\varrho + E = 0$$

und somit

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=-2\,\frac{C\cos\alpha+D\sin\alpha}{E}$$

$$\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}=\frac{A\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha}{E}$$

Nun ist z. B.

$$\frac{1}{\varrho_1{}^3}+\frac{1}{\varrho_2{}^3}=\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^3-\frac{3}{\varrho_1\,\varrho_2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)$$

Ebenso ist allgemein

$$\frac{1}{\varrho_1{}^p}+\frac{1}{\varrho_2{}^p}=\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho^2}\right)^p+\frac{a_1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^{p-2}$$
$$+\frac{a_2}{\varrho_1{}^2\cdot\varrho_2{}^2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^{p-4}+\dots$$

wo a_1, a_2, . . . gewisse coustante Grössen sind.

Berücksichtigen wir aber das Allgemeine über die cyklisch-symmetrischen Verbindungen der Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ Gesagte und geben wir jetzt α die vielgenannten Werte und addiren, so folgt unmittelbar, dass für

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1{}^p}+\frac{1}{\varrho_2{}^p}\right)$$

entweder lauter solche cyklisch-symmetrische Functionen ungeraden oder aber lauter von geradem Grade auftreten.

Daraus erhalten aber z. B.:

„Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene eines „Kegelschnitts n Strahlen, welche den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile „zerlegen, und bestimmt der Kegelschnitt auf diesen Strahlen der „Reihe nach die Punkte A_1, A_2, A_3 . . . . A_{nn}, so ist für $p > n$ und „p ungerade alle mal

$$\frac{1}{PA_1{}^p}-\frac{1}{PA_2{}^p}+\frac{1}{PA_3{}^p}-\frac{1}{PA_4{}^p}+\dots=0$$

und für p gerade

$$\frac{1}{PA_1{}^p}+\frac{1}{PA_2{}^p}+\frac{1}{PA_3{}^p}+\frac{1}{PA_4{}^p}+\dots=\text{const.}\ ^{*)}$$

---

*) Ausser diesen Sätzen lassen sich eine Reihe andere Beziehungen bei den Kegelschnitten ableiten; so z. B.:

VIII. Anwendungen auf den Kreis.

1) Ist einem Kreise ein reguläres Vieleck $A_1 A_2 \ldots A_n$ (Fig. 2) einbeschrieben und ziehen wir von einem beliebigen Punkte P nach den Ecken dieses Vielecks Sehnen, und ziehen wir ebenso von dem P auf dem Kreise diametral gegenüber liegenden Punkte P_1 solche Sehnen, so teilen diese letzteren den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile und bilden also mit einem festen durch P_1 gezogenen Strahl Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Ist $PP_1 = 2r$, so werden aber die Werte PA_1, PA_2, $PA_3, \ldots$ gleich $2r \sin \alpha_1$, $2r \sin \alpha_2$, $2r \sin \alpha_3$, und wir erhalten, wenn wir das reguläre Polygon sich auf dem Kreise bewegen lassen z. B. aus den goniometrischen Relationen:

„Ziehen wir von einem beliebigen Punkte P eines Kreises nach „den Ecken eines ihm einbeschriebenen n Ecks Strahlen PA_1, PA_2. „. . ., so ist die Summe der Potenzen dieser Strahlen mit ab- „wechs. Vorzeichen gleich null, wenn der Potenzexponent $< n$ un „gerade, und die Summe dieser Potenzen gleich einer Constanten, „wenn dieser Exponent gerade und kleiner als $2n$ ist. So ist z. B.

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 - PA^4 + \ldots \pm PA_n = 0$$

$$PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - PA_4^3 + \ldots + PA_n^3 = 0$$

$$PA_1^5 - PA_2^5 + PA_3^5 - PA_4^4 + \ldots + PA_n^5 = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + \ldots + PA_n^2 = \tfrac{1}{2}n \,.\, 4r^2 = 2nr^2$$

$$PA_1^4 + PA_2^4 + PA_3^4 + \ldots + PA_n^4 = \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \,.\, n \,.\, 16r^4 = 6nr^4$$

$$PA_1^6 + PA_2^6 + PA_3^6 + \ldots + PA_n^6 = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \,.\, n \,.\, 64r^6$$

$$= 20nr^6 \text{ u. s f}$$

2) Es dürfte nicht ohne Interesse sein von diesem Satze einige specielle Fälle anzuführen:

1. Fall. $n = 2$. „Satz des Pythagoras".

2. Fall. $n = 3$. „Zieht man von einem Punkte eines Kreises „nach den Ecken eines gleichseitigen ihm einbeschriebenen „Dreiecks Strahlen, so ist der mittlere gleich der Summe

---

„Ist einer Ellipse ein gleichseitiges Dreieck umschrieben, so ist die Summe „der Quadrate und die Summe der Biquadrate der Entfernungen des Ellipsenmit- „telpunkts von den Seiten der Dreiecke constant, nämlich gleich

$$\tfrac{3}{2}(a^2 + b^2) \text{ bzhw. gleich } \tfrac{3}{8}(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)$$

„beiden andern. (Bekannter el. Satz.) Die Summe der „Quadrate dieser Strahlen ist dagegen gleich $6r^2$ und die „Summe der Biquadrate gleich $18r^4$.

3. Fall $n = 4$. „Zieht man ebenso von einem Punkt des „Umfangs des einem Quadrat umschriebenen Kreises „nach den Ecken des Quadrats die vier Strahlen, so ist „die Summe der Quadrate, vierten und sechsten Potenzen „dieser Strahlen entsprechend gleich $8r^2$, $24r^4$, $80r^6$ „u. s. w."

3) Wählen wir den Punkt P insbesondere in der Mitte des Bogens über einer Seite des n-Ecks und ist n ungerade, so werden die Sehnen paarweise gleich, und eine wird gleich dem Durchmesser des Kreises, und wir haben dann:

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 - \ldots \pm PA_{\frac{n-1}{2}} = \pm \frac{2r}{2} = \pm r$$

$$PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - \ldots \pm PA_{\frac{n-1}{2}}^3 = \pm \frac{(2 \cdot r)^3}{2} = \pm 4r^3$$

u. s. f.

Fällen wir aber vom Mittelpunkt des Umkreises Lote auf die Diagonalen und Seiten des Polygons, so sind dieselben entsprechend gleich $\frac{1}{2}PA_1$, $\frac{1}{2}PA_2$, u. s w. und wir haben also:

„Bezeichnen wir die Entfernungen der Seiten und Diagonalen „eines regulären Polygons von ungerader Seitenzahl vom Mittel- „punkt des Umkreises ihrer Grösse nach mit e_1, e_2 $e_3 \ldots e_{\frac{n-1}{2}}$ „so ist immer auch

$$e_1^{2p+1} - e_2^{2p+1} + e_3^{2p+1} - \ldots \pm e_{\frac{n-1}{2}}^{2p+1} = \tfrac{1}{2}r^{2p+1}$$

„wenn $2p+1 < n$ und r der Halbmesser des Umkreises ist".

„So ist z. B. die Entfernung der Seite des gleichseitigen einem „Kreise einbeschriebenen Dreiecks vom Mittelpunkt $= \frac{1}{2}r$ und ebenso „der Unterschied der Entfernung der Seiten des Fünfecks und der „Diagonale gleich $\frac{1}{2}r$, und der Unterschied der Kuben dieser zwei „Entfernungen ist gleich dem halben Kubus des Halbmessers des „Umkreises". *)

*) Auch hier lassen sich eine Menge anderer Formeln ableiten, ist z. B.

4) Beschreiben wir weiter um den Mittelpunkt O (Fig. 2) einen zu dem ersteren concentrischen Kreis, so schneidet dieser die Strahlen PA in $2n$ Punkten P, die wir der Reihe nach durch $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$ bezeichnen wollen. Es ist dann immer:

$$PB_1 + PB_{n+1} = PA$$
$$PB_1 + PB_{n+1} = \text{const.}$$

Bezeichnen wir PB_1 und PB_{n-1} mit σ und τ, so erhalten wir aber:

$$(\sigma^n + \tau^n) = (\sigma+\tau)^n + b_1(\sigma+\tau)^{n-2} + b_2(\sigma+\tau)^{n-1} + \ldots$$

wo auch b_1, b_2 . . . constante Werte sind. Bezeichnen wir aber wieder die Strahlen PB_1, PB_2, PB_3, . . . mit ϱ_1, $-\varrho_2$, $+\varrho_3$, . . . so finden wir hieraus und aus 1):

„Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines „Kreises n Strahlen, die den Vollwinkel in $2n$ gleiche Teile zer- „legen, und sind die Abschnitte, die dieser Kreis auf diesen Strahlen „bestimmt ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 . . . , so ist allemal

$$\varrho_1^{2p+1} - \varrho_2^{2p+1} + \varrho_3^{2p+1} - \ldots + \varrho_{2n}^{2p+1} = 0$$
$$\varrho_1^{2q} + \varrho_2^{2q} + \varrho_3^{2q} + \ldots + \varrho_{2n}^{2q} = \text{const.}$$

„wenn $2p+1 < n$ und $2q$ ebenfalls $< 2n$ ist“.

Wir brauchen kaum hinzuzufügen, dass hier und in 1) an Stelle dieser Potenzsummen andere cyklisch-symmetrische Functionen treten können.

5) Sind ferner die Gleichungen

$$L_1' = x \sin\alpha_1 - y \cos\alpha_1 - p = 0$$
$$L_2' = x \sin\alpha_2 - y \cos\alpha_2 - p = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n' = x \sin\alpha_n - y \cos\alpha_n - p = 0$$

---

der Halbmesser eines Kreises $= 1$, Seite und Diagonale des einbeschriebenen reg. Fünfecks x resp. y, so gelten die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 5 \quad x^4 + y^4 = 15 \quad x^6 + y^6 = 50 \quad x^8 = y^8 = 175$$

Ebenso erhalten wir für das reg. Siebeneck, wenn x, y, z Seiten und Diagonalen sind:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7 \quad x^4 + y^4 + z^4 = 21 \quad x^6 + y^6 + z^6 = 70$$
$$x^8 + y^8 + z^8 = 245 \quad x^{10} + y^{10} + z^{10} = 872 \quad x^{12} + y^{12} + z^{12} = 3234$$

u. s. w.

gegeben, so bilden die durch diese Gleichungen dargestellten Geraden ein reguläres Polygon von n Seiten. Bilden wir aus diesen Grössen L aber dadurch, dass ihre Werte in eine cyklisch-symmetrische Function der L an Stelle der L selbst gesetzt werden, so werden in der entwickelten Function die Coefficienten offenbar auch solche cyklisch-symmetrische Functionen der Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sein müssen, oder es wird für den Fall, dass die Function von kleinerem als dem $n$ten Grade ist, in eine solche von (x^2+y^2) zerfallen. So wird z. B.

$$\Sigma L_1'^2 = \frac{n}{2}(x^2+y^2)+np^2$$

Eine unmittelbare Folge aus diesem ist aber der Satz:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines beliebigen regulären „Polygons von ungerader Seitenzahl L einen Kreis und fällen von „einem beliebigen Punkt dieses Kreises Lote auf die Seiten des „Polygons, und bilden wir aus diesen Loten eine solche cyklisch-„symmetrische Function, vom Grade p, so ist der Wert der Function „für alle Punkte des Kreises constant, wenn nur $p<n$ bleibt. So „ist insbesondere für jeden Punkt dieses Kreises auch die Summe „aller p ten Potenzen dieser Lote constant“.

6) Um den Ursprung des Coordinatensystems möge weiter mit dem Halbmesser eins ein Kreis beschrieben sein, und von einem Punkt P der x-Achse mit der Abscisse x mögen nach den Ecken A eines dem Kreise einbeschriebenen n-Ecks Strahlen gezogen sein. Es ist dann für diese Strahlen immer die Gleichung

$$PA^2 = x^2+1-2x\cos\alpha$$

gültig, wo wir, um die verschiedenen Längen PA^2 zu erhalten, dem Werte α die entsprechenden Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu geben haben. Wir werden dann auch für diesen Fall eine Reihe von solchen Relationen ableiten können. So werden wir z. B die Summe der $p$ten Potenzen der Quadrate dieser Entfernungen bilden können. Ist $p<n$, so erhalten wir aber mittelst unserer goniometrischen Beziehungen zwischen $\Sigma\cos^q\alpha$ wieder:

$$\Sigma P^{2p} = \Sigma((1+x^2)-2x\cos\alpha)^p$$

oder:

$$\Sigma \frac{PA^{2p}}{n} = (1+x^2)_p + \frac{p(p-1)}{(1!)^2} x^2(1+x^2)^{p-2}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{(2!)^2} x^4(1+x^2)^{p-4}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{(3!)^2} x^6(1+x^2)^{p-6}$$
$$+ \dots + 1$$

und hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\Sigma PA^{2p} = n \left\{ x^{2p} + \binom{p}{1}^2 x^{2p-2} + \binom{p}{2} x^{2p-4} + \dots + 1 \right\}$$

Aendern wir jetzt die x-Achse oder mit andern Worten den Wert α_1, so beschreibt der Punkt einen Kreis, und wir finden daraus:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines reg. Polygons von „ungerader Seitenzahl einen Kreis, so ist die Summe der $2p$ten Po-„tenzen der Entfernungen irgend eines Punktes dieses Kreises von „den Ecken des Polygons constant, nämlich gleich

$$n \left\{ a^{2p} + \binom{p}{1}^2 a^{2p-2} \cdot b^2 + \binom{p}{2}^2 a^{2p-4} \cdot b^4 + \dots b^{2p} \right\}$$

„wenn $p < n$, und a der Halbmesser des Umkreises des Polygons „b, der des beliebigen Kreises ist. Diese Summe bleibt zudem „constant, wenn der eine Kreis mit dem andern vertauscht wird. „Hat das Polygon eine gerade Seitenzahl, so bleibt der Satz mit „entsprechenden Aenderungen gültig“.

Wir können diesen Satz ohne weiteres auch für den Fall $p = n$ ausdehnen, wollen dies jedoch unterlassen.

7) Auch im letzteren Falle können wir an Stelle der Summen der Potenzen solche Beziehungen, für die Summen der Combinationen etwa, ableiten. Wir wollen uns dabei aber auch diesmal auf das Product dieser Grössen PA^2 beschränken. Wir haben für dasselbe

$$\Pi PA^2 = \Pi(x^2 + 1 - 2x\cos\alpha)$$

oder entwickelt und die Werte aus den Gleichungen 21) eingesetzt:

$$\Pi PA^2 = (x^2+1)^n - \frac{1}{1!} nx^2(x^2+1)^{n-2} + \frac{1}{2!} n(n-3)x^4(x^2+1)^{n-4}$$
$$- \frac{1}{3!} n(n-4)(n-5)x^6(x^2+1)^{n-6} + \dots - 2^n x^n \Pi\cos\alpha$$
$$= x^{2n} + 1$$

$$+x^{2n-2} \,.\, n(1-1)$$

$$+x^{2n-4} \,.\, \frac{n}{2!}\,((n-1)-2(n-2)+(n-3))$$

$$+x^{2n-6} \,.\, \frac{n}{3!}\,\{(n-1)(n-2) - 3(n-2)(n-3+3(n-3)(n-4) - (n-4)(n-5)\}$$

$$+x^{2n-8} \,.\, \frac{n}{4!}\{(n-1)(n-2)(n-3) - 4(n-2)(n-3)(n-4) + 6(n-3)(n-4)(n-5) - 4(n-4)(n-5)(n-6) + (n-5)(n-6)(n-7)\}$$

$$+ \ldots - 2x^n \cos n\alpha$$

Betrachten wir aber etwa den Coefficienten von x^{2n-8}, so treten in diesen die Zahlen 1, 4, 6, 4, 1 als Factoren vor den Klammerausdrücken auf. Die Ausdrücke in der Klammer sind aber ihrerseits die Glieder einer arith. Reihe der 3ten Ordnung, und nach einem bekannten Satze verschwindet dann notwendig die Summe. Daraus folgt aber das Theorem von Cotes mit der Moivre'schen Erweiterung

$$\underline{\Pi PA^2 = x^{2n} - 2x^n \cos n\alpha + 1,} \quad \text{d h.}$$

für $\alpha = 0$

$$\underline{\Pi PA^2 = (x^n - 1)^2}$$

für $\alpha = \frac{\pi}{n}$

$$\underline{\Pi PA = x^n + 1}$$

u. s w.

IX. Quadratur der Fusspunktencurve des Kreises.

Wie wir in VIII. 5) sahen, können wir zwischen den Loten eines Punktes auf die Seiten eines reg. Polygons eine Menge von Relationen aufstellen, die auf Kreise als geometrische Oerter für den Punkt führen. Bilden wir so etwa die Function:

$$L_1' \,.\, L_2' + L_2' \,.\, L_3' + L_3' \,.\, L_4' + \ldots + L_n' \,.\, L_1' = \text{const.}$$

so giebt uns die Entwicklung dieses Orts aber die Gleichung

$$(x^2+y^2) \,.\, \frac{a}{2} \,.\, \cos\frac{2\pi}{n} + np^2 = \text{const.} \quad \text{siehe Gl. 30), oder:}$$

wenn wir mit $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ die Entfernungen eines Punktes von den Seiten des Polygons, mit

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Entfernung desselben vom Mittelpunkt des Polygons bezeichnen, dann ist immer:

$$\tfrac{1}{2} n\varrho^2 + np^2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_4 + \ldots + e_n \cdot e_1$$

Verbinden wir die Fusspunkte der aufeinander folgenden Lote auf die Seiten aber durch gerade Linien, so erhalten wir ein Polygon das wir als Fusspunktenvieleck bezeichnen wollen. Je zwei aufeinander folgende Lote bilden aber mit einander einen Winkel $= \frac{2\pi}{n}$ und wir erhalten daraus als Inhalt des Fusspunktenvielecks den Wert

$$F = \tfrac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_3 + \ldots + e_n \cdot e_1)$$

oder:

$$F = \tfrac{1}{4} n \cdot \varrho^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + \tfrac{1}{2} np^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

oder:

$$F = \tfrac{1}{8} n \cdot \sin \frac{4\pi}{n} \cdot \varrho^2 + \tfrac{1}{2} np^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

Lassen wir die Seitenzahl des Vielecks jetzt in's unendliche wachsen, so können wir anstatt des Sinus den Winkel selbst setzen und erhalten daraus für den „Inhalt der Fusspunktencurve des Kreises für einen beliebigen Pol, der die Entfernung ϱ vom Kreismittelpunkt hat,

$$\underline{F = \tfrac{1}{2}\varrho^2\pi + p^2\pi}$$

p ist hiebei der Halbmesser des Kreises geworden".

Schlussbemerkung.

Die hier entwickelten Relationen legen es nahe zu vermuten, dass auch für die regulären Polyeder analoge Beziehungen gültig sein werden. Dem ist in der Tat so. Wir erhalten z. B. wenn wir die Summen der $2p$ten Potenzen der Entfernungen eines Punktes P von den Ecken A eines solchen Polyeders mit Σr^{2p} bezeichnen„ z. B.:

„Bewegt sich der Punkt P auf einer Kugel, deren Mittelpunkt „mit dem Mittelpunkt eines reg. Polyeders zusammenfällt, so ist für

„das reguläre Tetraeder Σr^2 und Σr^4, für das Hexaeder und Okta-
„eder Σr^2, Σr^4 und Σr^8 und für das Dodekaeder und Ikosaeder
„Σr^2, Σr^4, Σr^6 und Σr^8 je gleich einer Constanten".

Wie wir bei den reg. Polygonen z. B. die Ecken durch congruente gleichschenkl. Dreiecke abstumpfen könnten, ohne dass alle die oben entwickelten Relationen für die entstandenen Polygone ungültig werden, ebenso könnten wir auch entsprechend die Ecken dieser Polyeder abstumpfen und würden wir dann Relationen erhalten. Doch wollen wir uns darauf beschränken in beiden Fällen darauf hingewiesen zu haben.

Stuttgart, im März 1897.

IV.

Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen von Curven und Flächen.

Von

R. Hoppe.

Die Entdeckung der Beziehung zwischen der Hauptkrümmung der allgemeinen konischen Fläche und dem Krümmungsverhältniss einer ebenso allgemeinen Curve, welche Mangeot in Soc. Math. de France Bull. XXIV. p. 98 mitteilt, ist wol von genügendem Interesse, um sie den Principien der analytischen Geometrie anzufügen. Die Beziehung ist in den fundamentalen Ausdrücken beider Grössen unmittelbar gegeben.

Die genannte Fläche wird von einem Strahle in der Richtung der Tangente der Curve erzeugt. Bezeichnen fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscos. der Tangente, Hauptnormale, Binormale, τ und ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, v den Bogen der Curve, ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche, u den Strahl, so sind die Gleichungen der Fläche in den Parametern u, v:

$$x = uf; \quad y = ug; \quad z = uh$$

woraus die Werte der Fundamentalgrossen

$$e_1 = \frac{\partial x^2 + \ldots}{\partial u^2} = 1; \quad f_1 = \frac{\partial x^2 + \ldots}{\partial u\, \partial v} = 0;$$

$$g_1 = \frac{\partial x^2 + \ldots}{\partial v^2} = \left(u \frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2$$

$$E = p \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots = 0; \quad F = p \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + \ldots = 0;$$

$$G = p \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \ldots = \frac{\partial \tau\, \partial \vartheta}{\partial v^2}$$

leicht folgen. Hier ist p Richtungscos. der Normale $= l$. Da die eine Hauptkrümmung null ist, so hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{e_1 G_1}{e_1 g_1 - f_1^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

Diese Gleichung spricht den Satz von Mangeot aus: „Der Hauptkrümmungsradius ϱ_1 variirt proportional dem Strahle u, und der Coefficient des Verhältnisses ist gleich dem Krümmungsverhältniss der Curve.“

V.

Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen eines Dreieckes.

Von

Konstantin Karamata.

Betrachtet man den Umkreis eines Dreieckes ABC als Erzeugniss zweier congruenten Strahlenbüschel, so kann man etwa die Seiten AC und CB als ein Paar zweier einander eindeutig zugeordneten Strahlen annehmen. Derselbe Kreis ist dann durch die Gleichungen

$$x + y = 180^0 - \mu \tag{1}$$

oder

$$x + y = \mu \tag{2}$$

charakterisirt, wo x und y die veränderlichen Winkel der Dreiecke bedeuten, die durch die Zuordnung der Strahlen entstehen, und welche an dem gemeinschaftlichen Strahle AB liegen, μ ist der dritte Winkel, welcher als Peripheriewinkel, des Kreises immer constant bleibt. Die erste Gleichung bezieht sich auf den Kreisbogen oberhalb der Sehne AB und die zweite auf den Kreisbogen unterhalb derselben Sehne. Der Radius dieses Kreises ist

$$r = \frac{a}{2 \sin \mu} \tag{3}$$

wo a die Länge der gemeinschaftlichen Seite AB ist.

2. Hälften wir sowol die inneren als auch die äusseren Winkel an der allen Dreiecken des Umkreises gemeinschaftlichen Seite AB, so geben die Durchschnitte je vierer zu einem Dreiecke gehörigen Symmetralen die Mittelpunkte der vier Berührungskreise, so dass die Frage nach dem geometrischen Orte dieser Mittelpunkte entsteht. Je zwei Symmetralen, die zu einem Innen- und dessen Aussenwinkel gehören, bilden zwei involutorisch zugeordnete Strahlen, die auf einander senkrecht stehen, wodurch wir zwei involutorische und congruente Strahlenbüschel mit dem Scheitel in A und B erhalten. Die eindeutige Zuordnung je eines Paares involutorischer Strahlen des einen Strahlenbüschels (A) einem anderen Paare aus dem involutorischen Strahlenbüschel aus B bestimmt schon die eindeutige Zuordnung der Strahlen aus dem ursprünglichen Strahlenbüschel (A) und (B), deren Erzeugniss der Umkreis selbst ist, dadurch dass je einen Strahl des ursprünglichen Strahlenbüschels ein Strahlenpaar des involutorischen Strahlenbüschels begleitet. Der geometrische Ort aller Mittelpunkte der vier Berührungskreise aller Dreiecke, welche einem Umkreise eingeschrieben sind und eine Seite gemeinschaftlich haben, wird daher das Erzeugniss zweier involutorischen und congruenten Strahlenbüschel sein. Dasselbe ist im allgemeinen eine Curve 4. Ordnung, welche in diesem Falle, wie aus der folgenden Specialisirung hervorgeht, in zwei Kreise zerfällt.

3. Diese Curve können wir auf Grund der Gleichungen (1) und (2) untersuchen und werden daher die zwei Fälle, ob die Dreiecke oberhalb oder unterhalb der gemeinschaftlichen Seite in dem Umkreise liegen, unterscheiden.

I. Die Dreiecke oberhalb der gemeinschaftlichen Seite AB.

a) Die Symmetralen der inneren Winkel an der Seite AB schneiden sich im Punkte D, der ein Mittelpunkt eines Kreises, welcher alle drei Seiten eines Dreieckes von innen berührt. Der Winkel bei D ist gegeben durch $180^0 - \frac{x+y}{2}$ oder nach (1) durch

$$90^0 + \frac{\mu}{2}$$

Dies aber findet für jedes Dreieck, welches dem Kreise K einge-

schrieben ist und oberhalb AB liegt, statt, daher ist der geometrische Ort aller solcher Punkte D ein Kreisbogen $\dot{AB}$ mit dem constanten Peripheriewinkel $90^0 + \frac{\mu}{2}$ oberhalb der Sehne AB. Der Radius des Kreises, dem dieser Kreisbogen angehört, ist

$$\varrho_1 = \frac{a}{2 \cos \frac{\mu}{2}}$$

Den Mittelpunkt und den Centriwinkel dieses Kreises K erhält man, wenn man die Senkrechte SP verlängert, bis sie den Kreis K unterhalb der Sehne AB schneidet. Der Durchschnittspunkt S_c' giebt den Mittelpunkt des Kreises K_c' und

$$AS_c' = S_c'B$$

ist dessen Radius.

b) Es sei D_b'' der Schnittpunkt der Symmetrale des Aussenwinkels bei A mit der Symmetrale des Innenwinkels bei B, D_a dagegen der Schnittpunkt der Symmetrale des Innenwinkels bei A mit der Symmetrale des Aussenwinkels bei B, so geben dieselben die Mittelpunkte zweier Berührungskreise, welche eine der als Strahlen einander zugeordneten Seiten in ihrer Verlängerung, die andere aussen berühren. Der Winkel der Symmetralen bei D_b ist $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + x + \frac{y}{2}\right]$ und der bei D_a ist $180^0 = \left[\frac{180^0 - y}{2} + y + \frac{y}{2}\right]$ oder nach (1)

$$\frac{\mu}{2}$$

d. h. der Ort aller D_a und D_b ist ein Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel $\frac{\mu}{2}$ oberhalb der Sehne AB, der zum Kreise K_c'' mit dem Radius

$$\varrho_2 = \frac{a}{2 \sin \frac{\mu}{2}}$$

gehört. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der zweite Durchschnittspunkt S_c'' der Senkrechten SP mit dem Kreise K.

c) Die Symmetralen beider Aussenwinkel an AB geben als Durchschnittspunkt den Mittelpunkt D_b des Kreises, welcher die

gemeinschaftliche Seite AB aussen berührt. Der Winkel bei D_c ist $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + \frac{180^0 - y}{2}\right]$ oder nach (1)

$$90^0 - \frac{\mu}{2}$$

dies ist aber der Supplementwinkel von I. a. und constant, daher liegt D_c am Kreisbogen, welcher dem von I. a. zum Kreise K_c' ergänzt.

II. Die Dreiecke unterhalb der gemeinschaftlichen Seite *AB*.

a) Bezeichnet man mit D', analog nach I. a., die Mittelpunkte der Kreise, welche die Dreiecke, die unterhalb der Sehne AB liegen, innerlich berühren, so wird der Peripheriewinkel bei D' gegeben sein durch $180^0 - \left[\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right]$ und dies ist nach (2)

$$180^0 - \frac{\mu}{2}$$

Der Kreisbogen, an welchem die Scheitel der obigen Peripheriewinkel liegen, ist supplementär zu dem von I. b.

b) Für die Mittelpunkte D_b' und D_a' erhalten wir, dass sie an Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + x + \frac{y}{2}\right]$ beziehungsweise $180^0 - \left[\frac{180^0 - y}{2} + y + \frac{x}{2}\right]$ d. i. nach (1)

$$90^0 - \frac{\mu}{2}$$

liegen; daher ist das derselbe Kreisbogen wie I. c.

c) Die Mittelpunkte D_c sind Scheitel der Peripheriewinkel $180^0 - \left[\frac{180^0 - x}{2} + \frac{180^0 - y}{2}\right]$ oder nach (2)

$$\frac{\mu}{2}$$

d. h. der Kreisbogen I. b.

Man ersieht aus dem, dass auf dem Kreise K_c' die Mittelpunkte D_a, D_b, D_a' und D_b' und auf dem Kreise K_c'' D_a, D_b, D und D_v' liegen. Daraus folgt, dass der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Berührungskreise der einem Umkreise eingeschriebener Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Seite haben, zwei Kreise sind, als auch dass die Curve 4. Grades, welche als Erzeugniss zweier congruenten involutorischen Strahlenbüschel erscheint, in zwei Kreise zerfällt.

4. Ebenso wie die Punkte A und B des eingeschriebenen Dreieckes ABC als Scheitel zweier congruenten Strahlenbüschel angenommen worden sind, kann man auch B und C, als auch C und A als solche betrachten; dem gemäss sind im ersten Falle BC der gemeinsame Strahl, BA und AC die einander zugeordneten Strahlen, im zweiten Falle CA der gemeinschaftliche Strahl und CB und BA die zugeordneten. Im ersten Falle erhalten wir, dass die Mittelpunkte der Berührungskreise an den Kreisen K_a' und K_a'', im zweiten Falle auf den Kreisen K_b' und K_b'' liegen müssen, die man in Bezug auf die Seite BC resp. CA ebenso erhält, wie die Kreise K_c' und K_c'' in Bezug auf AB; daher werden K_a', K_a'', K_b' und K_b'' analoge geometrische Oerter repräsentiren wie die Kreise K_c' und K_c''.

Nun betrachten wir das Dreieck ABC mit seinem Umkreise K, dessen Mittelpunkt S ist, für sich und fällen aus S Senkrechte auf alle drei Seiten, so erhalten wir sechs Schnittpunkte auf dem Umkreise S_a', S_a'', S_b', S_b'', S_b' und S_c'', beschreiben aus diesen einzelnen Punkten als Mittelpunkten Kreise mit Radien, welche gleich dem Abstande des Mittelpunktes von den Endpunkten der Seite, in Bezug auf welche die dazugehörige Senkrechte die Symmetrale ist ($S_aB = S_aC$, $S_a'B = S_a'C$, $S_c'C = S_b'A$, $S_b''C = S_b''A$, $S_c{}^0A = S_c'B_c$ und $S_c'C = S_a''B$), so erhalten wir sechs Kreise K_a', K_a'', K_b', K_b'', K_c' und K_c'', von denen sich je vier in den drei Ecken des Dreieckes schneiden und je drei in vier anderen Punkten D, D_a, D_b und D_c, welche zugleich auch die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreieckes sind.

Dies ist leicht einzusehen sowol für einen dieser Punkte, als auch für die anderen. Nehmen wir z. B. den Punkt D an, so muss derselbe als Mittelpunkt der Berührungskreise, welche die dem Kreise K oberhalb der gemeinsamen Seite AB eingeschriebenen Dreieke innerlich berühren, auf dem Kreisbogen AB des Kreises K_c

liegen; analog für die Seite BC liegt derselbe auf den Kreisbogen BC des Kreises K_a', und in Bezug auf die Seite CA auf dem Kreisbogen CA des Kreises K_b'. Für ein und dasselbe Dreieck kann dieses nur dann stattfinden, wenn sich diese drei Kreisbögen in einem und demselben Punkte D schneiden.

Aehnlich beweist man, dass D_a der Schnittpunkt der Kreise K_a', K_b'' und K_c'', D_b der Schnittpunkt der Kreise K_a'', K_b' und K_c' D_c der Schnittpunkt der Kreise K_a'', K_b' und K_c' ist.

VI.

Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie.

Von

Stanislaus Chrzaszczewski, stud. math.

München.

Einleitung.

Wol nahezu 2000 Jahre beherrschten die Bücher des Euklid, Archimedes und Apollonius das Interesse der Geometer, ohne dass wesentliche Fortschritte in dem Aufbau der Kegelschnittstheorie gemacht worden wären. Immer noch bot diese Wissenschaft den Charakter einer speciellen, immer noch fehlte ihr der der Allgemeinheit. Ellipse, Parabel und Hyperbel wurden so behandelt, als ob sie unter sich fremdartige Gebilde wären.

Der erste, der eine Darstellung der oben genannten Curven von einheitlichem Gesichtspunkt aus mit grossem Geschick unternahm, ist Girard Desargues, indem bei ihm wesentlich das eine Bestreben zu Tage tritt, nur lagengeometrische Beziehungen, die doch für jeden beliebigen Kegelschnitt gelten, d. h. die projectivischen Eigenschaften derselben aufzustellen. Metrische Relationen werden von ihm nur ganz nebenher gestreift.

Der Verfasser hofft nun einen Beitrag zur Kenntniss der Geschichte der projectivischen Geometrie zu liefern, wenn er in der vorliegenden Abhandlung in erster Linie eine eingehende Darstellung der Desargues'schen Verdienste gibt, indem diese bisher in keinem

mathematisch-geschichtlichen Werke in der ihnen gebührenden Weise betrachtet worden sind. So konnte z. B im 2. Bande von Herrn Cantors Vorlesungen, die ja das ganze Gebiet der Mathematik umfassen, selbstverständlich nur eine cursorische und allgemeine Schilderung der Desargues'schen Arbeiten Raum finden und es musste eine genauere Auseinandersetzung derselben mit Recht einer Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

In den bekannten französischen Arbeiten von Chasles, Poudra und St. M. Marie sind die Ausführungen bezüglich Desargues teils unvollständig, teils auch nicht einwandsfrei dargestellt. Wieder andere Werke enthalten zu wenig, als dass es auch nur annähernd möglich ist, sich über Desargues' Leistungen eine genügende Vorstellung zu bilden.

Somit bleibt jedem, der die in Frage stehenden Verdienste Desargues' um die projectivische Geometrie kennen lernen will, nur die äusserst mühsame Lectüre der Originalwerke desselben übrig, namentlich des „Brouillon project.“ Volle zwei Jahrhunderte galt bekanntlich dies merkwürdige Buch für verloren. Erst im Jahre 1845 fand Chasles durch einen glücklichen Zufall eine Abschrift desselben, die im Jahre 1679 von De La Hire gefertigt worden war.

Da es aber nicht Aufgabe des Historikers ist, die wissenschaftliche Tätigkeit einer hervorragenden Persönlichkeit für sich allein zu betrachten, so müsste der Verfasser auch die Bedeutung Desargues' und seine Zeit, sowie den Einfluss seiner Leistungen auf die spätere Entwicklung der projectivischen Geometrie in's Auge fassen. Dabei ergaben sich enge und interessante Beziehungen zu Pascal, Fermat und De La Hire.

Die vorliegende Abhandlung ist ein Auszug der von der allgemeinen Abteilung der K. bayr. technischen Hochschule in München 1896 mit vollem Preis gekrönten Arbeit des Verfassers über Desargues.

---

§ 1.

Geometrische Grundgedanken.

Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass bereits Desargues diejenigen Fundamentalbegriffe ausdrücklich eingeführt hat, die man heutzutage als die geometrischen Grundgebilde erster Stufe bezeichnet.

Wir fassen seine Gedanken folgendermassen kurz zusammen:

1) Mehrere Geraden, die alle durch einen festen Punkt 0 gehen, bilden eine „ordonnance de droites, der Punkt *O* heisst: „but de l'ordonnance.“ [1])

Ebenso bildet man eine Schar von Ebenen, die durch eine feste Gerade 0 gehen, eine „ordonnance de plans,“ die feste Gerade 0 heisst: „Aissieu de l'ordonnance.“

3) Wenn durch verschiedene Punkte einer Geraden 0 eine Serie von Geraden hindurchläuft, so heisst jene Gerade 0, auf welcher die verschiedenen Punkte „noeuds“ liegen, „tronc.“

4) Eine Schar von parallelen Geraden ist als ein Strahlenbüschel zu betrachten, dessen Centrum im Unendlichen liegt. Oder: Einen Punkt 0 mit dem unendlich fernen Punkt einer gegebenen Geraden verbinden heisst: durch den Punkt 0 zu derselben eine Parallele legen [2])

5) Eine Schar von parallelen Ebenen ist als ein Ebenenbüschel zu betrachten, dessen Achse im Unendlichen liegt.

6) Jede Gerade geht nach 2 Seiten in das Unendliche und schliesst sich dort. Jede Gerade kann als Kreis betrachtet werden, dessen Mittelpunkt in das Unendliche gerückt ist.

---

1) Vergleiche: Oeuvres de Desargues par Poudra deux tomes, Paris 1864. Wir citiren dieses Werk mit Herrn Cantor stets als Desargues I. oder II. Die Begriffe finden sich in der angegebenen Weise auf Seite 104—107 erklärt.

2) Desargues I. pag. 205.

3) Ebenda. I. pag. 107, 108, 224.

Dass die Desargues'sche Vorstellung über den Parallelismus in jener Zeit völlig neu war, dürfte wol daraus zur Genüge hervorgehen, dass sich Descartes in einem Briefe an Desargues in günstigem Sinne darüber äussert, und hätte ersterer die Angelegenheit wol ignorirt, wenn die fragliche Ansicht bereits in der damaligen Zeit üblich gewesen wäre. Lettres de Descartes, Poudra t. II. pag 134.

Eine Hauptschwierigkeit beim Studium der Werke Desargues besteht darin, dass derselbe nicht nur eine Reihe neuer Begriffe,' sondern auch eine Menge neuer Bezeichnungen für dieselben einführte, die aber ebensowenig, wie diejenigen Vietas sich forterhielten, weshalb wir im folgenden nur die notwendigsten anführen und gebrauchen werden.

Weit wichtiger ist es zu betonen, dass Desargues die Tragweite der von ihm neu aufgestellten Begriffe vollständig erfasst und mit ihnen zu operiren versteht, indem er in seiner Involution durch eindeutige Zuordnung der Elemente einer Punktreihe den Grundgedanken der projectivischen Geometrie zum ersten Male verwirklicht. Seine Betrachtungsweise der Involution wollen wir im folgenden Paragraphen nur insoweit klarzulegen versuchen, als sie zum Verständniss der darauf aufgebauten Kegelschnittstheorie notwendig ist.

§ 2.

Die Theorie der Involution.

(a) Definition des Arbre.[2])

Trägt man auf einer Geraden, von einem festen Punkte 0 aus, Streckenpaare ($0a$, $0a_1$ — 8b, Cb_1, $0c$ — $9c_1$) ab, deren Producte constant sind, so bilden die Punkte $aa_1 - bb_1 - cc_1$ einen Arbre.

Hieraus ersieht man, dass Desargues' Definition des Arbre identisch ist mit der heutigen Bestimmung der Involution, wenn man vom Involutionsmittelpunkt 0 ausgeht, welchem Desargues den Namen: souche beilegt.

Dabei wird jedoch von vornherein bestimmt, dass alle Streckenpaare $0a$, $0a_1$ u. s. w. entweder nach verschiedenen Seiten oder nach der gleichen Seite von 0 abgetragen werden. Darnach erhält man beziehungsweise einen Arbre mit eingeschlossen- oder getrennt liegender Souche. In dem ersten Falle greifen die Strecken

---

Wenn man die Frage aufwirft, wie denn Desargues zu seiner so neuen und fruchtbaren Anschauung über den Parallelismus gekommen ist, muss man wol zur Beantwortung derselben auf die Perspective vom Jahre 1636 zurückgreifen. Desargues I. pag. 80 u. ff.

1) Desargues I. pag. 112.

entsprechender Punkte $aa_1 - bb_1 - cc_1$ übereinander, im zweiten Falle liegen sie getrennt. [1])

(b) Metrische Relationen für die einzelnen Strecken eines Arbre.

Desargues' Bestreben geht nun dahin, eine Gleichung zu finden, welche zwischen den einzelnen Entfernungen der verschiedenen Punkte eines Arbre statthat, um den Punkt 0 (d. h. den Involutionsmittelpunkt) zu eliminiren. Dabei gewinnt er folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{0a}{0c} = \frac{0c_1}{0a_1} = \frac{ac_1}{a_1c} \text{ [2])}$$

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{0c_1}{0a} = \frac{a_1c_1}{ac}$$

Durch Division folgt

$$\text{II.} \quad \frac{0a}{0a_1} = \frac{ac_1 \cdot ac}{a_1c_1 \cdot a_1c}$$

und analog

$$\frac{0a}{0a_1} = \frac{ab_1 \cdot ab}{a_1b_1 \cdot a_1b}$$

---

1) La souche est engagée entre . . . Desargues I, pag;115, 116.
La souche est degagée entre . . . „ „ ;
les deux noeus de chacune des couples aa_1 se trouvent meslez aux deux noeus des autres couples: bb_1—cb_1. Desargues I. pag. 116
les deux noeus de chacune des couples aa_1—bb_1—cc_1 se trouvent des meslez des deux noeus de chacune des autres couples. Desargues I. pag. 116.

2) Beweis:

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{0c_1}{0a} = \frac{0a_1 + a_1c_1}{0c + ca}$$

$$\frac{0a_1}{0a_1 + a_1c_1} = \frac{0c}{0c + ca}$$

und hieraus

$$\frac{0a_1}{0a_1 + a_1c_1 - 0a_1} = \frac{0c}{0c + ca - 0c}$$

d. h.

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{a_1c_1}{ac}$$

ebenso die andere Gleichung.

Die Vergleichung liefert:

$$\text{III.} \quad \frac{ab \cdot ab_1}{a_1b \cdot a_1b_1} = \frac{ac \cdot ac_1}{a_1c \cdot a_1c_1}$$

Dadurch ist offenbar der Arbre unabhängig von der Souche dargestellt und ergibt sich folgende

(6) Definition der Involution, unabhängig vom Mittelpunkt.

Wenn drei Punktepaare $aa_1 - bb_1 - cc_1$ so auf einer Geraden liegen, dass die einzelnen Punkte gegenseitige Entfernungen besitzen, die der Gleichung III. Genüge leisten, so nennt man diese Punktlage eine Involution.[1]) Vorausgesetzt bleibt aber immer noch die Verteilung der Punkte, wie sie unter α hervorgehoben worden ist. Die daraus sich ergebende strenge Einteilung in zwei verschiedene Involutionen fällt mit der modernen Unterscheidung einer elliptischen und hyperbolischen Involution völlig zusammen, und später werden wir auch noch der parabolischen begegnen. Auf die Involutionen lassen sich sämtliche Gesetze des Arbre, wie sie in den Gleichungen I. und II. niedergelegt sind, anwenden.

Wir brauchen kaum noch hinzuzufügen, dass die Gleichung III. genau dieselbe ist, wie diejenige, die heutzutage die Involution durch die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse definirt.

(d) Sätze über die Involution.

1) Eine Involution erscheint gegeben, wenn man 2 Punktepaare, $aa' - cc_1$ derselben kennt.[2])

Denn wenn O die Souche ist, so kann man dieselbe vermittelst folgender Gleichungen eindeutig[3])

$$\frac{Oa}{Oc} \; \frac{a_1c_1}{a_1c} \quad \text{und} \quad 4a - Oc = ac$$

---

1) Involution und Arbre decken demnach denselben Begriff. Es besteht zwischen ihnen nur insofern ein formaler Unterschied, als die Bezeichnung Arbre immer nur dann angewendet wird, wenn die Strecken vom Involutionsmittelpunkt ausgezählt werden.

2) Desargues I. pag. 121.

3) . . . „la souche O est donnée de position . . " Desargues I. pag. 121.

2) Der Involutionsmittelpunkt entspricht dem unendlich weiten Punkt der Punktreihe. [1])

3) Bis hieher führt Desargues seine Untersuchungen für beide Involutionen gemeinsam durch. Zur Beantwortung der Frage aber: Wo liegen diejenigen Punktepaare einer Involution, die von der Souche gleichen Abstand haben? sieht er sich genötigt, in der Untersuchung eine Trennung vorzunehmen.

Bezeichnen x und y diejenigen Punkte, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, so hat man im Falle der Punktlage nach Figur 1a:

$$0x = 0y = \sqrt{0a \cdot 0a_1}$$

(wenn aa_1 ein gewöhnliches Punktpaar vorstellt.)

Hiebei betont Desargues ganz scharf, dass der Punkt x zwei nicht zusammengehörige Punkte bc_1, der Punkt y die Punkte $b_1 c$ repräsentirt, und bezeichnet sie daher als noeus moyens simples. [2]) (Siehe Figur 2a). Durch Specialisirung der allgemeinen Involutionsgleichung erhält man folgende Relation:

$$\frac{a_1x}{a_1y} = \frac{ay}{ax}$$

Der Fall nach Figur 1b liefert wiederum

$$0x = 0y = \sqrt{0a \cdot 0a}$$

wobei Desargues ausdrücklich hervorhebt, dass x das Paar bb_{11} y das Paar ec_1 repräsentirt. Dementsprechend bezeichnet er sie richtig als „noeus moyens doubles [3]), kennt somit die Doppelpunkte der hyperbolischen Involution. (Siehe Figur 2b).)

Ist aa_7 ein gewöhnliches Punktepaar, so geht bei Einführung der Punkte xy in die allgemeine Involutionsbedingung die sehr wichtige Relation hervor:

$$\frac{ax}{ay} = \frac{a_1x}{a_1y}$$

Dieselbe drückt aus, dass ein gewöhnliches Punktepaar aa_1 von den Punkten xy, also von den Doppel-

---

1) Desargues I. pag. 127,

2) Desargues I. pag. 123.

3) Desargues I. pag. 124.

punkten harmonisch getrennt wird, was oben durchaus nicht der Fall war.

(e) Die Vierpunktinvolution. Indem Desargues die besondere Wichtigkeit des soeben behandelten Falles anerkennt, nennt er die Punktelage $aa_1 - xy$ (Fig. 2 b) eine Vierpunktinvolution und entwickelt eine Reihe von Sätzen, die bei derselben statthaben, eine vollständige Theorie der harmoischen Punkte. Als solche nennt er auch die Punkte x und y ein Paar entsprechende, und bezeichnet in der Erkenntniss, dass ay mit aa_1 gleichberechtigt erscheint, die Mitte p von aa_1 als die reciproke Souche der Vierpunktinvolution. Man hat dann neben

$$0x \,.\, 0y = 0a \,.\, 0a_1 = 0x^2 = 0y^2$$

auch noch

$$pa \,.\, pa_1 = px \,.\, py = pa^2 = pa_1^2$$

Aus den sich hieran anschliessenden Sätzen heben wir nur folgende hervor:

1) Eine Vierpunktinvolution ist gegeben, wenn man ein Punktepaar und den einen Punkt des anderen Paares kennt. [1])

2) Die Endpunkte einer Strecke bilden mit dem Mittelpunkt derselben und dem unendlich fernen Punkt der Geraden, auf welcher sie liegt, eine Vierpunktinvolution. [2])

3) Hat man eine Vierpunktinvolution $(aa_1 - xy)$, deren Souche 0 ist, so sind damit sofort zwei neue allgemeine Involutionen gegeben. Nämlich

$xy - 0a_1$ mit Souche a und

$xy - 0a$ mit Souche a_1

Desargues beschliesst die Theorie seiner Punktinvolution mit einem Satze, der für später von besonderer Wichtigkeit ist und deshalb angeführt werden möge.

4) Hat man auf einer Geraden drei Punktepaare einer gewöhnlichen Sechspunktinvolution $(aa_1 - bb_1 - ee_1)$, sowie ein weiteres Punktepaar xy, das mit den beiden ersten Paaren $(aa_1 - bb_1)$ je eine Vierpunktinvolution bildet, so gilt dies auch bezüglich des letzten Paares ee_1.

---

1) Desargues I. pag. 134.

2) Desargues I. pag. 136.

Hieran schliesst sich eine ebenso vollständig durchgeführte Behandlung der

(f) Strahleninvolution,[1]) welche folgendermassen definirt wird: Laufen durch drei Punktepaare einer Involution drei Strahlenpaare, so hat man eine Strahleninvolution (ramé d'un arbre). Auf diese Definition folgt direct der Hauptsatz von der Invarianz der Involution bei Projection:

„Jede beliebige Gerade wird von den 6 Strahlen des Büschels nach 6 Punkten einer Involution geschnitten.“ [2])

Infolge der umständlichen Schreibweise Desargues' gestaltet sich der Beweis dieses wichtigen Satzes, von dem man sagen kann, dass er das Fundament der vorliegenden Kegelschnittstheorie ist, breit und unübersichtlich; wir glauben denselben deshalb mitteilen zu müssen, weil er historisch interessant ist und ein beredtes Zeugniss von dem geometrischen Scharfsinn unseres Mathematikers ablegt.

Zunächst ist der Satz für den speciellen Fall ohne weiteres klar, „dass das Büschelcentrum im Unendlichen liegt“ d. h. wenn die einzelnen Strahlen parallel laufen. [3]) Für den allgemeinen Fall jedoch ist folgende Figur (Fig. 3) zu entwerfen: Die Involution $aa_1 - bb_1 - cc_1$ wird durch das Strahlenbüschel K projicirt, und die beliebige Gerade M liefert auf den Strahlen derselben drei weitere Punktepaare $AA_1 - BB_1 - CC_1$, von denen nachzuweisen ist, dass sie eine Involution bilden.

Zum Beweise zieht nun Desargues die Hilfslinie cC_1. welche auf den Strahlen bezüglich der Punkte $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1$ liefert.

Nunmehr wird auf die folgenden Dreiecke der Transversalensatz des Menelaos angewendet. Das Dreieck cCC_1 von der Transversale KB_1 geschnitten, liefert die Gleichung: [4])

$$1) \qquad \frac{B_1C}{B_1C_1} = \frac{KC}{Kc} \cdot \frac{\beta_1 c}{\beta_1 C_1}$$

Das nämliche Dreieck cCC_1 von KB geschnitten, ergibt:

1) Desargues I. pag. 146, 147.

2) Desargues I. pag. 147.

3) Desargues I. 147.

4) Desargues, der diesen Satz dem Ptolemäus zuschreibt, da er ihn jedenfalls aus dem Almagest kennt, wendet ihn, den Griechen folgend, beständig in der obigen Form, der der zusammengesetzten Verhältnisse, an.

$$2) \qquad \frac{BC}{BC_1} = \frac{KC}{Kc} \cdot \frac{\beta c}{\beta C_1}$$

1) und 2) verbunden, ergeben:

$$\text{I)} \qquad \frac{BC \cdot B_1 C}{BC_1 \cdot B_1 C_1} = \frac{\beta c \cdot \beta_1 c}{\beta C_1 \cdot \beta_1 C_1} \cdot \left(\frac{KC}{Kc}\right)^2$$

Schneidet man das Dreieck $cc_1 C_1$ bzhw. durch die Transversalen Kb_1 und Kb, so erhält man:

$$3) \qquad \frac{\beta_1 c}{\beta_1 C_1} = \frac{b_1 c}{b_1 c_1} \cdot \frac{Kc_1}{KC_1}$$

$$4) \qquad \frac{\beta c}{\beta C_1} = \frac{bc}{bc_1} \cdot \frac{Kc_1}{KC_1}$$

und hieraus:

$$\text{II} \qquad \frac{\beta c \cdot \beta_1 c}{\beta C_1 \cdot \beta_1 C_1} = \frac{bc \cdot b_1 c}{bb_1 \cdot b_1 c_1} \cdot \left(\frac{Kc_1}{KC_1}\right)^2$$

I. und II. verknüpft, liefern:

$$\text{A.} \qquad \frac{BC \cdot B_1 C}{BC_1 \cdot B_1 C_1} = \left(\frac{KC \cdot Kc_1}{Kc \cdot KC_1}\right)^2 \cdot \frac{bc \cdot b_1 c}{bc_1 \cdot b_1 c_1}$$

In dieser Gleichung A. erscheint die Buchstabengruppe $CC_1 BB_1$ besonders ausgezeichnet. Durch Auszeichnung der Gruppe $aa_1 AA_1$ entsteht bei der Beibehaltung der Hülfslinie cC_1 die Gleichung:

$$\text{B.} \qquad \frac{AC \cdot A_1 C}{AC_1 \cdot A_1 C_1} = \left(\frac{KC \cdot Kc_1}{Kc \cdot KC_1}\right)^2 \cdot \frac{ac \cdot a_1 c_1}{ac_1 \cdot a_1 c_1}$$

Indem nun nach Voraussetzung:

$$\frac{ac \cdot a_1 c}{ac_1 \cdot a_1 c_2} = \frac{bc \cdot b_1 c}{bc_1 \cdot b_1 c_1}$$

ist, ergibt sich aus A. und B. die Beziehung:

$$\frac{AC \cdot A_1 C}{AC_1 \cdot A_1 C_1} = \frac{BC \cdot B_1 C}{BC_1 \cdot B_1 C_1}$$

Damit ist aber gemäss Hauptgleichung III. auf Seite 124 die Behauptung bewiesen.

Beachtungswert scheint uns auch noch die Bemerkung Desargues"[1])

---

1) Desargues I. pag. 151.

Läuft die schneidende Transversale M parallel zu einem der projicirenden Strahlen, etwa Ka, so schneidet der entsprechende Strahl Ka_1 die Gerade M in der Souche, der auf M entstehenden Involution.

Von dieser Behandlung der allgemeinen Sechsstrahleninvolution geht er nun auf die Theorie der

(g) Vierstrahleninvolution [1]) über, die dadurch entsteht, dass man eine Vierpunktinvolution $(aa_1 - xy)$, also eine harmonische Punktlage, von einem Centrum K aus projicirt. Wir nennen dieselbe heutzutage ein harmonisches Strahlenbüschel. (Fig. 4.)

Von diesem Teile der Desargues'schen Untersuchungen erwähnen wir der Kürze halber nur die einzelnen Sätze, obgleich noch manches Interessante bei der Beweisführung zur Sprache kommen könnte.

Heissen in Analogie mit dem Früheren die Strahlen $\alpha\alpha_1 - \xi\eta$ entsprechende, so hat man:

Läuft die Transversale M parallel zu einem Strahl α_1, so halbirt in der Vierstrahleninvolution der entsprechende α die von den beiden anderen Strahlen ξ und η auf ihr ausgeschnittene Strecke. Dieser Satz gilt auch umgekehrt. [2])

Auch das Rechtwinkelpaar einer Vierstrahleninvolution findet Erwähnung in dem Satze: (Fig. 5.)

Stehen zwei entsprechende Strahlen aufeinander senkrecht, so halbirt jeder derselben den Winkel zwischen dem anderen Strahlenpaar. Auch wird die Umkehrung angeführt.

Zieht man in einem Dreieck ABC durch die Mitte M von AB eine beliebige Gerade MY, welche BC in Z, AC in Y trifft, zieht man ferner $CN \parallel ZX \parallel AB$, so bilden $AC - XY$ und $MN - YZ$ je eine Vierpunktinvolution.

Mit diesen verschiedenartigen Sätzen haben wir die Mittel gewonnen, um im folgenden Paragraphen die eigenartige Behandlung der Kegelschnittstheorie schildern zu können, die Desargues geschaffen hat.

---

1) Desargues I. pag. 152.

2) Man beachte die kühnen Schlussweisen des Desargues im Beweise für die Umkehrung. Weil die Mitte m auf α conjugirt ist zu dem unendlich fernen Punkte $\overset{\infty}{m}_1$ auf α_1, so muss $M \parallel \alpha_1$ laufen.

§ 3.

Kegelschnitttheorie.

(a) Definition des Kegels. Der Kegel entsteht durch Bewegung einer Geraden G, die, stets durch einen festen Raumpunkt S gehend, längs einer gegebenen Kreislinie dahingleitet. Liegt S im Unendlichen, so entsteht der Cylinder,[1]) liegt S in der Ebene des Kreises, so erhält man einen Strahlenbüschel.

(b) Die einzelnen Kegelschnitte. Eine Ebene E_0, die durch die Spitze des Kegels geht, trifft denselben entweder in einem Punkte oder in 2 Geraden, die in eine einzige zusammenfallen, wenn E_0 die Fläche berührt. Jede andere Ebene E trifft den Kegel nach einem Kegelschnitt. Und zwar:

Läuft die Kegelerzeugende G während ihrer Bewegung um den Kreis niemals parallel zu E, so erhält man eine im Endlichen sich schliessende Schnittfigur[2]), die Ellipse; läuft G während der Bewegung um den Kreis nur einmal parallel zu E, so ist das Schnittergebniss eine im Unendlichen sich schliessende Curve[3]), die Parabel; läuft G während der Bewegung um den Kreis zweimal parallel zu E, so erhält man als Schnittfigur eine sich im Unendlichen in zwei congruente, gegeneinandergekehrte Hälften spaltende Figur, die Hyperbel.[4]) Der Cylinder wird im allgemeinen nach einer Ellipse geschnitten.

Diese aus einer völlig neuen Auffassungsweise entstandenen Sätze charakterisiren die drei Kegelschnittsarten nach der Anzahl ihrer unendlichfernen Punkte.

Die Kegelschnitte werden von je einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten. Fallen dieselben in einen zusammen, so berührt die Gerade den Kegelschnitt.

Nicht viel verschieden von der oben geschilderten Entstehungs-

---

1) „Le cylindre et le cone sont deux sougenres d'un surgenre, ici nommé seauleau . . ." Desargues I. pag, 159.

2) une ligne courbe, laquelle à distance finie rentre et repasse en soi-même. Desargues I. pag. 161.

3) „une ligne courbe laquelle à distance infinie rentre et repasse en soi-même — " Desargues I. pag. 162.

4) „une ligne courbe, laquelle à distance infinie se mipartit en deux égales et semblables moitiés . . ." Desargues I. pag. 162.

weise der Kegelschnitte ist diejenige, von welcher Oldenburg in einem Briefe an Leibniz berichtet [1]) Nach ihm soll sich dieselbe in den bis heute noch nicht wieder aufgefundenen Leçons des Tenèbres von Desargues befinden. Sie lautet kurz zusammengefasst:

Projicirt man vom Mittelpunkte einer Kugel aus einen kleinen Kreis derselben auf eine ihrer Tangentialebenen, so erhält man entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder endlich eine Hyperbel, jenachdem der zur genannten Ebene parallele Hauptkreis der Kugel den kleinen Kreis nicht trifft, denselben berührt oder endlich in zwei Punkten schneidet.

Nach diesen einleitenden Definitionen der Kegelschnitte wendet sich Desargues zur Aufstellung jenes Hauptsatzes, der heute noch seinen Namen trägt:

(c) Der Satz des Desargues. Derselbe wird folgendermassen ausgesprochen: Laufen durch vier Punkte einer Ebene drei Paare von Geraden, sowie auch ein beliebiger Kegelschnitt, so schneidet irgend eine Transversale diese Figur nach vier Punktepaaren einer Involution.

Der Beweis zerfällt in drei Abteilungen und wird im wesentlichen mit Hülfe des Transversalensatzes von Menelaos geführt. (Fig. 7.)

Das Dreieck pp_1f wird bzhw. von den Transversalen bc, de, bd und ec geschnitten, und es ergeben sich sofort folgende Gleichungen:

1) $$\frac{ip}{ip_1} = \frac{cf}{cp_1} \cdot \frac{bp}{bf}$$

2) $$\frac{i_1p}{i_1p_1} = \frac{df}{dp_1} \cdot \frac{ep}{ef}$$

3) $$\frac{gp}{gp_1} = \frac{cf}{cp_1} \cdot \frac{cp}{ef}$$

4) $$\frac{g_1p}{g_1p_1} = \frac{bp}{bf} \cdot \frac{df}{dp_1}$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1) und 2), sowie 3) und 4) folgt unmittelbar:

---

1) Leibnizens Mathematische Schriften, ed. J. C. Gerhardt· B. I. Abt. I pag. 40.

$$\text{I.} \qquad \frac{ip \cdot i_1p}{ip_1 \cdot i_1p_1} = \frac{gp \cdot g_1p_1}{gp_1 \cdot g_1q_1}$$

d. h. doch die drei Punktepaare $ii_1 - gg_1 - pp_1$ bilden eine Involution[1]).

Liegen nun die vier, ursprünglich willkürlichen Punkte: *bcde* auf einem Kreise, so folgt durch wiederholte Anwendung des Potenzsatzes:

$$\frac{ip \cdot i_1p}{ip_1 \cdot i_1p_1} = \frac{cf}{bf} \cdot \frac{df}{ef} \cdot \frac{bp \cdot ep}{cp_1 \cdot dp_1} = \frac{bp \cdot ep}{cp_1 \cdot pp_1} = \frac{lp \cdot l_1p}{lp_1 \cdot l_1p_1}$$

und daraus:

$$\frac{ip \cdot i_1p}{ip_1 \cdot i_1p_1} = \frac{lp \cdot l_1p}{lp_1 \cdot l_1p_1} = \frac{gp \cdot g_1p}{gp_1 \cdot g_1p_1}$$

Diese Gleichungen definiren die drei Involutionen

$$(ii_1 - ll_1 - pp_1), \quad (gg_1 - ll_1 - pp_1) \quad \text{und} \quad (ii_1 - gg_1 - pp)$$

welche aber zusammenfallen müssen, weil sie je zwei Punktepaare gemeinsam haben.

Um nun endlich den Satz für einen beliebigen Kegelschnitt nachzuweisen, bedient sich Desargues der Methode der Projection, die hier zum ersten Male auftritt und zeigt, dass er den Charakter der Projectivität seiner Involution (d. h. die Invarianz) vollkommen richtig erkannt hat. Auch hebt er die Wichtigkeit und Verwendbarkeit dieser seiner Methode ausdrücklich hervor und kommt noch an anderer Stelle darauf zu sprechen. [2])

Dieser wichtige Satz bildet nun für Desargues das Fundament zu einer vollständigen Theorie von

(d) Pol und Polare, die bisher immer de La Hire zuge schrieben wurde. Pol und Polare werden durch die bekannte harmonische Eigenschaft, die, wie wir schon wissen, Desargues als die Vierpunktinvolution bezeichnet, sowol in Bezug auf ein Geradenpaar als auch in Bezug auf einen Kegelschnitt definirt.

---

1) Dieser specielle Fall des Satzes für das Vierseit ist bekanntlich in seiner Umkehrung bereits von Pappus im 130ten Satze des 8. Buches der Collectiones math. angegeben worden. Jedoch tritt statt der obigen achtgliedrigen Bedingungsgleichung die sechsgliedrige auf.

2) Desargues I. pag. 176 ff., pag. 493.

Was den Beweis dafür anlangt, dass die sämtlichen harmonischen Punkte zum Pol f (bei Desargues but de l'ordonnance) bezüglich der Schnittpunkte mit den eben genannten Figuren auf einer Geraden, der Polaren des Punktes (traversale d'une ordonnance au but f) liegen, so wird derselbe zunächst für das Geradenpaar (AA_1) geliefert und hierauf vermittelst des Desargues'schen Satzes auf einen beliebigen Kegelschnitt (K) ausgedehnt. (Fig 8.)

Um die Polare des Punktes f in Bezug auf das Geradenpaar (AA_1) zu construiren, zieht Desargues zwei beliebige Strahlen fcb und fde, welche auf A und A_1 bzhw. die Punkte cd und be liefern. Der Schnittpunkt m der Diagonalen ce und bd mit n, dem gemeinsamen Punkt von A und A_1, verbunden, liefert die verlangte Polare. Die Verbindungslinie fm schneidet A und A_1 in den Punkten x und y.

Wendet man in Bezug auf das Dreieck nxy den Satz von Menelaos an, indem man $bd - ce - de - bc$ bzhw. als schneidende Transversalen ansieht, so hat man:

1) $$\frac{mx}{my} = \frac{dx}{dn} \cdot \frac{bn}{by}$$

2) $$\frac{mx}{my} = \frac{cx}{cn} \cdot \frac{cn}{cy}$$

3) $$\frac{fx}{fy} = \frac{dx}{dn} \cdot \frac{en}{ey}$$

4) $$\frac{fx}{fy} = \frac{cx}{cn} \cdot \frac{bn}{by}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\left(\frac{mx}{my}\right)^2 = \left(\frac{fx}{fy}\right)^2 \quad \text{d. h.} \quad \frac{mx}{my} = \frac{fx}{fy}$$ [1])

Liegen aber hiernach mf und xy harmonisch, so muss auch ein beliebiger Strahl $fk - ii_1$ vier harmonische Punkte liefern.

Geht nun durch die vier Punkte $bzde$ ein ganz beliebiger Kegelschnitt, so ist nach Desargues die bereits construirte Linie auch die Polare in Bezug auf den Kegelschnitt. Denn auf dem beliebigen Strahl fl, der den Kegelschnitt in l und l_1 trifft, liegt die Involution $(ii_1 - gg_1 - ll_1)$, deren Punktepaare $(ii_1 - gg_1)$ von f und k harmo-

---

1) Man erkennt sehr leicht, dass dieser bekannte Satz ein specieller Fall von dem unter lit. c. dieses Paragraphen gegebenen Satze über das Vierseit ist.

nisch getrennt werden. Die beiden letztgenannten Punkte sind somit die Doppelpunkte obiger Punktreihe, so dass sie auch zum Punktepaar ll_1 harmonisch liegen müssen, was aber zu beweisen war.

Daran schliesst sich sofort eine Reihe von

(e) Sätzen über Pol und Polare, von denen wir die wichtigsten hervorheben wollen:

1) Es findet sich der Hinweis, dass die Linie mf (Figur 8) Polare zu n, die Linie nf Polare zu m sei. [1]).

2) Diejenigen Geraden, welche den Pol f mit den Schnittpunkten s und t der Polaren mit dem Kegelschnitt verbinden, berühren denselben. [2])

3) Die Pole der Geraden eines Büschels liegen auf der Polaren seines Centrums und umgekehrt. [3])

4) Die Polaren der Punkte einer Geraden laufen durch den Pol derselben. [4])

Es ist kaum nötig darauf hinzuweisen, dass die beiden letztgenannten Sätze das Princip der reciproken Polaren enthalten.

5) Wie ferner Desargues jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts eine einzige Polare bezüglich desselben zuordnet [5]) und auch umgekehrt jeder Geraden nur einen Pol, so weist er auch jeder Geraden eine ganz bestimmte Involution [6]) zu, nämlich die der Punkte m und n, also die Involution der conjugirten Pole. Lässt man n längs der Geraden ns variiren, so bekommt man immer andere und andere Lagen der Punkte (mn). Und zwar gilt hierüber folgendes:

(α) Jedem Punkte f ausserhalb eines Kegelschnitts gehört eine Polare zu, die den Kegelschnitt in zwei Punkten trifft, und die dieser gemäss (5) zugewiesene Involution ist hyperbolisch [7]).

---

1) Desargues I. pag. 18d.

2) Desargues I. pag. 192.

3) Desargues I. pag. 191.

4) Desargues I. pag. 191.

5) Desargues I. pag. 192.

6) Desargues I. pag. 194, 195.

7) „l'arbre est d'espèce à souche dégagée.“ Desargues I. pag. 195.

(β) Jedem Punkte im Innern eines Kegelschnitts gehört bezüglich desselben eine Polare zu, die denselben nicht schneidet, und die dieser gemäss (5) zugewiesene Involution ist elliptisch [1])

γ) Der Pol einer Tangente des Kegelschnitts bezüglich desselben liegt im Berührpunkt, und die der Tangente gemäss (5) zugewiesene Involution ist parabolisch. [2])

Desargues hebt also die parabolische Involution ausdrücklich als eine dritte Anordnung der involutorischen Punktlage hervor.

6) (Siehe Figur 9.) Jeder Strahl ($s_1 s_1' s_1''$, . . .) eines Strahlenbüschels f trifft einen Kegelschnitt in Punkten (ab, $a'b'$, $a''b''$) so, dass ihre Verbindungsstrahlen mit einem festen Punkte p auf dem Kegelschnitt eine Strahleninvolution ($\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta''$ . . .) bilden[3])
Und die Umkehrung:

7) (Fig. 9.) Die sich entsprechenden Strahlen einer Involution ($\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta''$ . . .). deren Centrum (p) auf einem Kegelschnitt liegen, schneiden denselben in Punkten: ($ab - a'b' - a''b''$ . . .), deren Verbindungslinien stets durch einen festen Punkt laufen. [4])

8) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts wird von Desargues als Pol der unendlich fernen Geraden definirt. [5])

(f) Ausdehnung der Polarentheorie auf den Raum. Desargues begnügt sich aber nicht damit eine vollständige Polarentheorie der Kegelschnitte zu entwerfen, sondern er dehnt dieselbe sogar auf den Raum aus, indem er die Polarebene (plan

---

1) „l'arbre est d'espèce à souche engagée". Desargues I. pag. 193.

2) „Cependant on remarquera qu'entre les deux espèces de conformation, d'arbre, il y en a une troisième, en la quelle chaque couple de nous toujours un est uni à la souche, . . . et cette espece de conformation d'arbre est mitoyenne entre autres les deux, à souche engagée et à eouche dégagée". Desargues I. pag. 194. 195.

3) Desargues I. pag. 194.

4) Die Sätze 6) und 7) führten später, wieder neu gefunden, zur Betrachtung der krummen involutorischen Punktreihen.

5) „Quand en un plan, aucun des points d'une droite n'y est à distance finie, cette droite y est à distance infinie. D'autant qu'en un plan le point nommé centre d'une coupe de rouleau, n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnance de droites, il ne doit être jamais ici parlé de centre de coupe de rouleau." Wir glaubten auf Grund dieser Stelle (Desargues I. pag. 166, 168) den Satz (8) in der angegebenen Weise formuliren zu dürfen. Vergleiche auch Des. I. pag. 168 ff.

traversal des droites d'une ordonnance) in Bezug auf eine Kugel nach Analogie der Verhältnisse in der Ebene definirt.[1]) Ja, es wird sogar der folgende Satz deutlich ausgesprochen: Bewegen sich verschiedene Geraden, die alle je einen festen Punkt in einer gegebenen Ebene besitzen, um eine Kugel, so sind die Ebenen der dabei durchlaufenen Berührungskreise die Polarebenen zu jenen festen Punkten; überdies gehen diese alle durch den Pol der ursprünglich gegebenen Ebene.

Dazu fügt Desargues nachfolgende merkwürdige Stelle:

„Eine ähnliche Eigenschaft findet sich auch in Bezug auf andere Körper, die zur Kugel in dem nämlichen Verhältniss stehen, wie die Ovale oder Ellipsen zum Kreise, aber es wäre hierüber zuviel zu sagen, wenn man nichts dabei übersehen wollte.“ [2])

Darin scheint zum mindesten eine Vorahnung der Collineationsverwandtschaft zwischen den Flächen zweiten Grades und der Kugel angedeutet zu sein.[3])

(g) Eine wichtige Anwendung, die Desargues von der Polarentheorie macht, und auf welche wir später noch zurückkommen werden, wollen wir hier nicht übergehen. Es handelt sich darum, den Mittelpunkt, ein paar conjugirter Durchmesser, sowie auch die Tangenten und Asymptoten eines Kegelschnitts zu ermitteln, der dadurch entsteht, dass eine gegebene Kegelfläche mit kreisförmiger Basis durch eine beliebige Ebene E geschnitten wird. Desargues verfährt folgendermassen: Durch die Spitze f des Kegels legt er eine Hülfsebene E_0 parallel zu E, welche die Kreisebene in S_0 trifft, während E dieselbe in S schneiden möge. Der Pol von S_0 bezüglich des Kreises sei p, und die ihr gemäss Satz 5 auf Seite 134 zugehörige Involution: (mn, $m'n'$; $m''n''$ u. s. w.) (Fig. 10a). Die Verbindungslinie der Kegelspitze f mit dem Pol p ist Achse eines

1) Desargues I. pag. 214.

2) Desargues I. 124, 215.

3) Aehnlich drückt sich Poncelet, ebenfalls anschliessend an die Ebene in seinem Traité des propriôtés projectives des figures t. I. pag. 125 aus, indem er sagt: Uebrigens lässt sich die Theorie der reciproken Polaren ohne Mühe auf Raumfiguren ausdehnen, indem man den Kegelschnitt durch eine beliebige Fläche zweiten Grades ersetzt, ich trete aber nicht in den Gegenstand dieses Capitels ein, das uns zu lange aufhalten würde u. s. w. u. s. w.

Ebenenbüschels,[1]) die auf der gegebenen Ebene E den Mittelpunkt des entsprechenden Kegelschnitts ausscheidet; Ebenenpaare des Büschels, welche durch zwei conjugirte Punkte der Involution auf S_0 gehen, schneiden in E ein Paar conjugirter Durchmesser aus[2]), deren Endpunkte in der einfachsten Weise bestimmt werden können. Auch die Tangenten und Asymptoten, welch' letztere bei dieser Gelegenheit wol zum ersten Male als Durchmesser und Tangenten in den unendlich weiten Punkten betrachtet werden, lassen sich mit Hülfe der construirten Involution ermitteln, wenn auch die Construction der letzteren Elemente nicht besonders scharf angegeben ist.

Um in der gegebenen Figur 10a, die in Orthogonalprojectionen den Vorzug illustriren soll, einen Punkt des entstehenden Kegelschnitts zu finden, ziehen wir die Gerade mp, legen durch diese und die Kegelspitze f eine Ebene, die den Kegel in dem Dreieck $\delta\beta f$ trifft; die Schnittlinie Mb derselben Ebene mit der gegebenen Ebene E (Spuren S und T) muss parallel laufen zu mf, welche doch in der Hülfsebene E_1 (Spuren $S_0 T_0$) liegen muss; Mb schneidet das Dreieck in zwei Punkten des gesuchten Kegelschnitts. Dieselbe Construction mit dem Punkte n ausgeführt, liefert zwei neue Punkte ac. ac und bd sind zugleich conjugirte Durchmesser des sich ergebenden Schnittgebildes, μ ist sein Mittelpunkt.

Lösen wir nun aus der Figur 10a die Figur 10b heraus, und denken uns den ganzen Vorgang in einer Ebene ausgeführt, so steht eine Construction vor uns, die nach der bisherigen Ansicht von De La Hire im Jahre 1673 in seinen Planiconiques zum ersten Male gegeben wurde und die Transformation des Kreises in einen Kegelschnitt leistet; dass De La Hire durch obigen Gedankengang zu dieser gelangt ist, dürfte wol ausser allem Zweifel sein.

Die übrigen noch im Brouillon enthaltenen Sätze aus der Kegelschnittstheorie beanspruchen nicht das Interesse, wie die angeführten, da sie teilweise kaum verständlich gefasst sind. Dagegen wollen wir noch den bekannten

1) et la droite menée par le sommet du rouleau et ce but p (F) est l'essieu de l'ordonnance de plan etc. Des. I. pag. 196.

2) Aus dieser Construction lässt sich unmittelbar der Satz ablesen, dass die conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts eine Involution bilden, indem dieselben, wie aus der Figur ersichtlich ist, eine Punktinvolution projiciren, oder durch einen involutorischen Ebenenbüschel ausgeschnitten werden.

(h) Satz über perspectivisch liegende Dreiecke[1]) erwähnen, welcher sich in der von Bosse herausgegebenen Perspective des Desargues befindet. Er lautet: Wenn die Geraden (siehe Figur 11) *HDa*, *HEb*, *cED*, *lga*, *lfb*, *abc*, *HlL*, *DgK*, *EfK* sich irgend wie im Raume oder in einer und derselben Ebene gegenseitig durchschneiden, so müssen auch die Punkte *cfg* auf einer Geraden liegen. Desargues gibt zunächst einen Beweis für den Raum, wie er heute noch allgemein üblich ist; für die Ebene gelingt derselbe durch dreimalige Anwendung des Satzes von Menelaos, indem die Dreiecke *DHK*, *KEH* und *DHE* mit den Transversalen *lga*, *bfl* und *abc* geschnitten werden. Man hat dann:

$$1)\quad \frac{gD}{gK} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{lH}{lK}$$

$$2)\quad \frac{fK}{fE} = \frac{lK}{lH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

$$3)\quad \frac{cD}{cE} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{gD}{gK} \cdot \frac{fK}{fE} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

und in Verbindung mit (3) ergibt sich:

$$\frac{cD}{cE} = \frac{gD}{gK} \cdot \frac{fH}{fE}$$

oder

$$\frac{cD}{gD} = \frac{fK}{gK} \cdot \frac{cE}{fE}$$

somit liegen nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos die drei Punkte *c*, *f*, *g* in einer Geraden.

Auch findet sich der Hinweis, dass in solchen Fällen, wo Sätze für den Raum aufgestellt werden, dieselben ohne weiteres eine Deutung in der Ebene zulassen.[2])

---

1) Desargues I. pag. 413.

2) . . . et l'on peut discourir de leurs propriétés sur l'une comme sur l'autre, et par ce moyen se passer de celle du relief en lui substituant celle d'un seul plan." Desargues I. pag. 415.

§ 4.

Rückblick.

Blicken wir noch einmal auf die geführte Untersuchung zurück, so ergeben sich folgende Hauptresultate: Desargues baut bereits die Geometrie im wesentlichen auf der Betrachtung der Grundgebilde erster Stufe auf, wie es nachmals, unabhängig von ihm, J. Steiner getan hat. Wohl findet er nicht die allgemeine projectivische Beziehung dieser Grundgebilde, aber ersetzt dieselbe durch die Involution, die er in ihrer vollständigen Allgemeinheit erkennt und bis in's Detail behandelt. Diese führt ihn zu einer eingehenden Behandlung der Polarentheorie, [1]) die ihrerseits auf den Satz vom Kegelschnitt, dem ein Vierseit eingeschrieben ist, gestützt wird. Ausserdem ist Desargues vollständig vertraut mit dem Begriff der Invarianz geometrischer Eigenschaften bei Projection, und diese allein ermöglicht ihm eine Behandlung der Kegelschnittstheorie, wie sie in einer solchen Allgemeinheit nie vor ihm gegeben worden war. Dafür spricht auch eine Stelle in den Acta Eruditorum vom Jahre 1685 pag. 400, welche lautet: „Desarguesius primus sectiones conicas universali quadam ratione tractare, ac propositiones multas sic enuntiare coepit, ut quaecunque sectio subintelligi posset.“

§. 5.

Desargues' Stellung in seiner Zeit.

Selten wol hat ein Gelehrter so widersprechende Beurteilung von Seiten seiner Zeitgenossen erfahren müssen, wie gerade Desargues.

Von den Grossen angestaunt und bewundert, ward er zu gleicher Zeit von den mittelmässigen Mathematikern, welche in ihrer conservativen Haltung jeder Neuerung in der Geometrie feindlich gegenüberstanden, mit Hass verfolgt, mit Beleidigungen und Schmähungen überschüttet, die bald Desargues jede Lust nahmen, seine eigenartigen gedankenreichen Arbeiten fernerhin zu veröffentlichen. So

---

1) Wir glauben im Vorhergehenden bestimmt nachgewiesen zu haben, dass Desargues tatsächlich der Schöpfer der Polarentheorie ist, die bisher dem De La Hire zugeschrieben wurde. Vergl. z. B. Dr. Lehmann; De La Hire und seine Sectiones Conicae, Abhandlung zum Jahresbericht des Kgl. Gymnasiums zu Leipzig auf das Schuljahr Ostern 1887 bis Ostern 1888, ebenso Ostern 1889 bis 1890; Cantor B. III. pag. 123.

erklärt es sich auch, dass er von dem Jahre 1644 an keine Schrift mehr erscheinen liess.

Schon sein erstes Werk, das über die Perspective handelte, hatte alsbald nach seiner Veröffentlichung gewissen Leuten Veranlassung gegeben, gegen die von Desargues auf diesem Gebiete eingeführte Neuerung der Coordinatenmethode [1]) zu protestiren.

So wurden mehrere Schriften verfasst, die zum Teil den Namen ihres Urhebers trugen, zum Teil anonym herausgegeben wurden. Ein heftiger Streit entbrannte und wurde mit grosser Leidenschaft auf beiden Seiten geführt.

Als Beispiel hierfür sei erwähnt, dass Desargues einem gewissen Curabelle die ungeheure Summe von 100000 Livres anbot, falls es ihm (Desargues) nicht gelingen sollte nachzuweisen, dass der Inhalt der Curabelle'schen Streitschrift zum Teil falsch, zum Teil verleumderisch sei.

Schliesslich wurden dann alle gegen Desargues erschienenen Schmähschriften in einem einzigen Bande vereinigt, der den Titel trug: „Abis charitable sur les diverses oeuvres et feuilles volantes du sieur Girard Desargues Lyonnais Paris 1642, chez Melchior Tavervier.“ [2]) und heute zu den grossen Seltenheiten gehört.

In dieser Sammlung befindet sich auch der Brief eines gewissen Beaugrand, Sekretär des Königs, der sich in seinem ersten Teil mit dem Brouillon Desargues', in seinem zweiten Teile aber mit Studien über den Schwerpunkt beschäftigt, indem er an eine Arbeit des letzteren über Mechanik anknüpft, die dem Kegelschnittswerk beigegeben war, heute aber nicht mehr vorhanden ist.

Der Eindruck, den man nun beim Lesen des Beaugrand'schen Briefes gewinnt, ist der, dass es diesem Secretär weniger darum zu

---

1) Bekanntlich beruht die Desargues'sche Methode, Gegenstände perspectivisch abzubilden einfach darin, dass die einzelnen Ecken derselben punktweise vermittelst ihrer Coordinaten dargestellt werden.

2) Uns lag ein Exemplar der Münchner Hof- und Staatsbibliothek mit der Signatur: 2o. Arch. libr. $47^{m}|_{8}$ vor.

3) Als Beweis für Beaugrands Unfähigkeit zur Beurteilung mathematischer Dinge, führen wir nur folgende Tatsachen an: In dem oben bezeichneten Brief zeichnet er die Einführung der Doppelpunkte einer Involution für völlig überflüssig da dies alle jene selbst machen können, die die ersten Elemente des Euklid studirt haben“. In seiner Geostatik behauptet der Secretär, dass das Gewicht eines Körpers, der sich dem Erdmittelpunkte nähert, abnehmen müsse.

tun war an dem Brouillon sachliche Kritik zu üben, wozu er auch keineswegs die Fähigkeit besass,[1] als vielmehr durch eine spöttisch gehaltene Bemängelung der von Desargues allerdings zahlreich eingeführten Begriffe, wie Souche oder Involution, das Werk verächtlich zu machen und als das Product eines nicht mehr vollständig zurechnungsfähigen Mannes hinzustellen. Aehnlichen Charakter tragen alle übrigen gegen Desargues gerichteten Schmähschriften an sich.

Während nun die wichtigsten Originalarbeiten des grossen Gelehrten verloren gingen und erst nach langer Zeit teilweise wieder aufgefunden werden konnten, haben sich diese Ergüsse des Hasses und der Eifersucht bis auf den heutigen Tag erhalten.

Und gerade sie haben, wenn sie auch zu Desargues's Lebzeiten seinem Ruhm manchen Abbruch taten, dazu beigetragen, die Nachwelt auf den Gelehrten aufmerksam zu machen und manche seiner Entdeckungen zu überliefern.

Im Gegensatze zu diesen unerquicklichen Anfeindungen, die Desargues über sich ergehen lassen musste, steht die wichtige Tatsache, dass die Geistesheroen jener Zeit ihm ihre Hochachtung nach jeder Richtung hin bekundeten.

So schreibt z. B. Fermat an den P. Mersenne, der bekanntlich mit allen bedeutenden französischen Gelehrten jener Epoche in Beziehungen stand:

„Ich achte den Herrn Desargues sehr und zwar deshalb, weil er der selbständige Erfinder seiner Kegelschnittstheorie ist. Sein Büchlein, das, wie Sie sagen, als Jargon[1] gilt, ist mir sehr verständlich und geistreich erschienen."

Ein nicht minder günstiges Zeugniss stellt ihm Carcavy in einem Briefe vom 22. Juni 1656, der an Huyghens gerichtet ist, aus:[2]

„Es ist wahr, dass Desargues einen Styl hat, der von dem der anderen Geometer etwas abweicht. Da er aber die Werke derselben nur wenig gelesen hat, seine Gedanken ihm allein entsprungen sind, und er die Dinge allgemeiner fasst, wie die anderen Geometer, so muss man ihn entschuldigen und aus dem wenigen, das er uns gegeben hat, Nutzen ziehen, der freilich ein grösserer sein würde, wenn Desargues seine Gedanken in anderer Reihenfolge entwickelt hätte."

---

1) So drückt sich Beaugrand in seinem Briefe aus.

2) Ch. Henry: Intermédiance de Carcavy, de Fermat, Pascal et Huyghens. Bull. di Bibliographia et di storia, B. Boncompagni tome 17. S. 330.

Statt noch mehr solcher Stellen anzuführen, weisen wir darauf hin, dass Desargues mit dem berühmten Philosophen und Mathematiker Descartes in inniger freundschaftlicher Beziehung stand, die hauptsächlich in der wissenschaftlichen Tüchtigkeit des ersteren ihre Begründung hatte. Auch versäumt Descartes keine Gelegenheit diese seine Hochschätzung Desargues gegenüber auszusprechen. [1]) Das Bewusstsein der Wertschätzung von Seite solcher Männer, die wie z. B. Descartes nur äusserst sparsam in der Erteilung von Lobsprüchen waren, musste den Gelehrten entschädigen für die vielen Angriffe und Beleidigungen anderer.

Wie es bei neu auftretenden Gedanken immer geht, so waren es eben nur wenige, die Desargues' Ideenflug zu folgen vermochten. Der wesentlichste Grund hiefür liegt wol in seinen Werken selbst, denn sie unterscheiden sich sowol im Styl als auch im Inhalt von allen mathematischen Schriften jener Zeit.'

Obwol seit Vieta eine bedeutende Besserung der algebraischen Bezeichnungs- und Rechnungsweise eingetreten war bediente sich dennoch Desargues beständig derjenigen der Alten, da er diese allein kannte. Auch Decartes hat ihm diesen Mangel vorgehalten, indem er an seinen Freund schreibt: [2])

„Um Jhre Beweise einfacher zu gestalten, wäre es nicht übel angebracht Termen und arithmetische Rechnungsweisen anzuwenden, sowie ich das in meiner Geometrie gemacht habe. Denn es gibt viel mehr Leute, welche wissen, was Multiplication ist, als solche, die verstehen, was ein zusammengesetztes Verhältniss bedeutet.“

Die Klarheit, namentlich des Kegelschnittswerkes, wurde aber auch dadurch wesentlich beeinträchtigt, dass weder eine Einteilung nach Capiteln vorhanden, noch eine logische Aufeinanderfolge in den Entwicklungen eingehalten ist.

Ausserdem mussten die scheinbar willkürlichen Definitionen, wie z. B. bei der Involution, und die nicht immer genügend begründete Notwendigkeit der Einführung neuer Gedanken und Betrachtungen einen nicht sehr geschulten Leser abschrecken.

Ferner hatte zwei Jahre vor dem Erscheinen des Brouillon Descartes seine Geometrie herausgegeben, die die Aufmerksamkeit der damaligen Mathematiker sehr bald von den Methoden ablenkte, die

---

1) Vergleiche z. B. Descartes' Briefwechsel.

2) Lettres de Descartes, Edit Cousin, pag. 88. tome 8. Brief vom 4. Januar 1639. Aehnlich pag. 214, tome 8.

durch die griechischen Mathematiker des goldenen Zeitalters angebahnt und seit etwa zwei Jahrtausenden verfolgt worden sind.

Doch ganz ohne fruchtbaren Einfluss blieben Desargue's neue Gedanken keineswegs. Vielmehr befanden sich unter seinen Schülern Männer, die nach ihren Geisteseigenschaften befähigt waren, die so neuen Anregungen ihres Meisters aufzunehmen und weiter auszubilden. Ein solcher war Abraham Bosse, der später auf der Pariser Hochschule die Perspective und den Steinschnitt lehrte und 1666 lieber seiner Professur entsagte, als dass er der Methode des Desargues abgeschworen hätte, wie das von ihm verlangt wurde. Auch De La Hire, der Vater des berühmten Gelehrten gleichen Namens, von dem wir noch weiter unten sprechen werden, befand sich im Schülerkreis unseres Mathematikers. Der bedeutendste unter allen aber war Blaise Pascal der Jüngere. Geboren im Jahre 1623, fand er mit 16 Jahren jenen berühmten Satz, der nach ihm den Namen trägt.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass dieser Satz den Studien bei Desargues entsprungen ist, indem Pascal selbst sagt, [1]) „dass er, soweit es ihm möglich war, versucht habe, Desargues nachzuahmen."

In seinem Essay pour les coniques finden wir die Definition des Strahlenbüschels mit derselben Bezeichnung wie bei Desargues (ordre de lignes, ordonnance de lignes) und ausserdem den Satz vom Kegelschnitt dem ein Vierseit eingeschrieben ist, aufgeführt. Ueber dieselbe Schrift äussert sich Decartes wie folgt: [2])

„Ich habe auch den Essay des jungen Pascal über die Kegelschnitte bekommen, und bevor ich noch die Hälfte desselben durchgelesen hatte, erkannte ich, dass Pascal von Desargues gelernt hat, was er mir auch sofort einräumte"

Auch hält er es an einer anderen Stelle für nicht glaubwürdig, dass ein 16 jähriger Jüngling einen so wichtigen Satz, wie der Sechsecksatz ist, habe finden können.

In der Tat ist es leicht möglich, aus zwei Sätzen des Desargues den von Pascal abzuleiten. Wir teilen diesen Beweis mit, da vielleicht Pascal einen ähnlichen Weg eingeschlagen hat. (Siehe Fig. 12.)

Das Vierseit 1264 mit den Diagonalen 24 und 16 werde von der Transversale G in den Punkten $aa_1 - bb_1$ geschnitten. Eben-

---

1) Essay pour les Coniques pag. 184. tome III.

2) Lettres de Descartes pag. 201. tome 8, Brief vom 11. Juni 1640.

dieselbe trifft einen beliebigen Kegelschnitt, der durch 1, 2, 4, 6 gelegt ist, in den Punkten cc_1.

Nun bilden aber die Paare $aa_1 - bb_1 - cc_1$ eine Involution, die wir von 4 auf den Kegelschnitt projiciren wollen, und erhalten dadurch die Punktepaare 23 — 56 — *ce*, deren Verbindungslinien durch einen einzigen Punkt 0 auf *G* laufen müssen. (Vergl. Satz 7 auf Seite 135.) Betrachten wir in der Figur das Sechseck 1 2 3 4 5 6, so schneiden sich offenbar seine Gegenteiten in drei Punkten einer Geraden *G*, womit der Pascal'sche Satz bewiesen [1]) ist.

12 und 45 schneiden sich in a_1

23 und 56 schneiden sich in 0

34 und 61 schneiden sich in b_1

Auch Fermat, der wie wir schon sahen, Desargues' Bedeutung zu würdigen wusste, scheint sich eingehend mit der Involution desselben beschäftigt zu haben. Denn in seinem Nachlasse befinden sich zwei specielle Fälle des Satzes vom Kegelschnitt mit dem eingeschriebenen Vierseit. Den einen hat bereits Herr Cantor in seiner Geschichte der Mathematik angeführt [2]) und bemerkt, dass in ihm die jetzt gebräuchliche Definition der Involution enthalten sei, wenn auch jener Kunstausdruck nicht genannt und gebraucht sei. [3])

Der fragliche Satz lautet:

Verbindet man einen beliebigen Punkt *b* eines Kreises mit den Endpunkten *m* und *n* einer Sehne, so erhält man auf dem zu *mn* parallelen Durchmesser pp_1 die Punkte qr_1 und durch Annahme des Punktes *c* zwei weitere q_1r.

Dann besteht folgende Beziehung:

$$\frac{pq \cdot p_1r_1}{pr_1 \cdot p_1q} = \frac{pr \cdot q_1p_1}{pq_1 \cdot p_1r} \quad \text{(Fig. 13)}$$

---

1) Bekanntlich ist dieses Theorem bereits in den: Pappi Alexandrini mathematicae collectiones im 141 und 143 ten Satz des 8. Buches für den Fall enthalten, dass der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt.

2) Cantors Vorlesungen II. Band p. 606 und pag. 620. Hierzu ist zu bemerken, dass Désargues gerade jener allgemeinen Beziehung (Gleichung III auf Seite 124 dieser Arbeit) den Namen Involution beilegte, während er mit der Constanz des Rechtecks den Arbre definirt.

3) Oeuvres de Fermat. Henry-Tanery B. I. pag. 79.

Als Porisma wird der Satz, der allerdings die allgemeine Involutionsbedingung darstellt, beweislos angegeben und noch beigefügt, dass es unschwer sei, denselben auf Ellipsen, Hyperbeln und Gegenschnitte auszudehnen.

Diesem Porisma geht ein anderes voraus, das ebenfalls als specieller Fall des allgemeinen Desargues'schen Satzes zu betrachten ist, was bisher noch nicht bemerkt wurde.[1])

In einer Parabel sei der Durchmesser $0\overset{\infty}{0}_1$ gezogen. (S. Fig. 14).

Verbindet man 2 Punkte M und N mit zwei festen A und B, so erhält man auf dem Durchmesser Punktepaare $aa_1 - bb_1$, welche der folgenden Relation genügen:

$$\frac{0a}{02} = \frac{0b_1}{0a_1} \quad \text{oder} \quad 0a \,.\, 0a_1 = 0b \,.\, 0a_1$$

Dies bedeutet aber, dass 0 die Souche der Involution $aa_1 - bb_1$ ist. Diese entspricht aber dem Punkte $\overset{\infty}{0}_1$. Somit hätte man die Sechspunktinvolution $aa_1 - bb_1 - 0\overset{\infty}{0}_1$.

Wenn man erwägt, dass Fermat Desargues' Schrift über die Kegelschnitte gekannt hat und ihr auch seinen Beifall nicht versagte, so ist die Vermutung, dass er durch jenen auf die obigen Sätze gekommen ist, keine unberechtigte. Unbeschadet dessen besteht neben dieser Annahme auch die Möglichkeit, dass Fermat bei seinen ausgedehnten Studien über Apollonius, hauptsächlich aber über die Porismen des Euklid, selbst auf diese verhältnissmässig wenig bedeutenden Sätze stiess.

Da sich aber die beiden Theoreme, wie schon bemerkt, erst im Nachlasse des Fermat vorgefunden haben,[2]) so muss man wenigstens zugeben, dass der fragliche Fundamentalsatz von Desargues zuerst veröffentlicht worden ist. So nennt auch Pascal,[3]) der diesen Satz anführt, nur Desargues als den Entdecker des Satzes vom Kegelschnitt mit dem eingeschriebenen Vierseit.

---

1) Oeuvres de Fermat. Ed. Henry-Tanery 1891. tome I. pag. 79.

2) Somit erst 25 Jahre nach dem Erscheinen des Brouillon! Siehe auch Chasles Aperçu historique § 25. II. Capitel.

3) Oeures complètes de Pascal: Ed. Librairie de L. Hachette et Cie, Essay pour les Coniques. tome III. pag. 184.

§ 6.

Einfluss der Arbeiten Desargues' auf die Entwicklung der projectivischen Geometrie in späterer Zeit.

Da das wichtigste Werk Desargues', das über die Kegelschnitte, vielleicht infolge der geringen Auflage oder schweren Lesbarkeit desselben bald gänzlich verschwand, so wäre der Name unseres Gelehrten als eines hervorragenden Geometers wol ganz in Vergessenheit geraten, wenn nicht, wie schon früher bemerkt, jene Schmähschriften ihn der Nachwelt überliefert hätten. Umsomehr ist es zu begrüssen, dass der französische Mathematiker Philipp De La Hire, der von 1640—1718 lebte,[1]) im Jahre 1679 eine eigenhändige Abschrift des „Brouillon project“ von Desargues, fertigte, die dann Chasles nach weiteren 165 Jahren, im Jahre 1845 wieder auffand. Was De La Hire zu diesem eigentümlichen Verfahren veranlasste, dürfte kaum mehr zu ermitteln sein, dagegen hat die Kenntniss dieses Werkes unzweifelhaft Einfluss auf seine so berühmt gewordenen, geometrischen Arbeiten ausgeübt, wenn er auch in einem seiner Abschrift beigegebenen Briefe dies nicht zum Ausdruck bringt.[2]) Mit dieser unserer Anschauung stehen wir keineswegs allein, sondern es findet sich bereits in den Acta Eruditorum vom Jahre 1685 auf pag. 400 eine Bemerkung, welche bei Gelegenheit der Recension des im gleichen Jahre erschienenen Werkes von De La Hire: „Sectiones Conicae in novem libros distributae (fol., Parisiis 1685, apud Steph. Michallet.) gemacht wird, und welche lautet:

Cum nihil de his Pascalii, Desarguesii aut pauca sint edita, eo gratior fuit labor doctissimi geometrae Ph. de La Hire, qui v e s t i g i i s i s t o r u m i n s i s t e n s, multaque perpulchraque de suo adjiciens, jam ante 12 annos libellum titulo Novae methodi sectiones conicas et cylindricas explicandi edidit . . .[3])

Ein genauer Vergleich des genannten Werkes mit der Desargues-schen Schrift macht, wie wir sehen werden, diese Beeinflussung unzweifelhaft.

Nun hatte aber De La Hire bereits im Jahre 1673, also 3 Jahre bevor er nach seiner Angabe Desargues' Kegelschnittstheorie zum

1) Vergleiche hierüber Cantor B. III, pag. 120 ff.

2) Desargues I. pag. 231, 232.

3) Diese Stelle findet sich in Chasles' Aperçu historique, deutsche Ausgabe von Sohnke pag. 85.

ersten Male las, ein Werk mit dem Titel „Nouvelle Méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques" veröffentlicht. In derselben gibt er eine Methode an, um einen Kreis in einen Kegelschnitt punktweise zu transformiren.

Fast genau dieselbe Construction fanden wir bei der Desargues, als wir die von ihm gegebenen Vorschriften durch eine Zeichnung veranschaulichten. [1]) Der einzige Unterschied besteht darin, dass Desargues die Elemente des Kegelschnittes aus dem Grundkreis des Kegels, also räumlich ableitet, während De La Hire Kreis und Kegelschnitt in einer und derselben Ebene sich vorstellt. [2]) Aber auch Desargues hatte schon, wie wir Seite 138 sahen, die Bemerkung gemacht, dass derartige räumliche Figuren unmittelbar in der Ebene gedeutet werden dürfen. Dieser Umstand hindert jedoch nicht, De La Hire's Worten betreffs der erstmaligen Lectüre dem Desargues'schen Kegelschnitte Glauben zu schenken, denn er kann die Kenntniss von dieser Methode sehr wol durch seinen Vater bekommen haben, der ein Schüler Desargues' war.

Bei der Abfassung des schon citirten Werkes vom Jahre 1685 kannte nun aber De La Hire, wie er selbst sagt, den Brouillon project, und hat aus diesem unzweifelhaft den Gedanken zur Aufstellung seiner Polarentheorie und zur Ableitung der allgemeinen Kegelschnittseigenschaften aus dem Kreise durch Raumprojection geschöpft.[3])

Die Tragweite der Sechspunktinvolution jedoch erkannte er nicht, indem er dieselbe als unbequem bezeichnet und nur die Vierpunktsinvolution, die er im Anschluss an Pappus die harmonische Teilung nennt, aufgreift. Aber schon Desargues hatte, wie wir zeigten, alle Eigenschaften von Pol und Polare mit Zuhilfenahme derselben Punktelage abgeleitet. Sein Standpunkt war sicherlich ein allgemeinerer als der des De La Hire, indem er aus seiner Sechspunktinvolution den nach ihm benannten Satz gewann, der die Quelle so wichtiger Theoreme wurde, während De La Hire bei seiner engeren Auffassung dieses Instrument vollständig entbehren musste.

---

1) Siehe S. 137 dieser Arbeit. Siehe auch Fig. 10b.

2) Vergleiche hierüber Cantor B. III. pag. 120, 121, wo die Methode genauer auseinander gesetzt wird.

3) Oldenburg spricht in einem Briefe an Leibniz mit Achtung von einer Desargues'schen Methode, womit jedenfalls die Projectionsmethode genannt ist. Dieselbe soll auch dem Pascal'schen Werke zugrunde gelegen haben, welche den Satz vom hexagrammum mysticum enthalten hat.

Dagegen muss dem letzteren das Verdienst zugesprochen werden, dass er einerseits aus der dunklen Darstellung Desargue's die Wichtigkeit der Polarentheorie zu erkennen vermochte, andererseits dieselbe in überaus klarer und nicht unselbständiger Weise entwickelte. Diese vorzügliche Darstellungsweise, die überhaupt De La Hire's Schriften auszeichnet, verschaffte diesem und damit indirect auch Desargues' Ideen Einfluss auf die weitere Entwicklung der Geometrie.

So verbreitete sich die Kenntniss der Polarentheorie in England durch das Schriftchen von Jacob Milnes: Sectionum Conicarum Elementa, Oxford 1702, das aber De La Hire als den Begründer derselben bezeichnet. Aehnlich behandelt Robert Simson im 12ten Satze des 5ten Buches ferner Treatise on Conic Sections 1735 das Desargues'sche Theorem, welches durch den Essay pour les Coniques des Pascal bekannt geworden war. [1]) Geradezu zum Fundament einer Arbeit [2]) über die Kegelschnitte machte dieses Brianchon. Auch reproducirte Servois [3]) den Satz von den perspectivisch liegenden Dreiecken, den auch Brianchon, Sturm, Gergone und Poncelet, welch' letzterer durch ihn auf die Theorie von den homologen Figuren geführt wurde, anwendeten.

Das Verdienst, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf Desargues wieder gelenkt zu haben, gebührt hauptsächlich Poncelet. Auf Grund des Descart'schen Briefwechsels und des Briefes von Beaugrand sieht er sich veranlasst auf die Bedeutung dieses Gelehrten hinzuweisen, den er treffend den Monge seines Jahrhunderts nennt. [4])

Doch war eine eingehende Würdigung der Verdienste Desargues erst möglich, nachdem Chasles im Jahre 1845 die De La Hire'sche Abschrift des Brouillon project aufgefunden hatte. Chasles' eigene Untersuchungen über die Involution, die er in der Note XV zu seinem Aperçu historique zum ersten Mal veröffentlichte, sind jedenfalls selbständig durchgeführt, indem das letztgenannte Werk bereits 1837, also 8 Jahre vor Auffindung des Brouillon project publicirt worden

---

1) Pascal: Essay pour les Coniques pag. 184, tome II.

2) Brianchon: „Mémoire sur les lignes du deuxième Ordre. Paris 1817. (Bachelier.)

3) Servois: Solutions peu connues . . . Metz 1805.

4) Siehe die Einleitung zu Poncelet's: Traité des propriétés projectives des figures.

ist. Dagegen kannte Chasles schon damals, aus dem Briefe Beaugrands, den Satz vom Kegelschnitt und dem eingeschriebenen Vierseit, welcher ihm das Mittel an die Hand gab, von der involutorischen Beziehung zu dem allgemeinen Princip der Projectivität überzugehen. Chasles zeigte nämlich als der Erste, dass obengenanntes Theorem unmittelbar den Satz ergibt, dass zwei projectivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt erzeugen. [1])

---

1) Chasles: Aperçu historique, Deutsch von Sohncke pag. 349.

2) Zu S. 133 Z. 3 v, unt. Desargues construirt also die Polare eines Punktes inbezug auf einen Kegelschnitt in der heute noch üblichen Weise.

3) Zu S. 142 Z. 12 v. unt. Descartes meint offenbar die Anwendung des Transversalensatzes von Menelaos in der Form mit den zusammgesetzten Verhältnissen.

III.

Untersuchungen und Lehrsätze über Begrenzungscurven.

Von

C. W. Meyer,
Ingenieur in Lauchhammer.

---

§ 1.

Die folgenden Untersuchungen erstrecken sich auf die Beziehungen und Lehrsätze, die sich ergeben, wenn man auf dem rechtwinkligen Coordinaten-System vom Anfangspunkt 2 Linien abträgt, m auf der Ordinaten-, n auf der Abscissenachse; und zwischen beiden ein bestimmtes Verhältniss derart festsetzt, dass man dasselbe allgemein durch die Formel

$$m^z + n^z = S^z$$

ausdrücken kann, worin S eine gegebene constante Länge ist. z ist ein variabler Exponent, für den wir successive alle erdenklichen Werte einsetzen können. Verbindet man nun die Endpunkte von m und n durch eine Gerade, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, worin die letztere Hypotenuse ist.

Dies Dreieck kann dann innerhalb der durch die Formel

$$m^z + n^z = S^z$$

gegebenen Grenzen die verschiedensten Formen annehmen. Es beginnt als Linie auf der Ordinaten-Achse, wo dann

$$m = S, \quad n = 0$$

durchläuft eine Symmetrieform unter 45^0, wo $m = n$ und das Dreieck gleichschenklig ist, und endigt als Linie auf der X Achse, wo $n = S$ und $m = 0$. Denkt man sich nun alle diese Dreiecke in unendlich naher Succession aufgezeichnet, so werden die Hypotenusen derselben eine Continuität von Schnittpunkten miteinander bilden, die einer mathematisch bestimmbaren Curve angehören, die bei q beginnt und in p endigt. Die Curve hat demnach die Eigenschaft, mit jeder solchen Hypotenuse einen Punkt gemeinsam zu haben; diese ist also Tangente an jene. In Folge dessen schliesst die Curve den gesammten Raum ein, welcher von der Succession jener verschiedenen Dreiecke ausgefüllt wird und zwischen den Achsen liegt. Ich nenne sie deshalb Begrenzungscurve.

Es leuchtet ein, dass jedem Grade der Gleichung

$$m^z + n^z = S^z$$

auch eine besondere Begrenzungscurve entspricht. Im Folgenden sollen mehrere dieser Curven bestimmt und genauer untersucht werden. Dabei wird sich ergeben, dass der allgemeinen Formel

$$m^z + n^z = S^z$$

(die wir Katheten-Formel oder -Gleichung nennen wollen) auch eine eben solche allgemeine Formel der Begrenzungscurve (Coordinaten-Gleichung) entspricht.

§ 2.

Es läge nahe, zuerst den Exponent $z = 1$ zu nehmen und also die Katheten-Gleichung

$$m + n = S$$

zu behandeln. Allein das Weitere wird lehren, dass man zweckmässig mit $z = 2$ beginnt, wobei wesentlich der Umstand in's Gewicht fällt, dass für den Fall

$$m^2 + n^2 = S^2$$

„dann auch die Hypotenusen aller successiven Dreiecke constant $= S$ sind", während diese in allen andern Fällen in ihrer Länge variiren. Hieraus erhellt, dass S, zwischen den Achsen, mit seinen Endpunkten auf diesen gleitend, durch alle möglichen Lagen hindurch geführt, immer Tangente an die Begrenzungscurve bleibt. Da nun bekannt lich bei der angegebenen Bewegung von S jeder feste Punkt darauf eine Ellipse (d. h. im ersten Quadranten ein Viertel derselben) beschreibt, so lässt sich schon hieraus schliessen, dass

1) die Begrenzungscurve auch jede solche Ellipse tangirt,

2) überhaupt zwischen beiden Curven mannichfache Beziehungen bestehen werden.

Vor dem Eintritt in die Untersuchung noch 2 Bemerkungen:

Da im Laufe derselben viele 3te Wurzeln vorkommen, so habe ich es praktisch befunden, zur Vereinfachung der Schreibweise die dritte Wurzel immer durch einen doppelten Strich über dem Wurzelzeichen auszudrücken; also statt $\sqrt[3]{x}$ werde ich schreiben $\sqrt{\overline{\overline{x}}}$. Ferner werde ich es tunlichst vermeiden, mich der Differential-Rechnung zu bedienen, um einerseits zu zeigen, wie selbst complicirte Probleme, am richtigen Ende angefasst, auch mit den gewöhnlichen Mitteln der Analysis gelöst werden können; andererseits das Nachfolgende auch denen verständlich zu machen, die die Differential-Rechnung nicht kennen. Zur Aufsuchung der Maxima und Minima werde ich die Methode der Behandlung arithmetischer Proportionen (oder sog. Ungleichungen) benutzen, deren Wesen bis auf einen Punkt mit der Behandlung der Gleichungen völlig übereinstimmt. Dieser Punkt ist der, dass die Vorzeichen beider Seiten nicht durch Division bzhw. Multiplication oder Radiciren bzhw. Potenziren geändert werden dürfen, sondern nur durch beiderseitige Addition oder Subtraction. Denn es ist z. B. $-2 > -3$; wollte ich aber quadriren, so erhielt ich $4 > 9$. Dagegen kann ich beiderseits 4 addiren und erhalte $2 > 1$. Diese Manipulation mit den arithmetischen Proportionen enthält zwar eigentlich schon die Grundelemente des Differentiirens, ist aber ohne weitere Erklärung Jedem verständlich. Will man aber quadriren, so muss man negative Grössen zuerst durch Hinüberschaffen auf die andre Seite positiv machen, oder sich Gewissheit verschaffen, dass auf derselben Seite noch ein grösserer positiver Ausdruck steht, der einen positiven Wert der ganzen Proportionsseite garantirt. Unter Beachtung dieser Regeln jedoch leistet das Verfahren nahezu ebensoviel wie das Differentiiren.

§ 3.

Um die Begrenzungscurve zu finden, beachte man in erster Linie den Umstand, dass jeder Punkt derselben in welchem sie eine Dreieckshypotenuse tangirt, dadurch charakterisirt ist, dass er ein äusserster Punkt dieser Hypotenuse ist. Das will sagen: Jeder andre Punkt der betr. Hypotenuse liegt ausserdem noch auf einer oder mehreren anders geneigten Hypotenusen S, die sich hier mit Ersterer

kreuzen. Dieser Punkt jedoch liegt auf keinern andern mehr, sondern nur auf dieser einen, er ist ein Grenzpunkt für den durch die Succession der Hypotenusen gebildeten Raum. „Mithin ist hier für ein gewisses festes x das zugehörige y ein Maximum".

In nebenstehender Figur ist, ein für alle Mal, bei allen beliebigen Exponenten der Kathetengleichung:

$$y \,.\, n + x \,.\, m = m \,.\, n$$

Ferner ist

$$m^2 + n^2 = S^2, \quad m^2 = S^2 - n^2$$

also

$$y \,.\, n + x \,.\, \sqrt{S^2 - n^2} = n \,.\, \sqrt{S^2 - n^2} \tag{1}$$

$$y = \frac{(n-x)\sqrt{S^2 - n^2}}{n}$$

Soll nun 0 ein Punkt der Begrenzungscurve sein, so muss der letztere Ausdruck ein Maximum darstellen; d. h. wenn in der durch denselben repräsentirten Function von x eine Grösse variirt wird, so muss allemal y, d. h. der ganze Wert des Ausdrucks kleiner werden. In demselben ist S eine constante Grösse, ebenso hatten wir x als unveränderlich angenommen. Bleibt also nur n als variabel übrig, das wir daher als $n \pm z$ einsetzen. Dann muss folgende arithmetische Proportion entstehen:

$$\frac{(n-x)\sqrt{S^2 - n^2}}{n} > \frac{(n - x \pm z)\sqrt{S^2 - n^2 \mp 2zn - z^2}}{n \pm z}$$

Wir können hier z als so kleinen Wert annehmen, dass $n - z$ immer positiv bleibt; gleicherweise bedingt es das rechtwinklige Dreieck, dass n immer $< S$ und $\sqrt{S^2 - n^2}$ immer einen reellen Wert hat. Demnach kann obige Proportion quadrirt werden. Dann ist:

$$\frac{(n-x)^2 (S^2 - n^2)}{n^2} > \frac{[(n-x)^2 \pm 2z(n-x) + z^2]\,\{(S^2 - n^2 \mp 2zn - z^2)}{n \pm 2zn + z^2}$$

Für das nun folgende Verfahren eine kurze Erläuterung. Es wird sich zeigen, dass beim Fortschaffen der Nenner und Auflösen der Klammern sämtliche Glieder auf beiden Seiten, welche kein z als Factor erhalten, sich gegenseitig aufheben. Die Uebrigbleibenden haben alle z oder höhere Potenzen davon und also kann durch z dividirt werden. Nachher setzen wir $z = 0$ und es fallen somit alle Glieder fort, welche im Anfang z^2 oder eine noch höhere Potenz von z zum Factor haben.

Wir können uns mithin die ganze Rechnung sehr vereinfachen, wenn wir dieses Resultat vorweg nehmen und alle Glieder mit z^2 und höher, oder diese selbst einfach weglassen. Dann lautet unsre obige Gleichung:

$$\frac{(n-x)^2(S^2-n^2)}{n^2} > \frac{[(n-x)^2 \pm 2z(n-x)](S^2-n^2 \mp 2zn)}{n^2 \pm 2zn}$$

$$(n^2 \pm 2zn)(n-x)^2(S^2-n^2) > n^2[(n-x)^2 \pm 2z(n-x)](S^2-n^2 \mp 2zn)$$

$$\pm 2zn(n-x)^2(S^2-n^2) > \pm 2zn^2(n-x)(S^2-n^2) \mp (2zn^2(n-x)^2$$

dividire durch $2z(n-x)n$

$$\pm(n-x)(S^2-n^2) > \pm n(S^2-n^2) \mp n^2(n-x)$$

Wenn nun $z = 0$ wird, was Voraussetzung war, so verschwindet die Ungleichheit beider Seiten und ebenso die doppelten Vorzeichen — welche man behalten will, ist gleichgültig, weil sie sich jetzt beliebig auf die andere Seite bringen lassen.

Dann ist aber

$$(n-x)(S^2-n^2) = n(S^2-n^2) - n^2(n-x)$$

oder

$$n^2(n-x) = (S^2-n^2)x$$

$$n^3 - xn^2 = S^2x - xn^2$$

oder

$$n^3 = S^2x, \quad n = \sqrt[3]{S^2x}$$

Führen wir diesen Wert in die obige Gleichung (I) ein, so ist:

$$y\sqrt[3]{S^2x} + x\sqrt{S^2 - \sqrt[3]{S^4x^2}} = \sqrt[3]{S^2x}\sqrt{S^2 - \sqrt[3]{S^4x^2}}$$

Hier lässt sich durch $\sqrt[3]{S^2x}$ dividiren:

$$y + \sqrt[3]{x^2}\sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{S^2}\sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}}$$

$$y = \sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}}\,(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}) = \left(\sqrt{\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}}\right)^3$$

quadrire:

$$y^2 = (\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2})^3 \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2} \quad \text{und}$$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{S^2}$$

Dies die endgültige Gleichung der gesuchten Begrenzungscurve, deren Formel von einer frappanten Einfachheit ist.

§ 4.

Wir suchen zunächst den correlativen Wert von m auf der Y-Achse. Da

$$n = \sqrt[3]{S^2 x}$$

so ist

$$m^2 = S^2 - \sqrt[3]{S^4 x^2} = \sqrt[3]{S^4}\,(\sqrt[3]{S^2} - \sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{S^4\, y^2}$$

und somit

$$m = \sqrt[3]{S^2\, y}$$

Demnach verhalten sich m und n wie $\sqrt[3]{y}$ und $\sqrt[3]{y}$ oder mit andern Worten: „Die Katheten auf den Achsen verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Coordinaten des auf der Hypotenuse liegenden Punktes der Begrenzungscurve.“ Ist diese Hypotenuse, wie oben ausgeführt, zugleich Tangente an dieselbe, so hat der Tangentenwinkel mit der X Achse die

$$\mathrm{tg} = -\frac{\sqrt[3]{S^2\, y}}{\sqrt[3]{S^2\, x}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

und die Tangentengleichung müsste lauten:

$$y - y_1 = -\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}\,(x - x_1)$$

Um dies zu beweisen, suchen wir nunmehr die Gleichung der Tangente von der Secante aus auf. In die allgemeine Gleichung einer Linie durch 2 gegebene Punkte ist ein entsprechender Wert einzuführen. Dies geschieht wie folgt:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}\,(x - x_1)$$

Der Factor $\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}$ lässt sich zerlegen in

$$\frac{(\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_n})\,(\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{y_1 y_n} + \sqrt[3]{y_n^2})}{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_n})\,(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1 x_n} + \sqrt[3]{x_n^2})}$$

Ferner ist

$$\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{y_1^2} = \sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{y_n^2}$$

oder

$$\sqrt[3]{x_1^2} - \sqrt[3]{x_n^2} = -(\sqrt[3]{y_1^2} - \sqrt[3]{y_n^2})$$

und

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n}) = -(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n}))\sqrt{y_1} + \sqrt{y_n})$$

$$\frac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n}} = -\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{x_n}}$$

Diesen Wert führen wir in obige Formel ein, die dann lautet:

$$y - y_1 = -\frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n})(\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_1 y_n} + \sqrt{y_n^2})}{(\sqrt{y_1} + \sqrt{y}\ ((\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_1 x_n} + \sqrt{x_n^2}}(x - x_1)$$

Nunmehr lasse ich beide Punkte der Secante zusammenfallen, so dass $x_1 = x_n$ und $y_1 = y_n$, dann ist

$$y - y_1 = -\frac{2\sqrt{x_1} \cdot 3\sqrt{y_1^2}}{2\sqrt{y_1} \cdot 3\sqrt{x_1^2}}(x - x_1) = -\sqrt{\frac{y_1}{x_8}}(x - v_1)$$

Woraus erhellt, dass die Hypotenuse S in der Tat Tangente an die Begrenzungscurve ist.

Wenn wir uns nun des Umstandes erinnern, dass jeder Punkt auf der Hypotenuse S bei Verschiebung derselben zwischen den Achsen eine Ellipse beschreibt, deren halbe Achsensumme $= S$ ist, so wird klar, dass der obere Abschnitt auf S, der durch den Punkt marquirt wird, der halben grossen Achse a, der untere Abschnitt der halben kleinen Achse b gleich sein muss. Der Punkt 0 ist mithin der Ellipse und Begrenzungscurve gemeinsam. Die Frage ist nur noch die: Welcher Lage von S, bzhw. dadurch des Punktes 0 entspricht die durch a und b bestimmte Ellipse? Oder: welches ist die Beziehung zwischen den Coordinaten in 0 und den Abschnitten a und b? Diese ergibt sich aus nebenstehender Figur:

$$y^2 + (n - x)^3 = b^2$$

$$y^2 + \sqrt{x^2}\,(\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2})^2 = b^2$$

$$y^2 + \sqrt{x^2 y^4} = b^2$$

$$\sqrt{y^4}(\sqrt{y^2} + \sqrt{x^2}) = \sqrt{S^2 y^4} = b^2$$

$$b = \sqrt{Sy^2}$$

ebenso

$$x^2+(m-y)^2=a^2=x^2+\sqrt[3]{y^2}(\sqrt[3]{S^2}-\sqrt[3]{y^2})^2$$

$$x^2+\sqrt[3]{y^2x^4}=\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})=\sqrt[3]{S^2}x^4=a^2$$

$$\underline{a=\sqrt[3]{Sx^2}}$$

Demnach

$$\underline{a:b=\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[3]{y^2}=n^2:m^2}$$

Die Abschnitte, in welche der Berührungspunkt die Tangente S zerlegt, verhalten sich, wie die Quadrate der Katheten auf den Achsen. Nun ist ferner:

$$\left.\begin{aligned} m:b&=\sqrt[3]{S^2y}:\sqrt[3]{Sy^2}=\sqrt[3]{S}:\sqrt[3]{y} \\ b:y&=\sqrt[3]{Sy^2}:\sqrt[3]{y^3}=\sqrt[3]{S}:\sqrt[3]{y} \end{aligned}\right\}\quad \text{also}\quad \underline{m:b=b:y}$$

$$\left.\begin{aligned} n:a&=\sqrt[3]{S^2x}:\sqrt[3]{Sx^2}=\sqrt[3]{S}:\sqrt[3]{x} \\ a:x&=\sqrt[3]{Sx^2}:\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{S}:\sqrt[3]{x} \end{aligned}\right\}\quad \text{also}\quad \underline{n:a=a:x}$$

Die Ellipsen-Achsen sind also die mittleren Proportionalen zwischen den Tangenten-Abschnitten auf den Achsen und den betr. Coordinaten des Berührungspunktes mit der Begrenzungscurve.

Es ist nun leicht zu beweisen, dass die Tangente an die Begrenzungscurve zugleich in demselben Berührungspunkte auch Tangente an die zugehörige Ellipse ist; mithin der Berührungspunkt allen 3 Linien gemeinsam ist. Zu dem Behufe bestimmen wir x und y nach a und b. Es ist

$$a=\sqrt[3]{Sx^2},\quad \text{also}\quad x^3=Sx^2$$

$$x=a\sqrt{\frac{a}{S}}=\underline{a\sqrt{\frac{a}{a+b}}}$$

ebenso

$$b=\sqrt[3]{Sy^2},\quad \underline{y=b\sqrt{\frac{b}{a+b}}}$$

aus welchen Werten sich ferner ergibt, dass die Quadrate der Coordinaten sich verhalten, wie die Kuben der Hypotenusen-Abschnitte. Auch gestatten diese Formeln, zu jeder Ellipse den ihr zugehörigen Begrenzungspunkt durch geometrische Construction zu finden, indem

$$S : a = a^2 : x^2$$

Ist nun dieser Punkt mit obigen Coordinaten zugleich Ellipsenpunkt und auf derselben Tangente gelegen, so müssen obige Werte, in die Gleichung der Ellipsen-Tangente eingesetzt, dieser eine Form geben, dass deren Winkeltangente mit der X-Achse

$$= -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

ist. Die Ellipsentangente hat die Gleichung:

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$$

also mit obigen Werten:

$$a^2 y b \sqrt{\frac{b}{a+b}} + b^2 x a \sqrt{\frac{a}{a+b}} = a^2 b^2$$

dividire durch $ab\sqrt{ab}$:

$$y\sqrt{\frac{a}{a+b}} + x\sqrt{\frac{b}{a+b}} = \sqrt{ab}$$

Setzen wir die Coordinaten abwechselnd = null, so erhalten wir als Abschnitte auf den Achsen

$$y = \sqrt{b(a+b)}, \quad x = \sqrt{a(a+b)}$$

Die Winkeltangente ist:

$$-\sqrt{\frac{b}{a}} = -\sqrt{\sqrt{\frac{Sy_1^2}{Sx_1^2}}} = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \quad \text{w. z. b. war.}$$

Daraus folgt der Satz: Jede Ellipse hat eine Tangente, deren Länge im Quadranten gleich der Summe der Halbachsen ist. Dieselbe wird durch den Berührungspunkt in die Halbachsen zerlegt.

§ 5.

Wir fanden bei dieser Gelegenheit

$$m = \sqrt{b(a+b)} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{a(a+b)}$$

mithin

$$m^2 : n^2 = b : a$$

d. h. die Quadrate der Katheten verhalten sich, wie die Achsen der betr. Ellipse oder die Abschnitte der Tangente.

Nun ist aber leicht zu zeigen, dass dasselbe Verhältniss besteht zwischen den Katheten und den Abschnitten der Hypotenuse, in welche dieselbe durch eine Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels zerlegt wird.

q sei senkrecht auf S; dann ist

$$m : n = q : d, \quad q^2 = c \,.\, d, \quad m^2 : n^2 = q^2 : d^2$$

also

$$\underline{m^2 : n^2} = c \,.\, d : d^2 = \underline{c : d}$$

Da oben war

$$m^2 : n^2 = b : a. \quad \text{also} \quad \underline{b : a = c : d} \quad \text{so ist}$$

$$\underset{S^2}{\underline{a + b}} : a = \underset{S}{\underline{c + d}} : d, \quad \underline{S : a = S : d} \quad \text{oder}$$

$$\underline{a = d} \quad \text{folglich auch} \quad \underline{b = c}$$

Hieraus folgt nun, dass die Senkrechte vom Scheitel die Hypotenuse in dieselben Abschnitte a und b zerlegt, wie der Berührungspunkt der Tangente an die Begrenzungscurve, nur in umgekehrter Folge. Dies gibt ein Mittel an die Hand, bei jeder Lage von S den zugehörigen Punkt der Begrenzungscurve auf ihr zu finden, indem man den durch die Senkrechte vom Scheitel entstandenen oberen Abschnitt am unteren Ende abträgt. Der neue Endpunkt ist der gesuchte Punkt der Begrenzungscurve.

Die Tangente an die Begrenzungscurve und an die zugehörige Ellipse hat noch 2 bemerkenswerte Eigenschaften, die allem Anscheine nach bisher unbekannt sind:

1) Von allen möglichen Tangenten an die Ellipse ist diese, welche gleich der Achsensumme S ist, die kürzeste zwischen den Schnittpunkten mit den Achsen.

2) Von allen durch einen bestimmten Punkt 0 gelegten Hypotenusen ist diejenige die kürzeste, welche der Lage des Punktes als Begrenzungscurvenpunkt mit der Hypotenuse als Tangente entspricht.

Beweis ad I.

Wir leiten zuerst aus der Gleichung der Ellipsentangente die

allgemeine Form des Ausdrucks für die Länge zwischen den Achsen ab, indem wir x und y abwechselnd 0 setzen.

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2, \quad y = \frac{b^2}{y_1}, \quad x = \frac{a^2}{x_1}$$

$$\text{Tangentenlänge} = \sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^3}}$$

Eliminiren wir y_1 durch den aus der Ellipsengleichung gewonnenen Ausdruck

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \quad \text{so kommt:}$$

$$\text{Länge } L = \sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4 \cdot a^2}{b^2(a^2 - x_1^2)}} = a\sqrt{\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2}}$$

Dies muss also ein Minimum sein und der sich ergebende Wert muss x_1 als eine Function von a und b enthalten, die dem oben für den Fall der Begrenzungscurve abgeleiteten Werte gleich ist. Factor a kann als constant weggelassen werden, da er auf die Verschiedenheit der beiden Seiten ohne Einfluss ist. Ebenso kann, da $a^2 - x_1^2$ immer positiv bleibt und der Radicand desgleichen, das Wurzelzeichen fortbleiben. Dann variiren wir x_1^2 als $x_1^2 \pm z$. Es entsteht

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2} < \frac{a^2}{x_1^2 \pm z} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2 \mp z}$$

schaffe die Nenner fort:

$$a^2(a^2 - x_1^2)(x_1^2 \pm z)(a^2 - x_1^2 \mp z) + b^2 x_1^2 (x_1^2 \pm z)(a^2 - x_1^2 \mp z) <$$
$$a^2 x_1^2 (a^2 - x_1^2)(a^2 - x_1^2 \mp z) + b^2 x_1^2 (a^2 - x_1^2)(x_1^2 \pm z)$$

es bleibt:

$$\pm a^2 z (a^2 - x_1^2)^2 < \pm b^2 x_1^4 z$$

dividire durch z und setze es dann $= 0$

$$a^2(a^2 - x_1^2)^2 = (b^2 x_1^4), \quad a(a^2 - x_1^2) = b x_1^2, \quad a^3 = x_1^2(a \pm b)$$

$$x_1 = a\sqrt{\frac{a}{a \pm b}} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Der Fall $a\sqrt{\frac{a}{a-b}}$ ist unmöglich, weil dann entweder $b > a$

und der Wert imaginär oder $a > b$ und dann $x_1 > a$ wäre, was in der Ellipse nicht vorkommen kann.

Beweis ad II.

Hierfür suchen wir den allgemeinen Ausdruck für alle durch $x_1 y_4$ möglichen Hypotenusen und dann davon das Maximum. Es ist:

$$H^2 = m^2 + n^2$$

ferner

$$y_1 : m = n - x_1 : n$$

also

$$m = \frac{y_1 n}{n - x_1}$$

demnach

$$H^2 = \frac{y_1^2 n^2}{(n - x_1)^2} + n^2 = \text{Minimum}$$

Variire n als $n \pm z$, so muss sein:

$$\frac{y_1^2(n^2 \pm 2zn)}{(n - x_1 \pm s)^3} + 2zn > \frac{y_1^2 n^2}{(n - x_1)^2}$$

$$y_1^2(u^2 \pm 2zn)(n - x_1)^2 \pm 2zn(n - x_1)^4 > y_1^2 n^2 (n - x_1 \pm z)^2$$

$$n^2 \pm 2zn y_1^2 (n - x_4)^2 \pm 2zn(n - x_1)^4 > y_1^2 \pm 2z(n - x_1) n^2 y_1^2$$

dividire durch $2zn(n - x_1)$

$$\pm y_1^2 (n - x_1) \pm (n - x_1/^3 > \pm n y_1^2$$

oder da $z = 0$ und die Ungleichheit wegfällt:

$$-x_1 y_1^2 + (n - x_1)^3 = (n - x_1)^3 = x_1 y_1^2 \quad \underline{n - x_1 = \sqrt[3]{x_1 y_1^2}}$$

Nun ergibt sich aus Fig. 4.:

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{y_1}{n - x_1}$$

(für alle möglichen H) demnach für das kürzeste H

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{y_1}{\sqrt[3]{x_1 y_1^2}} = -\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}$$

welches wir oben als Tangente des Winkels einer Tangente an die gefundene Begrenzungscurve ermittelt hatten. Folglich ist eine solche die kürzeste Hypotenuse durch ihren Berührungspunkt. Dass diese Eigenschaft für die Praxis häufig von Bedeutung sein kann, ist ohne Weiteres einleuchtend.

§ 6.

Wenn wir in der Begrenzungscurve $x = y$ setzen, so erhalten wir

$$2\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \qquad x = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

Da der betr. Punkt auf einer Linie liegen muss, die unter 5° gegen die Achsen geneigt vom Anfangspunkt ausgeht, so ist der Abstand vom Anfangspunkt

$$x = \sqrt{2} = \frac{S}{2}$$

Und da die Gleichung eine sog. symmetrische ist, d. h. x und y treten in genau derselben Function auf, so muss auch die Curve eine solche sein, die durch die benannte 45° Linie in 2 symmetrische Hälften geteilt wird. Jeder Punkt hat daher auf der andern Seite dieser Symmetrie-Achse einen ihm homogenen Punkt, mit denselben, nur vertauschten Coordinaten. Die Curve lässt sich auch auf die Symmetrie-Achse beziehen und lautet dann die Gleichung:

$$\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{2\,S^2}$$

Aus beiden Gleichungsformen geht hervor, dass die Vorzeichen von x und y ganz ohne Einfluss sind (ist eine Coordinate positiv, die andre negativ, so verwandelt sich nur $x+y$ in $x-y$ und umgekehrt.) Mithin geht die Curve durch alle 4 Quadranten.

Die Gleichung der Normale ist:

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y}}\,(x - x_1)$$

Setzen wir $y = 0$, so ist

$$-y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,(x - x_1), \quad -\frac{y_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} = x - x_1, \quad x = x_1 - \frac{y_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

also

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

$$\text{Subtangente} = n - x_1 = \sqrt{x_1 y_1^2}$$

demnach

$$Sn : Stg = \sqrt{\frac{y_1^4}{x_1}} : \sqrt{x_1 y_1^2} = \sqrt{y_4^2} : \sqrt{x_1^2} = b : a$$

Der Radiusvector (Rv) ist $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Drücken wir x und y durch a und b aus, so ist

$$Rv^2 = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} = \frac{a^5 + b^2}{a+b} = a^2 + b^2 - ab$$

Ist $x = y$, so ist $a = b$, die Ellipse ein Kreis, dessen Radius $= S/2$. Dass dies der kürzeste Rv ist, kann man leicht zeigen, in dem man

$$a = \frac{S}{2} \pm z \quad \text{und} \quad b = \frac{S}{2} \mp 2$$

setzt. Dann ist

$$Rv^2 = \frac{S^2}{4} \pm Sz + z^2 + \frac{S^2}{4} \pm Sz + z^2 - \frac{S^2}{4} + z^2 = \frac{S^2}{4} + 3z^2$$

daher $Rv > S/2$.

Da die Entfernung des Ellipsenbrennpunktes vom Anfangspunkt

$$= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{S^2} \sqrt{\sqrt{r^2} - \sqrt{y^2}}$$

so ist ein Fall möglich, wo e und der Rv gleich sind. Alsdann ist

$$a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - ab, \quad 2b^2 = ab, \quad a = 2b = \frac{2S}{3}$$

$$b = \frac{S}{3} \quad \text{und}$$

$$x = \frac{2S}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = S \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \quad y = T \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die Bedeutung dieses Falles wird weiter unten zur Sprache kommen.

Man kann die Begrenzungscurve in der Weise entstanden denken, dass der Mittelpunkt von S mit dem Radius $S/2$ im Anfangspunkt befestigt und darum gedreht wird, während die Endpunkte auf den Achsen vom betr. nach dem Anfangspunkte gleiten. Bestreut man nun die Fläche während S noch an einer Achse anliegt, mit einem

feinen Pulver oder Sande, so schiebt S auf seinem Wege diesen genau so weit zurück, dass die Contur des Sandes in der Begrenzscurve liegen bleibt. In der Praxis beschreibt z. B. der eine Arm des Watt'schen Parallelogramms einen Teil dieser Curve.

§ 7.

Wir fanden in § 5., dass auch die Senkrechte vom Anfangspunkt auf die Hypotenuse S diese in 2 Abschnitte a und b, die Achsen der Ellipse mit dem entsprechenden Berührungspunkt, zerlegt Zu sehr interessanten Beziehungen gelangt man nun, wenn man alle diese Treffpunkte von S in seinen verschiedenen Lagen mit den bezl. Senkrechten zu einer continuirlichen Curve verbindet und deren Gleichung aufsucht. Da das Stück b am oberen Ende gleich demselben unterhalb des Berührungspunktes, so ist

$$n - x_1 = X \quad \text{und} \quad m - y_1 = Y$$

Mithin sind die Coordinaten des neuen Punktes

$$x = \sqrt{S^2 x_1} - x_1 = \sqrt{x_1}(\sqrt{S^2} - \sqrt{x_1^2}) = \underline{\sqrt{x_1 y_1^2}}$$

$$y = \sqrt{S^2 y_1} - y_1 = \sqrt{y_1}(\sqrt{S^2} - \sqrt{y_1^2}) = \underline{\sqrt{x_1^2 y_1}}$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\underline{x \cdot y} = \sqrt{x_1^3 \cdot y_1^3} = \underline{x_1 y_1}$$

das Rechteck aus den Coordinaten des Punktes der neuen Curve ist also gleich dem Rechteck aus den Coordinaten des Berührungspunktes der Begrenzungscurve auf derselben Hypotenuse S. Ferner ergeben obige Werte:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x_1^2 y_1^4} \\ y^2 &= \sqrt{x_1^4 y_1^2} \end{aligned}\right\} x^2 + y^2 = \sqrt{x_1^2 y_1^2}(\sqrt{y_1^2} + \sqrt{x_1^2}$$

letztere Klammer ist $= \sqrt{S^2}$

$$x_1 y_1 = x y \quad \text{also}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{S^2 x^2 y^2} \quad \text{oder}$$

$$\underline{\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Sxy}}$$

Gleichung der gesuchten Curve. Mit Worten: Der Kubus aus dem Radiusvector ist gleich dem Parallelepiped aus der Linie S mit den Coordinaten des betr. Punktes.

Die hier gefundene Curve, welche ich nach ihrer charakteristischen Form einfach Blattcurve (eigentlich ist sie eine Schleife) nennen will, ist an sich keine neue. Wol aber scheint ihre Bedeutung. Ursprung, Zusammenhang mit Ellipse und Begrenzungscurve, sowie ihre näheren Eigenschaften anher unbekannt zu sein. Man findet sie bereits angeführt in anderer Form in Lübsen's Lehrbuch der analytischen Geometrie (S. 138) der sie seinerseits einem Werke von Cramer entlehnt hat, der sie wiederum aus Guido Grandi (Florenz 1728) übernommen. Wie lange ist demnach die Curve schon bekannt, ohne dass man ihren Zusammenhang mit der Ellipse kannte! Denn wäre das der Fall, so fände sich in genanntem Buche doch wenigstens eine Andeutung davon. Allein schon die Art, wie die Blattcurve bei Lübsen mit Hülfe ihrer Polargleichung discontinuirlich construirt wird, — die in gar keinem Zusammenhang mit obiger Herleitung steht — beweist klar, dass er von der eigentlichen Bedeutung der Curve keine Ahnung hatte. Ich fand die Curve auf dem bezeichneten Wege, ehe ich Lübsen's Buch in die Hände bekam, der sie übrigens blos verwertet, um zu zeigen, welchen Nutzen oft die Verwandlung einer Coordinatengleichung in eine Polargleichung für die geometrisch-anschaulische Construction einer Curve haben könne. Bei ihm erfährt man daher über die weiteren Eigenschaften der Curve nichts. Offenbar ist doch meine discontinuirliche Construction durch Senkrechte vom Scheitel auf die Hypotenusen S viel einfacher, als die seinige mittelst des Sinus des doppelten Winkels.

§ 8.

Um Irrtümer zu vermeiden, sollen von jetzt ab die Coordinaten der Blattcurve immer mit x, y, diejenigen der Begrenzungscurve mit xy bezeichnet werden. Aus der Figur, wie aus obigen Werten ergibt sich:

$$x^2_1 = \sqrt[3]{x^2 y^4} = y\sqrt[3]{x^2 y} = y_1 \cdot y$$

$$y_1^2 = \sqrt[3]{x^4 y^2} = x\sqrt[3]{x^2 y} = x_1 \cdot x$$

Demnach ist die Abscisse die mittlere Proportionale zwischen ihrer Ordinate und der Ordinate des zugehörigen Punktes der Begrenzungscurve. Für die Ordinate gilt das Entsprechende. Ferner gelten noch folgende Beziehungen:

$$m = y + y, \quad n = x + x, \quad x : x = b : x = y : y$$

Aus der Gleichung der Begrenzungscurve folgt

$$(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3 = S^2 = x^2 + y^2 + 3\sqrt[3]{x^2y^2}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})$$

also

$$Rv^2 = 3\sqrt[3]{S^2x^2y^2}. \quad Da\ xy = xy \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{S^2x^2y^2} = x^2 + y^2$$

und letzteres das Quadrat des Radiusvectors der Blattcurve (der mit Rvb bezeichnet sei), so haben wir zwischen den Radiusvectoren 2er zusammengehöriger Punkte beider Curven die Beziehung:

$$Rv^2 = S^4 - 3 Rvb^2$$

Setzen wir in der Blattcurvengleichung $x = y$, so ist

$$2x^2 = \sqrt[3]{S^2y^4}, \quad 8x^6 = S^2x^4, \quad x = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

und der Abstand des betr. Punktes vom Anfangspunkt ist $= S/2$.

Da dieser Punkt auf der Symmetrie-Achse liegt, so folgt, dass beide Curven diesen Punkt gemein haben, sich darin tangiren, der in diesem Falle allen 4 Linien, nämlich auch dem Kreise mit dem Radius $S/2$ und der Hypotenuse S angehört.

Es ist natürlich leicht, zu einem gegebenen Punkt der Blattcurve den entsprechenden der Begrenzungscurve zu finden bzhw. zu construiren. Ebenso haben wir gesehen, dass bei gegebenem m und n oder gegebener Ellipse aus a und b sogleich der zugehörige Punkt der Begrenzungscurve gefunden werden kann. Anders aber steht es mit der Aufgabe, aus den gegebenen Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve den entsprechenden der Blattcurve und das zugehörige S zu ermitteln. Denn alle hier in Betracht kommenden Grössen sind dritte Wurzeln einer Function von x und y bzhw. S, die sich mit den bisherigen Mitteln der Planimetrie nicht construiren lassen. Weder m noch n, noch die Subnormale, noch auch a oder b oder die Senkrechte vom Scheitel auf S kann ich aus ihren gefundenen Formeln geometrisch darstellen. Der Weg zur Lösung liegt in der Weiterverfolgung des Umstandes, dass die Radiivectoren an zusammengehörige Punkte beider Curven auf S gleiche Abschnitte fi und ow erzeugen. In Folge dessen sind die Dreiecke fri und ovw congruent und $fr = ov$. Verbinde ich den gegebenen Punkt mit dem Anfangspunkt, so zeigt die Figur, dass der gesuchte Punkt der Blattcurve auf der Peripherie eines über qo errichteten Halbkreises liegen muss. Des Weiteren wird dessen Lage dadurch bestimmt,

dass die Senkrechte von diesem Punkte auf die y-Achse und die Verbindungslinie desselben mit o, verlängert, auf der y-Achse ein Stück $-y_1$ abschneiden müssen. Hierauf gründet sich die geometrisch-constructive Auffindung des zu o gehörenden Blattcurvenpunktes. Man schlägt über qo einen Halbkreis. nimmt dann y_1 auf die Ordinaten-Achse und errichtet im unteren Endpunkte von y_1 eine Senkrechte parallel zur X-Achse. Mittelst Anlegen eines gewöhnl. hölzernen Winkels an die X-Achse, auf dessen verticalen Schenkel man y_1 abträgt, und dessen horizontaler Schenkel genügende Länge über o hinaus hat, lässt sich dies leicht ausführen. Man befestigt ferner in o ein um diesen Punkt drehbares Lineal, dessen nach unten gerichtete Kante durch o läuft und am oberen Endpunkt von y_1 auf der Y-Achse anliegt Verschiebt man nun das hölzerne Dreieck der Y-Achse entlang aufwärts, so wird der horizontale Schenkel parallel zur X-Achse sich bewegen, und gleichzeitig wird das Lineal um o drehend, eine ständige geradlinige Verbindung zwischen o und dem oberen Endpunkte von y_1 bilden. Bald kommt dann der Moment, wo der horizontale Schenkel des Dreiecks und die um o drehende Gerade einen Schnittpunkt mit einander bilden, dieser rückt bei weiterer Fortbewegung des Winkels in einer sogleich zu bestimmenden Curve weiter fort, passirt o selbst und trifft endlich mit der Peripherie des Halbkreises zusammen, wo dann der gesuchte Punkt gefunden ist. Denn bei jeder Lage dieses Schnittpunktes muss das an der Y-Achse entstehende Dreieck die Vertical-Kathete y_1 haben und dem an der X-Achse anliegenden Dreieck congruent sein.

So zeigt die Figur einen solchen Zwischenpunkt p; offenbar ist $\Delta\, usp \cong \Delta\, ovh$. Der Unterschied zwischen p und dem gesuchten Punkte besteht nur darin, dass in i die Verbindungslinie mit q auf der Hypotenuse senkrecht steht, (weil i auf dem Halbkreise liegt) bei allen anderen Schnittpunkten, wie p, jedoch nicht. Es ist nun zunächst von Interesse, die Natur der hier von den erwähnten Schnittpunkten gebildeten Curve $dopi$ kennen zu lernen. Nehmen wir also p als beliebigen Punkt derselben an.

Es ist

$$sp = vh = x$$

ferner

$$vh : y_1 = vh + x_1 : y_1 + y \quad \text{oder} \quad x : x + x_1 = y_1 : y_1 + y$$

$$x + x_1 : x = y + y_1 : y_1$$

ergibt

$$x_1 : x = y : y_1$$

und somit

$$\underline{x \cdot y = x_1 \cdot y_1}$$

mit Worten: „Das Product aus den Coordinaten jedes Punktes dieser „Curve ist constant $= x_1 y_1$." Demnach ist die Curve eine Hyperbel und die Achsen sind deren rechtwinklige Asymtoten. Mithin haben wir durch obiges Verfahren gefunden:

1) Eine continuirliche Construction einer Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten.

2) Eine Methode, die kürzeste Linie zwischen den Achsen durch einen Punkt $x_1 y_1$ zu legen.

3) Den Lehrsatz, dass in einer Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten jede durch dieselbe gehende beliebige Linie von der Hyperbel so geschnitten wird, dass die ausserhalb derselben fallenden Stücke gleich sind.

4) Eine Methode, auf constructivem Wege jedes Prisma in einen Kubus gleichen Inhalts zu verwandeln, bzhw. dessen Seite zu erhalten.

Das letztere Resultat ist offenbar das Wichtigste, bedarf aber noch einer Erläuterung. Da man jedes Rechteck in ein Quadrat verwandeln kann, und sonach auch für jedes Prisma eines mit gleichem Inhalt und quadratischer Grundfläche sich herstellen lässt, so handelt es sich zuletzt um die Möglichkeit, eine Linie zu finden, die der Formel genügt:

$$x^3 = a^2 b$$

Da wir nun für die Coordinaten der Blattcurve haben:

$$x = \sqrt[3]{xy^2} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[3]{x^2 y}$$

so braucht man die beiden Seiten des quadratischen Prisma's nur als Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve aufzutragen und erhält dann nach dem obigen Verfahren sogleich das gesuchte x als Abscisse oder Ordinate des gefundenen Blattcurvenpunktes, jenachdem man die Seite des Quadrats als Ordinate oder Abscisse aufgetragen hat.

Wir werden später sehen, dass die Gleichung der Blattcurve in verschiedenen Fällen treffliche Dienste leistet; ebenso aber auch das zuletzt demonstrirte Verfahren.

§ 9.

Interessant ist es, bei dieser Gelegenheit den Inhalt des Dreiecks zu untersuchen, welches von den Radienvectoren zweier zusam-

mengehöriger Punkte beider Curven eingeschlossen wird. Man sieht sogleich, dass dieser Inhalt mit null anhebt, wenn S auf der Achse liegt, allmählich grösser, dann wieder kleiner und bei der Symmetrie-Lage von S, wo beide Radiivectoren wieder zusammenfallen, abermals null wird. Es muss also ein Maximum dieses Inhalts geben. Die auf der Hypotenuse S liegende Kathete des Dreiecks ist

$$= a - b = \sqrt{Sx^2} - \sqrt{Sy^2} = \sqrt{S}\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

die andre ist $= \sqrt{Sxy}$, somit Inhalt

$$= \frac{\sqrt{S^2xy}\ (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})}{2}.$$

Da hier $\frac{\sqrt{S^2}}{2}$ constant ist, so bleibt dieser Factor auf das Resultat der Proportion ohne Einfluss und kann deshalb wegfallen Es muss demnach von $\sqrt{xy}\ (\sqrt{a^2} - \sqrt{y^2})$ das Maximum gesucht werden. Variiren wir $\sqrt{x}$ als $\sqrt{x} \pm z$, so haben wir:

$$\sqrt{x^1} \pm 2z\sqrt{a} + \sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x} = \sqrt{S^2}$$

und somit tritt für $\sqrt{y^2}$ ein: $\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x}$. Dann lautet die Proportion:

$$\sqrt{xy}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) > (\sqrt{x} \pm z)\sqrt{\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x}}\ (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} \pm 4z\sqrt{x})$$

quadrire jetzt

$$\sqrt{x^2y^2}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 > (\sqrt{x^2} \pm 2z\sqrt{x})(\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x})$$
$$\cdot\, [(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 \pm 8z\sqrt{x}\ (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})]$$
$$\pm 2z\sqrt{xy^2}\ (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 \mp 2zx(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^3$$
$$\mp 8zx\sqrt{y^2}\ (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

dividire durch $2z\,(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})\sqrt{x}$

und erhalte

$$0 > \pm \sqrt{y^2}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) \mp \sqrt{x^2}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} \pm 4\sqrt{y^2x^2}$$

setze $z = 0$, dann ist:

$$(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 = 4\sqrt{x^2y^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = 2\sqrt{xy}$$

nach dem unteren Resultate $= \dfrac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{x^4} - 4\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = 4\sqrt{x^2y^2}$$

$$\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = 8\sqrt{x^2y^2}$$

$$(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = 8\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{S^4}$$

somit

$$8\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{S^4}, \quad \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{S^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2} \\ 2\sqrt{xy} = \dfrac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{S^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{S^2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{S}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}$$

da

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}}$$

so ist

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}\sqrt{S}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{S}}{2}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right) = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt[4]{2}}\,\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{S}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{S}}{2}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}\right] = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt[4]{2}}\left[\frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2^3}\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Der Ro an den zugehörigen Punkt der Blattcurve ist unschwer festzustellen

$$\sqrt{xy} \text{ war } = \frac{\sqrt{S^2}}{2\sqrt{2}}$$

da

$$xy = x_1\, y_1 \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Sxy}$$

so ist

$$Ro = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

Das Mittelstück auf der Hypotenuse ist

$$= a - b = \sqrt{S}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$$

nach Obigem

$$= \sqrt{S^3}\left(\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Daraus folgt:

Das Maximum für den Inhalt des Dreiecks zwischen zwei zusammengehörigen Radiivectoren beider Curven ist $= \frac{S^2}{8}$ also = dem Quadrat der Blattcurve Ra. Der Rv der Begrenzungscurve ist in diesem Falle $= S\sqrt{\frac{5}{8}}$.

Da die eine Kathete doppelt so gross wie die andere, so hat der anliegende Winkel an der Hypotenuse die $\operatorname{tg} = \frac{1}{2}$. Die Neigung der Hypotenuse S gegen die X-Achse ist

$$= \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1$$

Nimmt man diesen Winkel doppelt, so ist

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}-2}{1-2+2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2} = 1$$

d. h. also $2\alpha = 45^0$ und die Neigung von S beträgt $\frac{1}{4}$ von einem Rechten.

Die Construction des Falles ist hiernach äusserst leicht.

Die Gleichung der Blattcurve gibt, nach der Cardani'schen Formel aufgelöst für $\sqrt{x^2}$ den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{y}{2}}\left[\sqrt{\sqrt{y^2-\frac{4S^2}{27}}-y_1}-\sqrt{\sqrt{y^2_1-\frac{1S^2}{27}}+y}\right]$$

Nun werden wir aber sogleich zeigen, dass y^2 höchstens =, niemals aber grösser als $\frac{1S^2}{27}$ sein kann, mithin ergäbe die Formel nur für diesen Fall einen obendrein noch negativen reellen Wert, in allen übrigen einen imaginären. Selbst für ersteren Fall wird der Wert für x imaginär, weil dann $\sqrt{x^2}$ negativ sein müsste, also

$$\sqrt{x} = i$$

Es würde uns sonach schwer werden, ohne Zuhülfenahme der höheren Mathematik über die weiteren Eigenschaften der Curve es zu ermitteln, wenn nicht ihre Beziehung zu den Coordinaten der Begrenzungscurve hierzu ein Mittel an die Hand gäbe. Dadurch aber sind wir in der Lage, „die Coordinaten der Ersteren durch die der Letzteren zu ersetzen", damit zu operiren und nach erlangtem Resultat wieder in jene überzuführen.

§ 10.

Ein Versuch lehrt sogleich, dass keine Möglichkeit besteht, die Gleichung der Tangente an die Blattcurve auf dem gewöhnlichen Wege der Secantengleichung zu finden, daher wir hier in erster Linie das oben erwähnte Verfahren anwenden müssen. Hierbei fällt sofort Eins auf. Bei der Form der Blattcurve beginnen nämlich die Tangenten, wenn man sie successiv um die Curve herumführt, im Anfangspunkt und auf der Y-Achse, vollführen eine Wendung von $^3/_4$ Kreis und endigen wieder im Anfangspunkt jedoch auf der X-Achse. Dabei passiren sie 2 Lagen, wo die Tangente einmal mit der X-, einmal mit der Y-Achse parallel läuft und die hierzu gehörigen Punkte nenne ich Cultimationspunkte der Curve, deren Einer im Maximum für y, der andere für x repräsentirt. Diese müssen für die Tangenten-Gleichung von Bedeutung sein, weil offenbar vom Anfangs- bis zum Y-Cultimationspunkte der Winkel, welchen die Tangente mit der X-Achse bildet, eine positive Tangenten-Function hat, diese im Y-Culminationspunkte null wird, dann in eine negative übergeht und im X-Culminationspunkt $\mp\infty$ wird; sie schlägt darauf wieder in positiv um und endigt im Anfangspunkt mit O. Dies wird die Tangenten-Gleichung ausweisen müssen und es könnte daher überflüssig scheinen, die Culminationspunkte vorher aufzusuchen. Demnach wollen wir, da die Operation sehr einfach

ist, dies vorher tun, weil wir dann bei Auftreten des betr. Ausdrucks in der Tangenten-Gleichung dessen Bedeutung sofort erkennen.

Es war

$$y_1 = \sqrt{x^2 y}$$

und da

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{S^2} - \sqrt{y^2}$$

so ist

$$y_1 = \sqrt{S^2 y} - y$$

Hiervon ist aber das Maximum zu suchen

$$\sqrt{S^2 y} - y > \sqrt{S^2}(\sqrt{y} \pm z) - y \mp 3z\sqrt{y^2}$$

$$3z\sqrt{y^2} > z\sqrt{S^2} \qquad\qquad 3\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x^2} = 2\sqrt{y^2}$$

multiplicirt mit

$$\sqrt{x^4 y^2} = 2\sqrt{x^2 y^4} \quad \text{oder} \quad y^2 = 2x^2$$

Für den Y-Culminationspunkt ist also y die mittlere Proportionale zwischen x und $2x$. Da wir aber auch in § 8. gefunden hatten

$$y_1^2 = x_1 \,.\, x$$

so ist offenbar

$$x_1 = 2x$$

und weil

$$n = x_1 + x$$

so ist

$$n = 3x$$

und es ergibt sich

$$x = \frac{n}{3}$$

Ist aber die Kathete durch die Ordinate in $1/3$ geteilt, so muss es auch die Hypotenuse durch den Combiantionspunkt sein; m. r. W.: „der Culminationspunkt gehört zu einem Punkte der Begrenzungscurve, dessen zugehörige Ellipse die Achsen hat $\frac{2S}{3}$ und $\frac{S}{3}$“. Da beide Punkte symmetrisch zur 45⁰ Linie liegen müssen, so liegt für den X-Culmiationspunkt das Verhältniss umgekehrt:

$$2y^2 = x^2.$$

Bestimmen wir die Coordinaten genauer. Es war für Y-Maximum

$$3x_1^2 = \sqrt{S^2 \,.\, 2x^4}, \quad 27x^6 = S^2 \,.\, 2x^4, \quad x^2 = \frac{S^2 \,.\, 2}{27}, \quad x = S\sqrt{\frac{2}{27}}$$

$$y^2_1 = 2x_1^2 = \frac{S^2 \cdot 4}{27}, \quad y = \frac{S \cdot 2}{\sqrt{27}}$$

$$\text{Radiusvector} = \sqrt{3x^2} = \frac{S}{3}\sqrt{2}$$

Da nun der betr. Punkt der Begrenzungscurve ebenfalls im Abstande $S/3$ vom Endpunkte der Hypotenuse liegt, so muss das Stück zwischen beiden Punkten wiederum $S/3$ sein und verhält sich mithin zum Ro der Blattcurve wie $1 : \sqrt{2}$ oder wie die Seite eines Quadrats zur Diagonale.

Der Ro der Begrenzungscurve ist hiernach

$$= \sqrt{\frac{S^2}{9} + \frac{S^2 \cdot 2}{9}} = \frac{S}{3}\sqrt{3} = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

Es war für diesen Fall

$$\sqrt{x^2} = 2\sqrt{y^2}$$

also auch

$$3\sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}, \quad 27y^3 = S^2$$

$$y = \frac{S}{\sqrt{27}} \quad \sqrt{x^2} = \frac{2\sqrt{S^2}}{3} \quad x^2 = \frac{8S^2}{27} \quad x = S\sqrt{\frac{8}{27}}$$

$$m = \sqrt{S^2 k} = \sqrt{\frac{S^3}{\sqrt{27}}} = \frac{S}{\sqrt{3}} = Ro \quad n = \sqrt{S^2 x}$$

$$= \sqrt{S^3}\sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Also $m : n = 1 : \sqrt{2}$ und Inhalt des Dreiecks

$$= \frac{S^2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{S^2}{3\sqrt{2}}$$

Hier ist auch derselbe Fall, wo die Entfernung des Ellipsenbrennpunktes vom Anfangspunkt gleich ist dem Rv an den Berührungspunkt der Begrenzungscurve. Denn

$$a = 2b, \quad \text{also} \quad e^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 = \frac{3S^2}{9} = \frac{S^2}{3} \quad \text{und}$$

$$e = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

In diesem Falle bilden beide Radiivectoren von den Brennpunkten an

den Berührungspunkt 0 einen **rechten Winkel** miteinander. Die unter 45° gegen beide Achsen laufende Verbindungslinie der Culminationspunkte ist

$$(y_1 - x_1)\sqrt{2} = \frac{S}{\sqrt{27}}(2-\sqrt{2})\sqrt{2} - (\frac{2S\sqrt{2}-1}{\sqrt{27}} = D$$

§ 11.

Gehen wir nun an die Aufsuchung der Tangentengleichung. Der Weg hierzu ist folgender: Man zieht einen Radiusvector und stellt dessen Gleichung auf. Dann stellt man die Gleichung einer zum *Ro* parallelen Secante auf, dass dann eine zu beiden senkrechte Linie und ermittelt dadurch den allgemeinen Ausdruck für den Abstand zwischen *Ro* und Secante. Dieser Abstand wird ein Maximum, wenn die Secante zur Tangente wird. Bei Aufsuchung dieses Maximi zeigt es sich, dass es damit gleichbedeutend ist, wenn man für den Abschnitt p, welchen die Secante auf der X-Achse rechts vom Anfangspunkte erzeugt, das Maximum aufsucht, weil zwischen A und p ein festes Verhältniss besteht, denn A ist $= p \,.\, \cos\alpha$. In der Figur ist

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} : y_1 = p : A$$

ferner

$$x_1 - p : y_1 = x : y$$

Mithin ist die Ermittlung von A erst durch p möglich und es ist daher nur von diesem das Maximum aufzusuchen. Es ist

$$p = \frac{x_1 y - y_1 x}{y} = \text{Maximum.}$$

Der Nenner y kann, da der *Ro* gegebene constante Coordinaten hat, für die Ermittelung wegfallen, und wir verwandeln nunmehr die Blattcurvencoordinaten in solche der Begrenzungscure, da sonst nicht y in x übergeführt werden kann. Es ist

$$x_1 y - x y_1 = \sqrt{x_1 y_1^2 \,.\, x^2 y} - \sqrt{x y^2 \,.\, x_1^2 y_1}!$$

Hier kann Factor $\sqrt{xy}$ als constante Grösse wiederum herausgezogen werden. Es bleibt:

$$\sqrt{x \,.\, x_1 y_1^2} - \sqrt{y \,.\, x_1^2 y_1} = \text{Maximum.}$$

Variiren wir jetzt $\sqrt{x_1}$ als $\sqrt{x_1} \pm z$, dann ist

$$\sqrt{x_1^2}\ \sqrt{\ 2z\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1^2} - \sqrt{S^2}}$$
$$\mp 2z\sqrt{x_1}$$

Wir haben also:

$$\sqrt{xx_1 y_1^2} - \sqrt{yx_1\ y_1} \quad \text{oder} \quad \sqrt{x_1 y_1^2} - \sqrt{\frac{y}{x}}\ \sqrt{x_1^2 y_1} >$$

$$(\sqrt{x_1 xz}))(\sqrt{y_1^2 \mp 2z\sqrt{x_1}}) - \sqrt{\frac{y}{x}}\ (\sqrt{x_1^2} \mp 2z)\ \sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}$$

$$\sqrt{x_1 y_1^2} - \sqrt{\frac{y}{x}}\ \sqrt{x_1^2 y_1} > \sqrt{x_1\ y_1^2} \pm z\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1^2}$$

$$- \sqrt{\frac{y}{x}}\ (\sqrt{x_1^2} \pm 2z\sqrt{x_1})\ \sqrt{\sqrt{k^{13}} \mp 2z\sqrt{x_1}}$$

bringe die negativen Glieder auf die andere Seite:

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\ (\sqrt{x_1^2} \pm 2)\ \sqrt{x_1})\ \sqrt{\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}} > \sqrt{\frac{y}{x^2}}\ \sqrt{x_1^2 y_4}$$
$$\pm z(\sqrt{y_1^2} - 2\sqrt{x^2})$$

quadrire jetzt

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\ (\sqrt{x_1^4 \pm 4zx_1})\ )\sqrt{y_1^2 \mp 2z\sqrt{x_1}})$$

$$> \sqrt{\frac{y^3}{y^3}}\ \sqrt{x_1^4 y_1^2} \pm 2z\ \sqrt{\frac{y}{x}}\ \sqrt{x_1^2 y_1}\ (\sqrt{y_1^2} - 2\sqrt{x_1^5})$$

aufgelölst

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\ \sqrt{x_1^4\ y_1^2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2}}\ 4zx_1\ \sqrt{y_{12}} \mp \sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\ 2zx_1\ \sqrt{x_1^2}$$

$$> \sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\ \sqrt{x_1^4 y_1^2} \pm 2z\ \sqrt{\frac{y}{x}}\ \sqrt{x_1^2 y_1} - 2\sqrt{x_1^2})$$

$$\text{dividire } 2z\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad z = 0$$

die beiden Seiten werden gleich

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\ y_1(2\sqrt{y_1^2} - \sqrt{x_1^2}) = \sqrt{x_1^2 y_1}\ (\sqrt{y_1^2} - 2\sqrt{x_1^2})$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\ \sqrt{x_1^3}(2\sqrt{y_1^2} - \sqrt{x_1^2}) = \sqrt{y_1 x^2}\ \ (\sqrt{y_1^2} - 2\sqrt{x_1^2})$$

multiplicire mit $\sqrt{x_1 y_1^3}$

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{x_1^2 y_1}\,(2\sqrt{x_1^2 y_1^4}-\sqrt{x_1^4 y_1^2}) = \sqrt{y_1^2 x_1}\,(\sqrt{y_1^4 x_1^2}-2\sqrt{x_1^4 y_1^2})$$

führe jetzt die Coordinaten der Blattcurve wieder ein. Es ist

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y}\cdot y_1(2x_1^2-y_1^2) = x_1(x_1^2-2y_7^2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}\,\frac{(2x_1^2-y_1^2)}{x_1^2-2y_1^2}$$

da nun die Winkeltangente des $Ro = \frac{y}{x}$ und die der Secante, weil sie ihm parallel ist, auch $= \frac{y}{x}$ sein muss, so ist letzterer Ausdruck gleich der Winkeltangente der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ und die Tangentengleichung lautet:

$$y-y_1 = \frac{y_1}{x_1}\,\frac{2x_1^2-y_1^2}{x_1^2-2y_1^2}(x-x_1)$$

Wir finden also unsere Erwartung vollkommen bestätigt, dass die charakteristischen Merkmale der Culminationspunkte in der Tangentengleichung wiederkehren. Der Zähler $2x_1^2-y_1^2$ ist für den y-Culminationspunkt bestimmt, denn setzen wir

$$2x_1^2 = y_1^2$$

(wie in § 10. ermittelt), so wird die Winkeltangente $= 0$, d. h. die Tangente ist der X Achse parallel. Der Nenner hingegen bestimmt den X Culminationspunkt, denn sobald

$$2y_1^2 = x_2^2$$

ist, wird die Winkeltangente $= \infty$, d. h. die Tangente steht auf der X Achse senkrecht.

Setzt man in obigem Ausdruck $x_1 = y_1$, so ist dies offenbar der Fall der Tangente im Symmetriepunkt, und es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

d. h die Tangente steht unter 45° von links oben nach rechts unten gegen beide Achsen geneigt.

Bemerkenswert ist, dass, obwol die Blattcurve mit den Achsen nur den Anfangspunkt gemein hat, dennoch die Gleichung zwei Werte ergiebt, jenachdem man x_1 oder $y_1 = 0$ setzt. Ist

$$y_1 = 0$$

so hat man Tangente = 0. Ist

$$x_1 = 0$$

so ist die Tangente $= \infty$. Daraus folgt, dass es im Anfangspunkt 2 Tangenten giebt und zwar sind dies die Achsen selbst.

Sowol in der Tangentengleichung der Begrenzungs- wie der Blattcurve kommt der Parameter S nicht mehr vor. Dies beweist, dass alle derartigen Curven untereinander proportional sind und daher keinen Punkt gemein haben können, nur die Blattcurven haben den Anfangspunkt gemein.

Wir sind allerdings bei unserem Aufsuchen der Tangentengleichung von einer rechts vom Ro liegenden Secante ausgegangen. Da aber die resultirende Gleichung dennoch allen Lagen der Tangente Rechnung trägt, so beweist schon dies, dass das Ergebniss dasselbe gewesen wäre, wenn wir die Secante links vom Ro angenommen hätten. Wer es übrigens versucht, wird meine Behauptung bestätigt finden.

§ 12.

Wenn wir auf Grund der gefundenen Resultate nunmehr die Winkel feststellen, welche in zwei zusammengehörigen Punkten der Blatt- und der Begrenzungscurve zwischen den betr. Radiivectoren und den Tangenten an die betr. in diesen Punkten entstehen, so ergiebt sich der auffallende Umstand, dass diese Winkel immer gleich sind. Ermitteln wir zuerst diesen Winkel für die Begrenzungscurve. Es ist

$$\delta = \alpha + \beta$$

also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{also}$$

$$\delta\delta = \frac{\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}}{1 - \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{y\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})}{\sqrt{x^4}-\sqrt{y^4}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}$$

Ebenso haben wir bei der Blattcurve

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \operatorname{tg}(\alpha_1-\beta_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\beta_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta_1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{y}{x}\,\frac{2x^2-y^2}{x^2-2y^2}$$

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\frac{y}{x}-\frac{2x^2-y^4}{x^2-2y^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{2x^2-y_9}{x^2-2y^2}\right)}$$

$$= \frac{xy(x^2-2y^2-2x^2+y^2)}{x^4-2x^2y^2+2x^2y^2-y^4} = -\frac{xy(x^2+y^2)}{x^4-y^4} = -\frac{xy}{x^2-y^2}$$

führen wir dies in die Coordinaten der Begrenzungscurve über, so ist

$$\operatorname{tg}\delta_1 = -\frac{xy}{\sqrt{x^2y^4}-\sqrt{x^4y^2}} = -\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}-\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}$$

also

$$\delta = \delta_1$$

wonach die Construction einer Tangente an die Blattcurve sehr einfach ist.

Wenn wir nun 2 symmetrisch liegende Radienvectoren annehmen, so lässt sich der zwischen beiden liegende Winkel leicht bestimmen, da das $x =$ dem y des andern Curvenpunktes und umgekehrt Es ist somit

$$\operatorname{tg}E = \frac{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

oder, auf den kleineren Winkel bezogen

$$= \frac{x^2-y^2}{2xy}$$

Dies ist aber der halbe reciproke Wert der Tangente des Winkels zwischen Tangente und *Rv*. Hieraus resultirt erstens der Satz:

D a s P r o d u c t der Tangenten der Winkel zwischen *Ro* und

Tangente an die Curve und zwischen beiden symmetrischen Radiivectoren ist constant $= \frac{1}{2}$.

Zweitens könnte man auf Grund dieses Umstandes eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Blattcurve construiren. Es sei st die Tangente im Punkte i an die Curve (Fig. 10). Dann finden wir mittelst des Zirkels sogleich den zu ri gehörigen Ro. rk. Nun fällen wir von k eine Senkrechte auf ri, verlängern über l hinaus, bis diese die Tangente schneidet in q.

Dann muss nach Obigem sein

$$\frac{ql}{li} \cdot \frac{lk}{rl} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad li \,.\, sl = 2ql \,.\, lk$$

d. h. also, wenn man ql nochmals verlängert um sich selbst, sodass $oq = ql$, dann liegen die 4 Punkte o, i, k, r auf der Peripherie eines Kreises, in welchem ei und ok sich schneidende Sehnen sind. Da mir nun dieser Kreis durch die 3 Punkte r, i, k gegeben ist, so hat man nur die Senkrechte kl zu fällen, durch Verlängerung den Punkt o zu erhalten, ol zu halbiren und hat dann in qi die gesuchte Tangente.

Die im vorigen § gefundene Tangentengleichung muss, wie auf der Hand liegt, immer zusammengehörigen parallelen Tangenten entsprechen, mögen auch die Berührungspunkte wie natürlich verschiedene Coordinaten haben. Denn zu jedem Punkte links der Symmetrie Achse gibt es notwendig einen rechts derselben, dessen Tangente zur Tangente im Ersteren parallel ist. Es müsste also sein

$$\frac{y}{x} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2} = \frac{y_1}{x_1} \frac{2x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 - 2y_1^2}$$

Eine weitere Behandlung dieser Gleichung verlangt indes vorherige Verwandlung in die Coordinaten der Begrenzungscurve für xy. Dann ist:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2y}{xy^2}}\right)^2 \frac{(2\sqrt{x^2y^4} - \sqrt{x^4y^2})^2}{(\sqrt{x^2y^4} - 2\sqrt{x^4y^2})^2} = \frac{(2x_1^2 - y_1^2)^2}{(x_1^2 - 2y_1^2)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} \frac{(2\sqrt{y^2} - \sqrt{x^2})^2}{(\sqrt{y_2} - 2\sqrt{x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}} \cdot \frac{(2\sqrt{S^2} - 3\sqrt{x^2})^2}{(\sqrt{S^2} - 3\sqrt{x^2})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{S^3x^2} - 12\sqrt{S^2x^4} + 9\sqrt{x^6}}{\underbrace{S^2 - 6\sqrt{S^4x^2} + 9\sqrt{S^2x^4} - \sqrt{S^4x^2} + 6\sqrt{S^2x^4} - 9\sqrt{x^6}}_{S^2 - 7\sqrt{S^4x^2} + 15\sqrt{S^2x^2} - 9\sqrt{x^6}}}$$

$$= \frac{y_1^2(2y_1^2-y_1^2)^2}{x_1^2(x_1^2-2y_1^2)^2}$$

$$(4\sqrt{S^2x^2}-12\sqrt{y^2x^4}+9\sqrt{x^6})x_1^2(x_1^4-2y_1^2)^2$$

$$=(S^2-7\sqrt{S^4x^2}+15\sqrt{S^2x^4}-9\sqrt{x^6})y_1^2(2x_1^2-y_1^2)^2$$

$$9\sqrt{x^6}[x_1^2(x_1^2-2y_1^2)^2+y_1^2(2x_1^2-y_1^2)^2]$$

$$-3\sqrt{S^2xx^4}[4x_1^2(x_1^2-2y_{11}^2)+5y_1^2(2x_1^2=y_1^2)^2]$$

$$+\sqrt{S^4x^2}[4x_1^2(x_1^2-2y_1^2)^2+7y_1^2(2x_1^2-y_1^2)^2 = S^2y_1^2(2x_1^2-y_1^2)^2$$

Ich setze nun

$$x_1^2(x_1^2-2y_1^2)^2 = c \quad \text{und} \quad y_1^2(2x_1^2-y_1^2)^2 = d$$

dann lautet die Gleichung:

$$9\sqrt{x^6}(e+d)-3\sqrt{S^2x^4}(4c+5d)+\sqrt{S^4x^2}(4c+7d] = S^2d$$

$$\sqrt{x^6}-3\sqrt{S^2y^4}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}+\sqrt{S^4x^2}\frac{(4c+7d)}{9(c+d)} = \frac{S^2d}{9(c+d)}$$

$$\left[\sqrt{x^2}-\sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]^3-3\sqrt{S^4x^2}\frac{(4c+5d)^2}{9^2(c+d)^2}+\sqrt{S^4c^2}\frac{(4e+7d)}{9(c+4)}$$

$$= \frac{S^2d}{9(c+d)}-\frac{S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)}$$

$$\left[\sqrt{x^2}-\sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]^3-\left[\sqrt{x^2}-\sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]$$

$$.\ 3\sqrt{S^4}\left[\frac{(4c+5d)^2}{9^2(c+d^2)}-\frac{3(4c+7d)(c+d)}{9^2(c+d)^2}\right]$$

$$= \frac{S^2d}{9(c+d)}-\frac{S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3}+\frac{2S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3}-\frac{9S^2(4c+7d)(+d)}{9^2(c+d)^2}$$

$$\left[\sqrt{x^2}-\sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]^3-\left[\sqrt{x^2}-\sqrt{S^2}\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right]$$

$$.\ 3\sqrt{S^4}\left[\frac{16c^2+40dc^2+25d^2-12c^2-33dc-21d^2}{9^2(c+d)^2}\right]$$

$$= c^2+7dc+4d^2 = 4(c+d)^2-dc$$

$$\frac{S^2}{2^3(6+d)^3}[d\ .\ 9^2\ .\ (c+d)^2+2(4c+5d)^3-9^2(4c+7d)(c+d)^2]$$

$$= 9^4(c+d)^2(4c+7d-d = -\ 9^2(c+d)^2(4c+6d)$$

$$= -\frac{S^2}{9^3(e+d)^3}[9^2(c+d)^2(4c+6d)-2(4c+5d)^3]$$

$$= -\frac{2S^2}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3]$$

Setze

$$\left[\sqrt{x^2} - \sqrt{S^2}\,\frac{(4c+5d)}{9(c+d)}\right] = p+q$$

$$p^3 + 3pr(p+r) + r^3) - (p+r)3\sqrt{S^4}\left[\frac{(4c+d)^2 - dc}{9^2(b+d)^2}\right]$$

$$= -\frac{2S^8}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]$$

setze

$$pr = \sqrt{S^4}\left[\frac{4(c+d)^2 - dc}{9^2(c+d)^2}\right]\; r^3 = \frac{S^4[4(c+d)^2 - dc]^3}{9^5(c+d)_1 p^3},$$

$$p^3 + \frac{S^4[4(c+d)^2 - dc]^2}{9_5(c+d)^6 p^3} = -\frac{2S^2}{9^3(c+d)^3}[9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]$$

$$p^6 + \frac{2S^2p^3[q^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+4d)^3]}{9^3(c+d)^3} = -\frac{S^4[4(c+d)^2 - dc]^3}{9^6(c+d)^6}$$

$$+ \frac{S^9[q^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+3d)^3]^2}{9^6(c+d)^6}$$

$$+ \frac{S^4[9^2(c+d)^2(2c+3d) - 4c+5d^{32}}{9^6 . c+d)^6}$$

$$\left. p_3 + \frac{S^2[9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]}{9^8(c+d)^3}\right\}^2$$

$$= \frac{S^4}{9^6(c+d)^6}[\{9^2(e+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3\}^2 = \{4(c+d)^2 - dc\}^3]$$

Um zu sehen, ob der rechtsseitige Ausdruck überhaupt einen positiven Wert haben kann — wenn er das nicht könnte, wäre das Resultat imaginär und also die Lösung auf diesem Wege unmöglich — nehmen wir der Kürze halber einmal $c = d$ an, ein Fall, der eintritt, wenn die Tangente unter 45^0 geneigt. Dann wird die Klammer:

$$\{9^2 . 4c^2 . 5c - 9^3c^3\}^2 - 18e^2 - c^2\}^3 = (9^2 . 20 . c^3 - 9^3c^3)^2 - 15^3 . c^6$$

hier kann b^6 ausfallen, da es nur auf den anderen Factor ankommt,

$$9^4 . (20-9)^2 - 15^3 = 3^6 . 11^2 - 5^3 . 3^8 = 3^3(3^5 . 11^2 - 5^3)$$
$$= 3^3(243 . 121 - 125)$$

was positiv bleibt; also hat die Gleichung eine richtige Lösung

$$p^3 = -\frac{S^2[9^2(c+d)^2(2e+3d) - (4c+5d)^3[\pm S^2\sqrt{[9^2(c+d)^2(2c+4d(- (4b+5d)^3]^2 - [4(c+d)^2 - dc)^6}}}{9^5(c+d)^3}$$

$$p+r = \sqrt{x^2} - \frac{\sqrt{S^2(4c+5a)}}{6(c+d)} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}$$

$$\Bigg[\sqrt{\underbrace{\sqrt{9[^2(e+d)^2(2e+3d)-(4c+5d)^3]^2}}_{\text{Klammer } = f^3 \text{ gesetzt}}\underbrace{-4(c+2)^2-dc]^3}_{= g^2 \text{ gesetzt}}} \qquad -[9^2(c+d)_g(2e+3d)-(4c+5)^3]$$

$$-\sqrt{\sqrt{9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3]^2-[4(c+d)^2-dc]^3} \qquad +[9^2(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^3}\Bigg]$$

$$\sqrt{x^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}\Big\{(4c+5d+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^4} - \sqrt{\sqrt{f^6-g}+f^3}$$

$$\sqrt{y^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}\Big\{\underbrace{9c+9d-4c-5d}_{5c+4d} - \sqrt{\sqrt{f^6-g^5}+f^3}$$

$$+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}\Big\}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{S}}{3\sqrt{c+d}}\sqrt{[[(4e+5d)+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}=f^3}-\sqrt{\sqrt{f_1-g^6}+f^3}]}$$

$$\sqrt{xy^2} = x = \frac{S}{27\sqrt{(c+d)^3}}\Big\{5c+4d-\sqrt{\sqrt{f_1-g^6}-f^3}$$

$$+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3}\Big\}\sqrt{4c+5d+\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3}-f^3-\sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}}$$

Wenn man bedenkt, dass schon c und d Grössen 6ten Grades sind, f und g also ebenfalls, so leuchtet die angegebene Complicirtheit des Ausdrucks ein, der allerdings ja gestattet, wenn $x_1 y_1$ gegeben sind, den Punkt xy zu bestimmen, dessen Tangente mit der in $x_1 y_1$ parallel läuft, niemals aber diese Bestimmung auf Grund irgend einer Beziehung zwischen $x_1 y_1$ und xy zulässt.

Die Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten zweier parallelen Tangenten ist ein Durchmesser der Curve, dessen Länge sich auf Grund der vorstehenden Formel für jeden einzelnen Fall berechnen lässt.

Die allgemeine Formel für diese Länge ist ihrer Cmplicirtheit wegen zu irgend welchen Operationen ganz untauglich und müssen wir uns daher darauf beschränken, einige specielle Fälle zu untersuchen.

Nachdem wir die Culminationspunkte, schon analysirt, deren Parallel-Tangenten die Achsen selbst sind, ist wesentlich der Fall von Interesse, wo die Tangenten der Symmetrie-Achse parallel laufen, also unter 45⁰ gegen beide Achsen.

Dann ist $\operatorname{tg}\alpha = 1$ also

$$y_1(2x_1^2 - y_1^2) = x_1(x_1^2 - 2y_1^2)$$

$$2x_1^2 y_1 - y_1^3 = x_1^3 - 2x_1 y_1^2$$

$$x_1^3 + y_1^3 = 2x_1 y_1(x_1 y_1(x_1 + y_1)$$

dividire durch $(x_1 + y_1)$

$$x_1^2 + y_1^2 - x_1 y_1 = 2x_1 y_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 3x_1 y_1 = \sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

$$27x_1^3 y_1^3 = S^2 x_1^2 y_1^2$$

$$27x_7 y_1 = S^2$$

$$x_1 y_1 = \frac{S^2}{27}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 y_1 &= \frac{2S^2}{27} \\ x_1^2 + y_1^2 &= \frac{3S^2}{27} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x_1 + y_1)^2 &= \frac{5S^2}{27} \\ (x_1 - y_1)^2 &= \frac{S^2}{27} \end{aligned}$$

$$x_1 + y_1 = S\sqrt{\frac{5}{27}}$$

$$x_1 - y_1 = S\sqrt{\frac{1}{47}}$$

Inhalt des zw. beiden *Ro* einschl. Dreiecks

$$= \frac{x_1^2 - y_1^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 27} S^2$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} = \frac{S}{2\sqrt{27}}(\sqrt{5} \pm 1)$$

Da beide Tangenten-Berührungspunkte offenbar symmetrisch liegen, so ist das *a* des einen gleich dem *y* des andern und umgekehrt.

$$Rv = \sqrt{x_1^2 + k_1^2} = \frac{S}{2\sqrt{27}}\sqrt{5+1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{S\sqrt{12}}{2\sqrt{27}} = \frac{S}{3} = Rv$$

Der *Ro* im Berührungspunkt der 45° Tangente ist also ein Drittel der Constanten S und verhält sich zum *Ro* der Culminationspunkte wie $1:\sqrt{2}$ d. h. wie die Seite eines Quadrats zur Diagonalen. Ferner ist der Durchmesser

$$D = (x_1 - y_1)\sqrt{2} = \frac{S\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}(\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1) = \frac{S\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$$

$$= D = S\sqrt{\frac{2}{27}}$$

Dies war aber oben als x des y Culminationspunktes gefunden worden, mithin haben wir den neuen Satz entdeckt, dass der kleinste Durchmesser — denn das ist Obiger offenbar — gleich ist der Ordinate bzhw. Abscisse der Culminationspunkte.

Bestimmen wir den zwischen den Radiivectoren an dieser Berührungscurve den 45° Tangenten liegenden Winkel. Es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2 - y^2}{4xy}$$

wo

$$x = \frac{S(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{27}}, \quad y = \frac{S(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{27}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{S^2(6+2\sqrt{5}) - S^2(6-2\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)S^2} = \frac{4\sqrt{5}}{2\,.\,4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Für den Culminationspunkt ist der eingeschl. Winkel

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{4S^2}{27} - \frac{2S^2}{27}}{2\,.\,2\frac{S^2\sqrt{2}}{27}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Suchen wir noch zu obigen 2 Punkten der 45 Grad-Tangenten die entsprechenden Punkte der Begrenzungscurve. Wir hatten

$$x^2 = y_1 y$$

also

$$y = \frac{x^2}{y} = \frac{S^2(\sqrt{5}-1)^2}{S(\sqrt{5}-1)\,2\sqrt{27}} = \frac{S(6+2\sqrt{6})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)2\sqrt{27}}$$

$$= \frac{S(16+8\sqrt{5})}{8\sqrt{27}} = \frac{S(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{27}} = y$$

Ferner

$$y_1^2 = x \,.\, x, \quad x = \frac{y^2}{x^2} = x_1 = \frac{S(\sqrt{\sqrt{5}-2})}{\sqrt{27}}$$

$Rv = \sqrt{x^2+y^2} = S\sqrt{\frac{2}{3}} =$ gleich 3mal so gross wie der kleinste Durchmesser der Blattcurve.

Es ergeben sich nunmehr für den quäst. Punkt der 45° Tangente folgende Eigentümlichkeiten:

$$x \,.\, y = x \,.\, y = \frac{S^2}{27} \qquad x \,.\, y = \frac{S^2}{27}$$

$$a = \sqrt{Sx^2} = \frac{S}{3}\sqrt{9-4\sqrt{5}}, \quad b = \sqrt{Sy^2} = \frac{S}{3}\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$a \,.\, b = \frac{S^2}{9}$$

$$m = \sqrt{S^2 y} = \frac{S}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{5}+2}, \quad n = \sqrt{S^6 x} = \frac{S}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$m \,.\, n = \frac{S^2}{3}$$

worin eine sehr merkwürdige Beziehung sich ausdrückt.

Das Dreieck, was durch Verbindung der Scheitel der Ellipse entsteht, ist also 1/3 von dem durch m, n und S gebildeten; das Dreieck aus den Coordinaten x, y und dem Ro ist dann 1/9 des letzteren.

Wenn man die Endpunkte des kürzesten Durchmessers lh durch zu den Achsen parallele Linien mit dem auf der Symmetrie-Achse liegenden Punkte k verbindet, so entsteht das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck lkh und in diesem sind die Katheten

$$= \frac{lh}{\sqrt{4}} = \frac{S}{\sqrt{27}}$$

Da wir nun für den Culminationspunkt

$$y \text{ bzhw. } x = \frac{2S}{\sqrt{27}}$$

hatten, so ist

$$kh = \tfrac{1}{2}\, og$$

d. h. **die Tangente unter 45° halbirt** og, da

$$kh = oi = \frac{og}{2}$$

Ebenso halbirt cl die Linie or.

„Demnach hat der kürzeste Durchmesser der Blattcurve die halbe Länge der Diagonale des umschriebenen Quadrats.“

Nach allem Obigen ist die geometrische Construction der Culminationspunkte, der 45° Tangenten und des kürzesten Durchmessers für eine gegebene Blattcurve äusserst einfach.

Nimmt man den zwischen 2 symmetrischen Radiivectoren eingeschl. Winkel zu 61° an, so muss das Dreieck, welches durch Verbindung der Peripheriepunkte entsteht, notwendig ein **gleichseitiges** sein. Zur Bestimmung dieses Falles setzen wir also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \sqrt{3}$$

Dann ist

$$x^4 - y^2 = 2\sqrt{3} \cdot xy$$

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 12x^2y^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 16x^2y^2 = (x^2 + x^2)^2$$

$$x^2 + y^2 = 4xy = \sqrt{S^2x^2y^2}$$

$$64x^3y^3 = S^2x^2y^2, \quad xy = \frac{S^2}{64}$$

$$\sqrt{Sxy} = \frac{S}{4} = \sqrt{x^4 + y^2} = Ro \quad \text{(Siehe Figur vor. Seite.)}$$

Wir erhalten also das überraschende Resultat, dass das in die Curve eingeschriebene gleichseitige Dreieck, welches mit einer Ecke im Anfangspunkt liegt, den 4ten Teil der Constanten S zur Seite hat. Bestimmen wir nun die Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{S^2}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2}{32} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2 \cdot 3}{32} \qquad & x+y &= \frac{S}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{32} \qquad & x-y &= \frac{S}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$x = \frac{S(\sqrt{3}+1)}{8\sqrt{2}}, \quad y = \frac{S(\sqrt{3}-1)}{8\sqrt{2}}$$

Die Punkte der Begrenzungscurve sind:

$$xy = \frac{S^2}{64} \quad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x} = 8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3} = 26+15\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x} = (2+\sqrt{3})^3, \quad y = \frac{S}{8}\sqrt{(2+\sqrt{3})}, \quad x = \sqrt{\frac{S^2}{64(2+\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{S}{8}\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ro = \frac{S}{8}\sqrt{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3} = \frac{S}{8}\sqrt{52} = \frac{S}{4}\sqrt{13}$$

tg des eingeschl. Winkels beider symm. Rven = 26.

§ 13.

Ein besonderer Specialfall ist der, wenn die Verbindungslinie zweier parallelen Tangenten, also ein Durchmesser der Blattcurve, parallel zu einer Achse ist. Dieser Specialfall ist mit einem andern identisch. Nämlich zu jedem x gehören 2 verschiedene y (ausser dem Anfangs- und dem Culminationspunkt), wie zu jedem y zwei x und darum muss auch die Auflösung der Blattcurvengleichung nach x 2 Werte ergeben, wie auch die nach y. Für ein y hat also die Blattcurve 2 Schnittpunkte, deren Verbindungslinie gleich der Differenz der zwei x, d. h. $= x_1 - x_0$ ist. Entsprechend ist für ein x der verticale Durchmesser $= y_1 - y_2$. Für obigen Fall nun, wo die Schnittpunkte für ein x oder ein y zugleich Berührungspunkte paralleler Tangenten sind, ist diese Differenz ein Maximum. Denn vor diesen Schnittpunkten, d. h. wenn diese näher beim Anfangspunkt liegen, convergiren die Tangenten in demselben nach dem Anfangspunkt; jenseits dieser Schnittpunkte convergiren sie in entgegengesetzter Richtung, mithin muss in beiden Fällen der Durchmesser abnehmen.

Es ist

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 = \sqrt{S^2 x^2 y^2} \\ x^2+y_1^2 = \sqrt{S^2 x^2 y_1^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y^2-z_1^2 = \sqrt{S^2 x^2}(\sqrt{o^2}-\sqrt{y_{1^2}}) \\ \sqrt{y^4}+\sqrt{y^2 y_1^2}+\sqrt{y_1^4} = \sqrt{S^2 x^2} \end{array}$$

Dividire durch letztere Klammer.

$$\sqrt{y_1^4}+\sqrt{y_1^2 y^2}+\sqrt{\frac{y^4}{4}} = \sqrt{S^2 x^2} - 3\frac{\sqrt{y^1}}{4}$$

$$\sqrt{y_1^2} = -\frac{\sqrt{y^2}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{S^2 x^2} - 3\frac{\sqrt{y^4}}{4}}$$

$$\sqrt{y_1^2} = \frac{\sqrt{4\sqrt{S^2 x^2} - 3\sqrt{y^4}} - \sqrt{y^2}}{2}$$

$$\sqrt{S^2 x^2} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{y^2}} \quad \text{eingeführt}$$

$$\sqrt{y_1^2} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2-3y^2} - y}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{4x^2+y^2}-y}{2\sqrt{y}}$$

$$y_1^2 = \frac{(\sqrt{4x^2+y^2}-y)^3}{xy}$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{(\sqrt{4x^2+y_2}-y)^3}{\sqrt{8y}}}$$

$$y-y_1 = y - \sqrt{\frac{(\sqrt{4x^2+y^2}-y)^3}{8y}}$$

dies müsste als Maximum behandelt werden, zu welchem Behufe aber die Ersetzung der einen Coordinate durch die andere erforderlich ist. Allein die bisher befolgte Methode sowol als auch das Differentiiren liefert für diesen Fall eine Gleichung so hohen Grades, dass eine Auflösung unmöglich ist. Es muss daher, wie folgt, verfahren werden:

Nach Einführung der Begrenzungscurven-Coordinaten ersetzt man erst auf Grund der Gleichung

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}$$

alle y durch x und setzt hiernach

$$\sqrt{x} = z \cdot \sqrt{S}$$

worin z ein echter Bruch ist. Dann erhalten wir für den Durchmesser die Formel:

$$D = S\sqrt{1-z^2}[z^3 - \sqrt{0{,}5z[\sqrt{4(1-z^2)^3+z^2(3-2z^2)^2}-z(3-2z^2)]}$$

In diese setzt man nun successive für z von 1 ab fallende Werte ein.

$z =$	$D =$
0,95	unter 0,28 18 S
0,90	0,322 4033 S
0,89	0,324 9398 S
0,88	0,325 05 964 S
9,879	0 ,325 705 55 S
. . . .	. . . . . .
2,8785	0,32 569 381 S
0,878	0,325 680 338 S

Das Maximum liegt also kurz vor oder hinter 0,325 70 555 S. Man kann durch Uebergehen auf die nächste Decimalstelle der Einsetzungswerte die Genauigkeit noch weiter treiben, doch wird die Rechnung deshalb so ungeheuer mühevoll, weil alsdann sogar die Mantissen der Logarithmen schon kleine Irrtümer veranlassen, welche das Resultat beeinflussen und man daher gezwungen ist, alle Operationen ohne Hilfe der Logarithmen auszuführen.

Begnügt man sich mit dem Werte $z = 0{,}879$, so hat man

$\sqrt{x} = 0{,}879\sqrt{S}$ und $\sqrt{y} = 0{,}476\,821\sqrt{S}$

$\sqrt{y^2} = 0{,}227\,359\sqrt{S^2}$, $\sqrt{x^2} = 0{,}772\,641\sqrt{S^2}$

$\sqrt{xy^2} = x_1 = 0{,}199\,848\,561\,S$, $\sqrt{x^2y} = y = 0{,}368\,411\,454\,S$

und

$y_1 = 0{,}042\,705\,898\,S$, $y - y_1 = D = 0{,}325\,705\,556\,S$

$\operatorname{tg}\alpha$ des Winkels der Tangente mit der X Achse berechnet sich

$$= \frac{y}{x}\,\frac{2x^2-y^2}{x^2-2y^2} = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}444\,698 \quad \text{und} \quad \alpha = 23^0\ 59' \text{ annähernd.}$$

Es muss also auch

$$\frac{y_1}{x}\,\frac{2x^2-y_1^2}{x^2-2y_1^2} = \operatorname{tg}\alpha$$

sein, was ein Versuch bestätigt.

§ 14.

Wenn man 2 symmetrisch liegende Hypotenusen S construirt, und auf diese die entsprechenden Senkrechten vom Anfangspunkt fällt, so ergibt sich eine weitere Eigentümlichkeit, die ad oculos die **Polargleichung** der Blattcurve demonstrirt, welche auf S bezogen, lautet:

$$Rv = \varrho = \frac{S \sin 2\alpha}{2}$$

Sie ergibt sich durch Einsetzen von

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = \varrho \sin \alpha$$

$$\sqrt{\varrho^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \sqrt{S \cos\alpha \,.\, \sin\alpha \,.\, \varrho^2}$$

$$\varrho = \sqrt{S \,.\, \varrho^2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha}$$

$$\varrho^3 = S \,.\, \varrho^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha, \quad \varrho = \frac{S \,.\, \sin 2\alpha}{2}$$

Es muss in der Figur offenbar Winkel

$$igf = vwi$$

sein; ausserdem, weil $ip \perp vw$, ist

$$vwi = vip$$

also auch

$$vtp = igf$$

Verlängern wir nun ip bis sie gf in s trifft, so muss demnach in dem entstehenden Dreieck isg

$$gs = iz$$

sein, weil die gegenüber liegenden Winkel gleich sind. Daraus folgt aber weiter, dass eine Senkrechte von s auf ig, letztere als Grundlinie halbiren würde und da diese Senkrechte der X Achse parallel „So resultirt, „dass auch die Hypotenuse selbst in s halbirt ist.“ „so ist jede Senkrechte auf eine Hypotenuse zugleich in ihrer Verlängerung Mittellinie für die zu jener symmetrisch liegenden Hypotenuse.“ Dann ist also

$$gs = is = sf$$

und isf ist

$$= 2\alpha = igf + gis$$

Da nun $iu \perp gf$, so ist

$$iu = ip$$

und da

$$is = sf = \frac{S}{2}$$

so haben wir unmittelbar:

$$\sin 2\alpha = \frac{iu}{is} = \frac{\varrho}{S/2}$$

oder

$$\varrho = \frac{S}{2} \sin 2\alpha$$

wie oben entwickelt.

Der Punkt s liegt für alle Hypotenusen immer auf der Peripherie des mit $S/2$ um i beschriebenen Kreises. Wir haben hier also die Begründung für die Lübsen'sche die continuirliche Construction der Blattcurve mittelst deren Polargleichung; eine Begründung die Lübsen naturgemäss nicht liefern konnte, weil ihm die Herkunft der Curve unbekannt war.

Wenn wir nun auch die Polargleichung der Begrenzungscurve aufstellen wollen, so haben wir ebenso

$$x = \varrho \,.\, \cos\alpha, \quad y = \varrho \,.\, \sin\alpha$$

und

$$\sqrt[3]{\varrho^2}\,(\sqrt[3]{\cos^2\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha}) = \sqrt[3]{S^2}, \text{ mit 3 potenzirt:}$$

$$\varrho^2[\overbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}^{1} + 3\sqrt[3]{\cos^2\alpha \,.\, \sin^2\alpha}\,(\sqrt[3]{\cos^2\alpha} + 3\sqrt[3]{\sin^2\alpha})] = S^2$$

da nun

$$\sqrt[3]{\cos^2\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha} = \sqrt[3]{\frac{S^2}{\varrho^2}}$$

und wir diesen Wert einführen können. so ist die Gleichung:

$$\varrho^2 + 3\sqrt[3]{S^2\varrho^4\cos^2\alpha \,.\, \sin^2\alpha} = S^2$$

$$\cos\alpha \,.\, \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

also:

$$\varrho^2 + 3\sqrt[3]{S^2\varrho^4\frac{\sin^2 2\alpha}{4}} = S^2$$

Aus dieser und der obigen Gleichung lässt sich nunmehr eine dritte ableiten, welche die Beziehung zwischen den Radiivectoren beider Curven mit demselben Neigungswinkel ausdrückt. Nennen wir den Rv der Begrenzungscurve R, den der Blattcurve r, so ist offenbar:

$$R^2 + 3\sqrt{R^4r^2} = S^2$$

woraus sich bei einem gegebenen Rv der andre finden lässt. Am leichtesten ist dies, wenn beide Radiivectoren ein festes geometrisches Verhältniss haben. Z B. es sei

$$R = 2r$$

d. h. der Rv an die Begrenzungscurve wird von der Blattcurve halbirt. Dann ist:

$$R^2+3\sqrt{\frac{R^6}{4}} = S^2 = R^2\left(1+\frac{3}{\sqrt{4}}\right) = S^2, \quad R^2 = \frac{S^2\sqrt{4}}{\sqrt{4}+3}$$

$$x^2+y^2 = \frac{S^2\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^{23}}-3\sqrt{S^2x^2y^2} = S^2-3\sqrt{S^2x^2y^2}$$

$$\frac{S^2\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} \quad \text{div durch } \sqrt{S^2}$$

$$\sqrt{S^4} - 3\sqrt{x^2y^2} = \frac{\sqrt{4S^4}}{\sqrt{3+4}}$$

$$3\sqrt{x^2y^2} = \frac{\sqrt{4S^4}+3\sqrt{S^4}-\sqrt{4S^4}}{\sqrt{4+3}} = \frac{4\sqrt{S^4}}{\sqrt{4+3}}$$

$$\sqrt{x^2{}^2y} = \frac{\sqrt{S^4}}{\sqrt{4+3}}$$

$$x^2y^2 = \frac{S^4}{(\sqrt{4+3})^6}, \quad xg = \sqrt{\frac{S^2}{\sqrt{4+3})^3}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= \frac{S^2\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} \\ 2xy &= (\sqrt{\frac{2S^2}{\sqrt{4+3})^3}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x+y)^2 &= S^2\left[\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}}+(\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4+3})^3}}\right] \\ (x-g)^2 &= S^2\left[\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}}-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4+3})^3}}\right] \end{aligned}$$

$$x+y = S\sqrt{\frac{4}{\sqrt{4+3}}+(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+3})^3}}}$$

$$x-y = S\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}}-(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4+3})^3}}}$$

ändere diese Werte ab, indem ich Zähler und Nenner mit $\sqrt{2}$ multiplicire:

$$x+y=\sqrt{\frac{2}{2+3\sqrt{2}}+\frac{2}{2+3\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{2+3\sqrt{2}}}}$$

oder setzen wir

$$\left.\begin{array}{l} x+y=S\sqrt{k+k\sqrt{k}} \\ x+y=S\sqrt{k-h\sqrt{k}} \end{array}\right\} \quad x=\frac{S}{2}\left[\sqrt{k-k\sqrt{2}}+\overline{k-k\sqrt{k}}\right]$$

$$y=\frac{T}{2}\left[\sqrt{h+k\sqrt{k}}-\sqrt{k-k\,.\,k}\right]$$

$$\frac{2+3\sqrt{2}}{2}=1$$

$$\frac{x}{y}=\frac{S}{\sqrt{2+3\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\sqrt{4}-3\pm\sqrt{3}}{\sqrt{4+3}}}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{k+k\sqrt{k}}}{\sqrt{k+k\sqrt{k}}}=\frac{k+k\sqrt{k}+k-k-2\sqrt{k^4-k^3}}{k+k\sqrt{}-k+\sqrt{k}}=\frac{k-\sqrt{k^2-k^3}}{k\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}-1}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{4+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{4+3}}{\sqrt{4}}}-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}=\sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{4}}}$$

$$-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}}$$

Ebenso für $R=3r$. Es ist

$$R^2+3\sqrt{\frac{R^2}{9}}=S^2=R^2(1+\sqrt{3})\quad\text{und}\quad R^2=\frac{S^2}{1+\sqrt{3}}$$

$$x^2+y^2=\frac{S^2}{1+\sqrt{3}}=S^2-3\sqrt{S^2x^2y^2},\quad 3\sqrt{S^2x^2y^2}=\frac{S^2+\sqrt{3}\,.\,S^2-T^2}{1+\sqrt{3}}$$

durch $\sqrt{S^2}$

$$\sqrt{x^2y^2}=\frac{\sqrt{S^4}}{\sqrt{9(1+\sqrt{3})}},\quad \sqrt{xh}=\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{3}\sqrt{(1+\sqrt{3})}}$$

$$xy=\frac{S^2}{3(\sqrt{1+3\sqrt{3}})^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1+\sqrt{3}}{S^2} \\ 2xy &= \frac{2S^4}{3(\sqrt{1+\sqrt{3}})^3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{1+\sqrt{3}}\left(1+\frac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{1+\sqrt{3}}\left(1+\frac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}$$

$$x-y = \frac{S^2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}$$

$$x = \frac{S}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}}\left(\sqrt{2\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}+\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}\right)$$

$$y = \frac{S}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}}\left(\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}-\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}\right)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}-\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}}{\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}+\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2+3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2-2\sqrt{9+9\sqrt{3}-4}}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2-3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}$$

$$= \frac{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-\sqrt{5+9\sqrt{3}}}{2} = \operatorname{tg}$$

§ 15

Wir fanden § 10, dass im Culminationspunkte der Blattcurve die zugehörige Hypotenuse S in 1/3 ihrer Länge geteilt wird, und es war der entsprechende Rv der Begrenzungscurve $= \frac{T}{\sqrt{3}}$. Sucht man nun den Fall, wo S in 1/3 der Länge geteilt wird, so haben wir unmittelbar:

$$Rv = \sqrt{ab} = \sqrt{x^2+q^2} = \frac{S\sqrt{3}}{4}$$

und da das zwischen den beziehlichen Punkten von S liegende Stück $= S/2$, so ist der Rv der Begrenzungscurve

$$= \sqrt{\frac{S^2 \cdot 3}{16}+\frac{S^2}{4}} = \frac{S}{4}\sqrt{7}$$

Der *Rv* an diesen Punkt der Blattcurve ist also gleich 3/4 der obigen *Rv* an die Begrenzungscurve für den Culminationsfall. Ferner ist:

$$\sqrt{Sxy} = \frac{S\sqrt{3}}{4}, \quad Sxy = \frac{S^3 \cdot 3\sqrt{3}}{64}, \quad xy = \frac{S^2 \cdot 3\sqrt{3}}{64}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{S^2 \cdot 3}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2 \cdot 3\sqrt{3}}{32} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{32}(6+3\sqrt{3} \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{32}(6-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{3(2+\sqrt{3})}{2}}$$

$$y-x = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{S\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}[\sqrt{2+\sqrt{3}} \mp \sqrt{2-\sqrt{3}}] \quad \text{und}$$

$$x^2+y^2 = S^2 - 3\sqrt{S^3 x^2 y^2} = S^2 - \frac{3S^2 \cdot 3}{16} = \frac{S^2 \cdot 7}{16}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{7 \cdot S^2}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2\sqrt{3}\sqrt{3}}{32} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{32}(14+3\sqrt{3}) \\ (x-y) &= \frac{S^2}{32}(14-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{4\sqrt{2}}\sqrt{14+3\sqrt{3}}$$

$$x-y = \frac{S}{4\sqrt{2}}\sqrt{14-3\sqrt{3}}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{S}{3\sqrt{2}}[\sqrt{14+3\sqrt{3}} \pm \sqrt{14-3\sqrt{3}}]$$

Diese Ausdrücke lassen sich vereinfachen, indem man quadrirt; so ist z. B.:

$$x^2 = \frac{S^2}{128}[14+3\sqrt{3}+14-3\sqrt{3}+1\sqrt{\underbrace{14^2-27}_{169}}]$$

$$= \frac{S^2}{128}[28+26] = \frac{S^2 \cdot 27}{64} \quad \text{also} \quad x = \frac{S \cdot 3\sqrt{3}}{8}$$

$$y^2 = \frac{S^2}{128}[14+3\sqrt{3}+14-3\sqrt{3}-2 . 13]\frac{S^2 . 2}{128} = \frac{S^2}{64},\ \frac{S}{8} = y$$

Entsprechend

$$x^2 = \frac{S^2 . 3}{128}[2+\sqrt{3}+2 \mid \sqrt{32}\,\underbrace{\sqrt{4-3}}] = \frac{S^2 . 3 . 2}{128} = \frac{S^4 . 3}{64}$$

$$x = \frac{S}{8}\sqrt{3} = \frac{x}{3}$$

$$y^2 = \frac{S^2 . 3}{128}[2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\underbrace{\sqrt{4-3}}_{1}] = \frac{S^2 . 3 . 6}{128} = \frac{S^2 . 9}{64}$$

$$y = \frac{S . 3}{8} = 3y$$

Demnach

$$n = x+x^2 = \frac{S\sqrt{3}+S3\sqrt{3}}{8} = \frac{S\sqrt{3}}{9} = 2 \text{ Rvbl.}$$

$m = y+y = \frac{S}{2}$, $\frac{m}{S} =$ sin des Neigungswinkels $= \frac{1}{2}$, mithin ist dieser „Neigungswinkel $= 30^0$ und wir finden den Satz, dass die Hypotenuse S unter 30^0 von der Begrenzungs- und Blattcurve in 1/4 der Länge geteilt wird.“

In diesem Falle hat der Rp der Blattcurve natürlich eine Neigung von 60^0 und der ihm symmetrische eine solche von 30^0; beide Radiivectoren der Blattcurve teilen somit den rechten in 3 gleiche Teile.

Die Blattcurve hat noch einen besonders charakteristischen Punkt, den wir nunmehr aufsuchen wollen. Es entsteht durch 2 symmetrische Radiivectoren und den zugehörigen Durchmesser allemal ein in die Curve eingeschriebenes gleichschenkliges Dreieck. Wenn man von allen diesen Dreiecken, die mit dem Inhalt 0 beginnen und auf der Symmetrie-Achse wieder mit 0 endigen das Maximal-Dreieck sucht, so ergeben sich eigentümliche Beziehungen. Die allgemeine Formel für den Inhalt dieses Dreiecks ist

$$J = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

wovon wir jetzt das Maximum suchen wollen. Der Nenner 2 kann wegbleiben, und dann führen wir wieder die Coordinaten der Begrenzungscurve ein.

$$2J = \sqrt{x^2y^4} - \sqrt{x^4y^2} > (\sqrt{x^2} \pm z)(\sqrt{y^4} \mp 2z\sqrt{y^2}]$$
$$- (\sqrt{x^4} \pm 2z\sqrt{x^2})(\sqrt{y^2} \mp z)$$

$$\sqrt{x^2y^2} - \sqrt{x^2y^6} > \sqrt{x^2y^4} \pm z\sqrt{y^4} \mp 2z\sqrt{x^2y^2} - \sqrt{x^4y^2} \mp 2z\sqrt{x^2y^2} \pm z\sqrt{x^4}$$

$$4z\sqrt{x^2y^2} > z(\sqrt{x^4} + \sqrt{y^4})$$

div. durch z und 0 gesetzt:

$$4\sqrt{x^8y^2} = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4}$$

$$6\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = (\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = \sqrt{S^4} = 6\sqrt{x^2y^2}$$

$$6^3x^2y^2 = S^4, \quad xy = \frac{S^2}{6\sqrt{6}}, \quad S^2 = 6\sqrt{S^2x^2y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{S^2}{3\sqrt{6}} &= 2xy \\ \frac{S^2}{6} &= x^2+y^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{6}+2) = \frac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{6}-2) = \frac{S^2}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$x+y = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}}$$

$$x-y = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}}$$

$$x = \frac{S}{2}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{3\sqrt{\sqrt{3}}}\right. \quad \text{vereinfacht } x = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}}$$

$$y = \frac{S}{2}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{6}\sqrt{3}}\right] \quad \text{vereinfacht } y = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{8}-1}{3\sqrt{3}}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$Rv = S/2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 1^1/_2$ kleinsten Durchm.

Demnach ist J des eingeschlossenen Dreiecks

$$\frac{x^2-y^2}{2} = \frac{S^2}{12\sqrt{6}} \text{ als Maximum}$$

Die Tangente des eingeschlossenen Winkels im Anfangspunkt ist

$$= \frac{x^2-y^2}{2xy} = \frac{S^2 \cdot 6\sqrt{6}}{12\sqrt{3}S^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

d. h. die Hypotenuse S, welche auf einem Rv senkrecht steht, wird von der Verlängerung des anderen so geschnitten, dass das Stück zwischen beiden sich zum Rv verhält, wie die Seite des Quadrats zur Diagonale. Es sind in diesem Falle die Coordinaten des zugehörigen Punktes der Begrenzungscurve:

$$x = S\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)^3}, \quad y = S\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)^3} \quad \text{und} \quad Rv = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Der hier gefundene Punkt der Blattcurve für das Maximal-Dreieck, was sich in dieselbe einschreiben lässt, hat nun auch die weitere Eigenschaft, dass die in den symmetrisch liegenden „Punkten an die Curve gezogenen Tangenten den Radiivectoren beziehlich parallel sind", d. h. dass Radiivectoren und Tangenten zusammen einen Rhombus bilden. Dies können wir auf Grund des § 12 gefundenen Umstandes nachweissen, dass das Product der Tangenten der Winkel zwischen 2 symmetrischen Radienvectoren und der Tangente an die Curve mit dem Rv constant $= 1/2$ ist.

Ist in nebenstehender Figur

$$\text{tg}\, S \,.\, \text{tg}\, E = 1/2$$

so folgt, da wir $\text{tg} E$ für diesen Fall $= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ermittelt hatten, dass auch

$$\text{tg} S = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

sein muss, d. h.

$$\text{Wkl.}\, E = \text{Wkl,}\, S$$

und somit Tangente

$$sp = Rv\, or$$

Dasselbe gilt natürlich für die symmetrisch liegende Tangente und Rv; daher sich beide Tangenten auf der Symmetrie-Achse schneiden müssen. Der Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkt ist

$$= \sqrt{2(x+y)} = \sqrt{2} \,.\, S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$$

Die kleine Diagonale dieses Rhombus ist

$$= (v-y)\sqrt{2}, \quad \text{also} \quad = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$$

Wenn

$$\text{tg} E = 1/2 \quad \text{so muss} \quad \text{tg}\, \delta = 1, \quad \text{also} \quad \delta = 45^0$$

sein. Dann ist aber auch der Winkel zwischen S und dem zugehörigen Rv der Begrenzungscurve $= 45^0$, mithin ferner auch der zwischen beiden zusammengehörigen Radiivectoren beider Curven.

Dann aber ist die „Tangente an die Blattcurve dem Rv an die Begrenzungscurve parallel," die symmetrischen Lagen desgl., und somit bilden beide Tangenten und beide Radiivectoren wiederum einen Rhombus, dessen Inhalt sich wie folgt, berehnen lässt: Es ist

$$\frac{a-b}{\sqrt{ab}} = 1, \quad \sqrt{ab} = a-b, \quad \sqrt{\sqrt{S^2x^2y^2}} = \sqrt{S}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}, \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{xy} = \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\sqrt{y^2\tfrac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{y}(1+\sqrt{5})}{2}. \quad \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} x = \frac{8}{(1+\sqrt{3})^3} = \frac{1}{\sqrt{5+2}} = \sqrt{5}-2$$

Der symmetrische Rv hat also die umgekehrte Tangente und die Gleichung

$$y = x(\sqrt{5}+2)$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{6}+1}, \quad \frac{x(\sqrt{5}+1)}{2} = a \quad \text{also}$$

$$x + \frac{x^2(\sqrt{5}+1)^2}{4} = \sqrt{S^2x^3\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} = \frac{x^2}{4}(5+2\sqrt{5}+1+4)$$

$$= \frac{x^2}{4}(10+2\sqrt{5}) = x^2\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{6}$$

$$x^6 - \frac{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)^3}{8} = \frac{S^2x^4(\sqrt{5}+1)^2}{4}$$

$$x^2\frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{S^2}{\sqrt{(5+1)}}$$

$$x = S\sqrt{\frac{2}{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}$$

$$y = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2^2}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}}$$

Die Tangente muss also durch diesen Punkt gehen und die Winkel-Tangente

$$\frac{y}{x} = \sqrt{5}-2$$

haben. Ihre Gleichung lauter daher:

$$y = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} = (\sqrt{5}-2)\left(x - S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}}}\right)$$

Wo sich Tangente und Ry treffen, muss also

$$y = x(\sqrt{5}+2)$$

sein. Dies führen wir ein, um die Coordinaten des Punktes zu erhalten:

$$\overset{x}{y}(\sqrt{5}+2) = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} = (\sqrt{5}-2)\left(x - S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}\right)$$

$$x\sqrt{5}+2x = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} + x\sqrt{5}-2x - S(\sqrt{5}-2)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}$$

$$4x = S\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} - (\sqrt{5}-2)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}\right)$$

letzterer Ausdruck lässt sich vereinfachen als:

$$\frac{S}{\sqrt{10\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{(5+1)}+\underbrace{(\sqrt{}-2)^2}_{\underbrace{5+4}_{9}-4\sqrt{5}}(\sqrt{}-1)-2(\sqrt{}-2)\underbrace{\sqrt{5}-1}_{4}}$$

$$= \frac{S}{\sqrt{10\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{5}+1+9\sqrt{5}-20-9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}+8}$$

$$= 4x = S\sqrt{\frac{10\sqrt{5}-20}{10\sqrt{5}}} = S\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}$$

$$x = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}, \quad y = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}+2)^2}$$

$$y = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} \quad \text{tg des eingeschl. Winkels} = 2.$$

Dies sind die Coordinaten des Schnittpunktes zwischen Tangente und Radiusvector.

Der Inhalt des Dreiecks zwischen 2 symmetrisch liegenden Linien ist nun

$$= \frac{x^2 - y^2}{2}$$

also der des Rhombus das Doppelte

$$= x^2 - y^2$$

bzhw. weil hier $y > x$ muss es lauten $y^2 - x^2$. Mithin

$$J = \frac{S^2}{16}\left(\frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{oder} \quad J = \frac{S^2}{4\sqrt{5}}$$

Der erste Fall des Maximal-Dreiecks in der Blattcurve ist leicht zu construiren, weil die Tangente des eingeschlossenen Winkels am Scheitel

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist und jeder Rv Mittellinie zur Hypotenuse S des andern Rv ist. Dann ist in Figur 18

$$\frac{pq}{op} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also das Verhältniss von Seite und Diagonale im Quadrat. Dasselbe besteht für $rv : vr$. Mithin verfährt man wie folgt: Lege S horizontal hin $= cd$, schlag einen Halbkreis darüber, errichte in der Mitte von S die Senkrechte fg, ziehe die Sehne cf und trag diese auf der Seite ce nach oben ab

$$ce = cf = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Verbinde nun e mit g, wo diese Linie den Kreis trifft, in h, verbinde ich mit c und d, so entspricht hc die Kathete m, hd der Kathete n und die Senkrechte auf cd, hi ist einer, hg der andre der gesuchten Radiivectoren.

Im zweiten Falle hatten wir

$$E = {}^1/_2$$

die Construction ist der Obigen ganz analog, da es nicht schwer hält, den betr. Winkel von der Mitte von S aus anzulegen.

§ 16.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch einer besonderen Beziehung der Begrenzungscurve zur Ellipse Erwähnung tun. Der Rv der Begr.-Curve ist

$$= \sqrt{x^2+y^2}$$

derjenige der Blattcurve für zusammengehörige Punkte

$$= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Sxu} = \sqrt{Sxy}$$

also Summe der Quadrate der Radiivectoren

$$= x^2+y^2+\sqrt{S^2x^2n^2} = (\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}-\sqrt{x^2y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})+\sqrt{S^2x^2y^2}$$
$$= \sqrt{S^2}(\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4})$$
$$\sqrt{S^2x^4} = a; \quad \sqrt{S^2y^4} = b$$

also „Summe der Radiivectoren-Quadrate"

$$= a^2 + b^2$$

also gleich der Summe der Quadrate der Ellipsen-Achsen. Das ist nun eine Eigenschaft der sog. conjugirten Durchmesser, und da unser Ro an die Begrenzungscurve ein Durchmesser ist, so muss der Rv an die Blattcurve gleich dem conjugirten Durchmesser sein. Ferner ist aber jener conjugirte Durchmesser parallel zur Tangente im Endpunkt des andern; somit muss der conjugirte Durchmesser zum Ro der Begrenzungscurve parallel laufen zur Hypotenuse S und die Länge des Ro zur Blattcurve haben. Darum ist

$$\text{Wkl. } foh = rso$$

und wenn br Mittellinie an S ist, so muss, wenn wir auf diesen

$$oe = op$$

machen, e ebenfalls ein Punkt der Ellipse sein, der dem Endpunkt des conjugirten Durchmessers symmetrisch liegt. Der eingeschlossene Winkel zwischen den conjugirten Durchmessern $fo(xy)$ ist nun

$$= po(xy) + 1R$$

also

$$\sin fo(xy) = \cos po(xy) = \frac{po}{o(xy)}\,\frac{\sqrt{{}^2x+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Folglich ist das Product der beiden Rven mit dem sin des eingeschl. Winkels

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2 = ab$$

gleichung den Schlüssel enthält zur mathematisch genauen Bestimmung ihres Inhalts. Figur 20 gibt darüber Aufschluss, indem wir nachfolgende Betrachtung anstellen.

Der Radius des Kreises sei $S/2$. Links von der Y-Achse ist die Blattcurve eingezeichnet. Den Viertelkreisbogen, in dem diese liegt, teilen wir in eine unendliche Zahl unendlich kleiner gleicher Teile ein. Gleichzeitig teilen wir den Halbkreis rechts der Y-Achse in die gleiche Anzahl gleicher Teile.

Diese Zahl soll als eine gerade gelten und es werden also die Bogenteile des Halbkreises doppelt so gross sein, wie die des $^1/_4$ Kreises. Wir ziehen nun von den Teilpunkten die mit der Y-Achse parallelen Sehnen 1—1, 2—2, 3—3 etc.; wo diese die X-Achse schneiden, verbinden wir die Treffpunkte a, b, c, d, e, f, g, h mit den Teilpunkten 8, 7, 6, 5, 4 etc. und ziehen zugleich die zur Y-Achse parallelen Halbsehnen aa, bb, cc etc. Nun sind sämtliche Centriwinkel des rechten Quadranten bei o doppelt so gross, wie die Centriwinkel des linken Quadranten, weil Bogen h1 doppelt so lang wie Bogen I II und so fort. Deshalb ist der Ro der Blattcurve o—1 gleich der Halbsehne 1—1, $Rv\,o-2 = \frac{2-2}{2}$, $Rv\,o-3 = \frac{3-3}{2}$ u. s. fort.

Die Peripheriewinkel bei 8, 7, 6 . . . sind aber gleich den Centriwinkeln des linken Quadranten, weil auf den doppelten Bogen stehend. Ferner ist Wkl. a_1a-7 = Wkl. 8, Wkl. b_1b-6 = Wkl. 7 etc., da ihre Schenkel parallel sind. Da die Winkel 8, 7, 6, 5 . . . auf gleichen Bogen stehend, alle gleich sind, müssen es auch die Winkel a_1a-7, b_1b-6, c_1c-5 . . . sein. Die Winkel 8 8a, 7 7a, 6 6c, 5 5d sind naturgemäss gleich den Winkeln bei 8, 7, 6 . . . und auch wiederum gleich den Winkeln 8aa, 7bb, 6cc, woraus resultirt, dass die Winkel 8a7 — 7b6 . . . durch die Linien aa_1 — bb_1 . . . halbirt werden. So sind denn auch die Winkel IvII — IoIII . . . gleich den Winkeln a_1a7 — b_1b6 . . . etc.

Wenn nun die Teilung eine unendlich kleine ist, so wird der Unterschied zwischen den Linien a7 und 7i, sowie b6 und 6k verschwinden, ebenso kann aa_1 gleich ik und bb_1 gleich k6 angesehen werden; dasselbe gilt aber für die aufeinander folgenden Dreiecke 8o7, 7o6, 6o5 in der Blattcurve, welche allemal als unendlich schmale gleichschenklige Dreiecke betrachtet werden können, deren Inhalt sich durch das Quadrat einer Seite mal dem halben eines des eingeschlossenen Winkels ausdrücken lässt. So ist J des Dreiecks

$$8o7 = \frac{7o^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

Der J des Dreiecks $a_1 a 7$ ist gleich $\frac{a7^2 \cdot \sin\alpha}{2}$, oder da $a7 = i7$ wird

$$J = \frac{i7^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

Nun ist $i7$ nach der Lübsen'schen Construction $= Rv\,7o$, mithin J von Dreieck $7o8 = J$ von Dreieck $a_1 a 7$; ebenso Dreieck $7o6 =$ Dreieck $b_1 b 6$ und so fort, Dreieck $a_1 a 7$ ist jedoch bei unendlich kleiner Teilung $= 1/4$ des Kreisstückes $8oi7$, Dreieck $b_1 b 6 - 1/4$ von $7ik6$ und so weiter. Somit ist die Summe aller Dreiecke $a_1 a7 - b_1 b6 - c_1 c5 - d_1 d4$ gleich $1/4$ des Viertelkreises $8bh$ und somit auch der Inhalt der halben Blattcurve. Dann ist der Inhalt der ganzen Blattcurve gleich der Hälfte des Viertelkreises oder

$$J = \frac{\pi S^2}{32}$$

Auf Grund dieses Resultats ist nun auch die Ermittlung des Inhalts der Begrenzungscurve möglich und zwar in folgender Weise. Denken wir uns zwei unendlich nahe aufeinander folgende Lagen zweier Hypotenusen S, z. B. de und gf. Dann kann der Schnittpunkt beider als Punkt der Begrenzungscurve angesehen werden. Der ganze Inhalt der Begrenzungscurve setzt sich nun aus unendlich vielen Successionen von Dreiecken zusammen, welche, wie gpd und fpe durch 2 unendlich nahe Tangenten und die Achsen gebildet werden. Die Summe dieser Dreiecke ergibt also den Inhalt des von den Achsen und der Begrenzungscurve eingeschlossenen Raumes; jedoch ist zu beachten, dass jedes Dreieckspaar eine symmetrische Lage über und eine unter der Symmetrie-Achse hat, der ganze Raum also von den Dreiecken 2 mal ausgefüllt wird und mithin die Hälfte von deren Summe zu nehmen ist.

Richten wir nun die Succession der Tangenten so ein, dass der eingeschlossene Winkel bei p immer derselbe bleibt, und fallen die Senkrechten von o auf die Tangenten — oi und oh — so ist der zwischen letzteren eingeschlossene Winkel ioh ebenfalls

$$= \text{Wkl. } gpd = \text{Wkl. } epf$$

und da diese Senkrechten Radiivectoren der Blattcurve sind, so schliesst die Succession der aufeinander folgenden Radiivectoren der Blattcurve immer den gleichen Winkel ein, wie die Tangenten, den

wir α nenen wollen. Für 2 unendlich nahe Tangenten kann der Längenunterschied zwischen gp und dp, sowie pe und pf als verschwindend betrachtet werden, desgleichen auch für die Radiivectoren vt und vh. Demnach lässt sich der eines Dreieckspaares ausdrücken mit: $\frac{\sin\alpha}{2}(gp^2+pf^2)$t doch können wir nach früherer Gepflogenheit auch setzen

$$gp = a_1 \text{ und } pf = b_1$$

also Dreiecke

$$= \frac{\sin\alpha}{2}(a_1^2+b_1^2)$$

und die Summe aller Dreieckspaare $= 2J$ der Begrenzungscurve

$$= \frac{\sin\alpha}{2}[a_{\prime}^2+b_{\prime}^2+a_{\prime\prime}^2+b_{\prime\prime}^2+a_{\prime\prime\prime}^2+b_{\prime\prime\prime}^2 \ldots a_n^2+h_n^2] \text{ oder}$$

$$J = \frac{\sin\alpha}{4}[(a_{\prime}^2+b_{\prime}^2)+(a_{\prime\prime}^2+b_{\prime\prime}^2)+(a_{\prime\prime\prime}^2+b_{\prime\prime\prime}^2) \ldots (a_n^2+b_n^2)]$$

Dies lässt sich umwandeln in

$$J = \frac{\sin\alpha}{4}[(a_{\prime}+b_{\prime})^2-2a_{\prime}b_{\prime}+(a_{\prime\prime}+b_{\prime\prime})^2-2a_{\prime\prime}b_{\prime\prime}+(a_{\prime\prime\prime}+b_{\prime\prime\prime})^2-2a_{\prime\prime\prime}b_{\prime\prime\prime}\ldots$$
$$+(oa+b_n)^2-2a_nb_n]$$

Sämtliche Summen $(a_{\prime}+b_{\prime})=(a_{\prime\prime}+b_{\prime\prime}) \ldots$ etc. sind aber $= S$, mithin

$$J = \frac{S^2n \cdot \sin\alpha}{4} - \frac{\sin\alpha}{2}[a_{\prime}b_{\prime}+a_{\prime\prime}b_{\prime\prime}+a_{\prime\prime\prime}b_{\prime\prime\prime} \ldots +a_nb_n]$$

Nun ist $\sqrt{a_{\prime}b_{\prime}}$ gleich einem Rv der Blattcurve, mithin, wenn wir 2 mit dem Wkl. α aufeinander folgende Rven haben, deren Längendifferenz verschwindend ist, so ist der Inhalt zwischen beiden Rven liegenden Dreiecks

$$= a_{\prime}b_{\prime}\frac{\sin\alpha}{2}$$

und so fort. Dann aber ist der Wert des gesamten Ausdrucks:

$$\frac{\sin\alpha}{2}[a_{\prime}b_{\prime}+a_{\prime\prime}b_{\prime\prime}+a_{\prime\prime\prime}b_{\prime\prime\prime} \ldots + a_nb_n]$$

gleich dem Inhalt der Blattcurve, also

$$= \frac{\pi S^2}{32}$$

Demnach haben wir jetzt:

$$J = \frac{S^2 \,.\, n \,.\, \sin\alpha}{4} - \frac{\pi S^2}{32}$$

Da nun α ein unendlich kleiner Winkel und n eine unendlich grosse Zahl, so haben wir nach Obigem

$$n \,. \quad = 90^0$$

Für einen unendlich kleinen Winkel ist der sinus = dem Bogen, also

$$n \,.\, \sin\alpha = n \,.\, \text{arcus}\,\alpha \quad \text{und} \quad n \,.\, \text{arcus}\,\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Somit erhalten wir:

$$J = \frac{S^2\pi}{8} - \frac{S^2\pi}{32} = \frac{\pi S^2 \,.\, 3}{32}$$

d. h „die Begrenzungscurve hat den dreifachen Inhalt der Blattcurve" und erstere wird durch den mit $S/2$ um den Anfangspunkt geschlagenen Kreis, die Symmetrie-Achse und die Blattcurve in 6 gleiche Teile geteilt.

§ 18.

Die Bestimmung der Länge der Begrenzungscurve verdanke ich gewissermassen einem Zufall, insofern ich, bei aller aufgewandten Mühe, doch nicht vermuten konnte, dass auf dem eingeschlagenen Wege gerade diese Frage eine so überraschende Lösung finden würde. Dieser Weg war der, dass ich den allgemeinen Ausdruck aufsuchte für den zur Begrenzungscurve gehörigen Krümmungsradius. Ich schlug dabei folgendes Verfahren ein. Nämlich aus der Tangentengleichung bildete ich die der Normale und suchte dann durch Variiren der Coordinatenwerte um eine unendlich kleine Grösse, welche ich am Schluss zu null werden liess, den Schnittpunkt dieser beiden unendlich nahe liegenden Normalen zu bestimmen. Die Behandlung war durchaus dieselbe, wie die der oben gebrauchten Ungleichungen, nur haben wir in diesem Falle eine Gleichung vor uns. Die Tangentengleichung war:

$$y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\,(x - x_1)$$

also Normalen-Gleichung:

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,(x \mid x_1)$$

$$y = y_1 + \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\,(x - x_1)$$

Variiren wir $\sqrt[3]{x_1}$ als $\sqrt[3]{x_1} \pm z$, so ist für x_1 zu setzen

$$x_1 \pm 3z\sqrt[3]{x_1^2}$$

die entsprechende Variation für $\sqrt[3]{y_1}$ ergibt sich:

$$\sqrt[3]{x_1^2} \pm 2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{S^2}$$

also für $\sqrt[3]{y_1}$ tritt ein $\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}$

Nun lautet die Gleichung:

$$y = y_1 + \sqrt{\frac{x_1}{y_1}}(x - x_1) = \frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)}{\sqrt[3]{y_1}}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1} \pm z((x - x_1 \mp 3z\sqrt[3]{x_1^2})}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2\sqrt[3]{x^1}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)}{\sqrt[3]{y_1}} = \frac{\sqrt[3]{y_1^4} \mp 4z\sqrt[3]{x_1^2 y_1^2} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1) \mp zx \mp zx_1 \pm 3zx}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1) \overbrace{\mp 4z\sqrt[3]{x_1}\,y^2{}_1 \mp 4zx_1}^{\mp 4z\sqrt[3]{x_1}(\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{x_1^2}} \pm zx}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{a_1}(x - x_1) \mp z(4\sqrt[3]{S_2}x_1 - y)}{\sqrt{\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1}}}$$

ich quadrire jetzt und beseitige die Nenner.

$$(\sqrt[3]{y_1^2} \mp 2z\sqrt[3]{x_1})\,[\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x_1 - x_1)]^2$$

$$= \sqrt[3]{y_1^2}\,[\{\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)\}^2 \mp 2z(4\sqrt[3]{S^2 x_1} - x)(\sqrt[3]{y_1^4} + \sqrt[3]{x_1}(x - x_1)]$$

$$\sqrt[3]{y_1^2}[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)]^2 \mp 2z\sqrt[3]{x_1}[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)]^2$$

$$=\sqrt[3]{y_1^2}[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)]^2 \mp 2z\sqrt[3]{y_1^2}(4\sqrt[3]{S^2x_1}-x)$$
$$(\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-y_1))$$

dividire durch $2z[\sqrt[3]{y_3^4}+\sqrt[3]{x_1(x-x_1)}]$

$$\sqrt[3]{x_1}[\sqrt[3]{y_1^4}+\sqrt[3]{x_1}(x-x_1)] = \sqrt[3]{y_1^2}(4\sqrt[3]{S^2x_1}-x)$$

$$\sqrt[3]{x_1y_1^4}+x\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{x_1^5} = 4\sqrt[3]{S^2x_1y_1^2}-x\sqrt[3]{y_1^2}$$

$$x\underbrace{(\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{y_1^2})}_{\sqrt[3]{S^2}} = 4\sqrt[3]{S^2x_1y_1^2}+\sqrt[3]{x_1}\underbrace{(\sqrt[3]{x_1^4}-\sqrt[3]{y_1^4})}_{(\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{y_1^2})\sqrt[3]{S^2}}$$

$$x = 4\sqrt[3]{x_1y_1^2}+\sqrt[3]{x_1}(\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{y_1^2}) = 4\sqrt[3]{x_1y_1^3}+y_1-\sqrt[3]{x_1y_1^2}$$
$$=3\sqrt[3]{x_1y_1^2}+x_1$$

$$y = 3x_1+x_1 = n+2x_1, \quad x-x_1 = 3x_1 = \sqrt[3]{x_1y_1^2}$$

$$y-y_1 = \sqrt[3]{\frac{x_1}{y_1}}\,.\,3\sqrt[3]{x_1y_1^2} - 3\sqrt[3]{x_1^2y_1} = 3y_1$$

Somit ist der Krümmungsradius

$$kR = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{9x_1^2+9y_1^2}$$
$$= kR = 3\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

d. h. also: „der Krümmungsradius ist gleich dem dreifachen Rv an den zugehörigen Punkt der Blattcurve“, wonach die discontinuirliche Construction der Krümmungscurve sehr leicht ist. Suchen wir nun auch deren Gleichung. Ebenso:

$$y-y_1 = 3\sqrt[3]{x_1y_1^2}$$

also

$$y = y_1+3\sqrt[3]{x_1^2y_1}$$

und ebenso

$$x = x_1+3\sqrt[3]{x_1y_1^2}$$

$$x+y = x_1^3\sqrt[3]{x_1^3y_1}+3\sqrt[3]{y_1y_1^2}+y_1 = (\sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_1})^3$$

demnach

$$\sqrt[3]{y+y} = \sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_1}$$

oder

$$\sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{y_1^2} + 2\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{y_1^2} = \sqrt{S^2} + 2\sqrt{y_1 y_1}$$

oder

$$2\sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{(x+y)^2}\sqrt{S^4}$$

Ferner ist

$$y = y_1 + 3\sqrt{x_1^2 y_1} = \sqrt{y_1}(\sqrt{y_1^3} + 3\sqrt{x_1^2})$$

$$= \sqrt{y_1}(\sqrt{S^2} + 2\sqrt{x_1^2})$$

$$x = x_1 + 3\sqrt{x_1^3 y^2} = \sqrt{x_1}(\sqrt{y_1^2} + 3\sqrt{y_1^2})$$

$$= \sqrt{y_1}(\sqrt{S^2} + 2\sqrt{y_1^2})$$

also

$$y^2 = \sqrt{S_9 y_1^2} + 4\sqrt{S^2 x_1 y^2{}_1^2} + 4\sqrt{x^4 y_1^2}$$

$$y^2 = \sqrt{S^4 x_1^2} + 4\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} + 4\sqrt{x_1^2 y_1^4}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{S^4}\underbrace{(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}} + 8\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

$$+ 4\sqrt{y_1^2 x_1^2}\underbrace{(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}}$$

$$x^2 + y^2 = S^2 + 12\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

also ferner

$$12\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} = x^2 \quad y^2 - S^2$$

nach Obigem ist aber

$$4\sqrt{x_1^2 n_1^2} = \sqrt{(x+n)^2} - \quad S^2$$

oder

$$12\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} = 3\sqrt{S^2}(\sqrt{(x+n)^2} - \sqrt{S^2})^2$$

daraus resultirt:

$$x^2+y^2-S^2=3\sqrt[3]{S^2(\sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{S^2})^2}$$

also endgültige Gleichung der Curve aller Krümmungsmittelpunkte.

Der wahre Charakter dieser Curve kommt jedoch erst an's Licht, wenn wir des Achsensystem um 45° drehen. Alsdann bleibt $x^2+n^2_s$ als Quadrat des Rv unverändert; dagegen wird aus $(x+n)$ nun: $x\sqrt{2}$ oder statt $(x+y)^2$ tritt ein $2x^2$ und die Gleichung lautet:

$$x^2+y^2-S^2=3\sqrt[3]{S^2(\sqrt{2x^2}-\sqrt{S^2})^2}$$

dies aufgelöst, ergibt:

$$x^2+y^2-S^2=3\sqrt[3]{4S^2x^4}-6\sqrt[3]{2S^4x^2}+3S^2$$

umgeformt:

$$y^2=4S^2-3\sqrt[3]{16S^4x^2}+3\sqrt[3]{4S^2x^4}-x^2=(\sqrt[3]{(2S^2)^2}-\sqrt[3]{x^2})^3$$

radicirt:

$$\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{(2S^2)^2}-\sqrt[3]{x^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{(2S)^2}$$

„Wir machen also die überraschende Entdeckung, dass die Curve der Krümmungsmittelpunkte zur Begrenzungscurve wiederum eine Begrenzungscurve ist, jedoch mit doppeltem S als Tangenten-Constante."

In Figur 22. sieht man die Begrenzungscurve nebst ihrer Krümmungscurve ausgezeichnet, letztere nur für die untere Hälfte. Die Betrachtung dieser Figur führte mich sofort auf die Lösung der Frage nach der Länge der Begrenzungscurve. Dazu genügt folgende Ueberlegung: Wir fanden, dass der Krümmungsradius in einem Punkte immer gleich ist dem dreifachen Ro des entsprechenden Punktes der Blattcurve. Also

$$ia=3io,\quad mr=3om,\quad kb=3vl \quad \text{u. s. w.}$$

Denkt man sich nun den ganzen Raum aiw in eine unendliche Succession gleichschenkliger Dreiecke zerlegt, deren jedes einen unendlich kleinen Wkl. α an der Spitze und einen Krümmungsradius zur

Seite hat, so wird sich die Begrenzungscurve aw aus lauter unendlich kleinen Abständen zwischen den Spitzen dieser Dreiecke zusammensetzen. „Jeder solche Abstand ist aber gleich der Längendifferenz zweier aufeinander folgenden Krümmungsradien".

Der oben erwähnte Wkl. α zwischen den aufeinander folgenden Krümmungsradien ist zugleich der Winkel zwischen den 2 entsprechenden Radiivectoren der Blattcurve, weil diese sowol wie die Krümmungsradien auf derselben Hypotenuse S je paarweise senkrecht stehen. Darum kann man alle Krümmungsradien ia, kb, tc, ud u. s. w. als gleichwertig betrachten mit Radiivectoren einer Blattcurve mit der Constanten $3S$, den halben Quadranten bei 45^0 durchlaufend. Die Radiivectoren der Blattcurve sind aber, wie wir wissen, hinsichtlich der Länge gleich dem sinus des doppelten Polarwinkels. Wir haben somit die successiven Längendifferenzen, aus welchen sich unsere Curve aw zusammensetzt, auszudrücken durch:

$$\sin 2\alpha + (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) + (\sin 8\alpha - \sin 4\alpha) \ldots$$
$$+ [\sin(n-2)\alpha - \sin(n-4)\alpha] + [\sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha]$$

Als Summe dieser Reihe bleibt offenbar übrig $\sin n\,.\,\alpha = \sin 90^0$ = dem Radius des betr. Kreises, welcher in diesem Falle 3mal so gross ist, wie der unserer ursprünglichen Blattcurve. Dieser war $S/2$, demnach haben wir als Länge der Curve aw den Wert $\frac{3S}{2}$ und da aw eine **halbe** Begrenzungscurve ist, so hat die **ganze** Begrenzungscurve mit der Constanten $2S$ die Länge $= 3S$. Da nun alle Begrenzungscurven in Grösse etc. proportional sein müssen, so haben wir als Schlussresultat: Länge der Begrenzungscurve von der Formel

$$\sqrt{y^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}$$

ist
$$= \frac{3S}{2}$$

Anmerkung. Aus Obigem ergibt sich der KR für den Symmetriepunkt $= \frac{3S}{2}$ für die Endpunkte der Curve $= 0$. Zwischen diesen liegen 2 Punkte mit

$$KR = S$$

für diese ist also Ro des Blattcurvenpunktes $= S/3$, was nach Obigem die Berührungspunkte der 45^0 Tangente an die Blattcurve sind.

$$W + kR = 0$$

da muss auch die Curve selbst endigen, mithin hat die Begrenzungscurve jenseits der Längen S keine Fortsetzung.

§ 19.

Im folgenden letzten Paragraphen sollen noch 3 Nutzanwendungen dargelegt werden, die aus der Blattcurvengleichung gezogen werden können; wobei ich gleich betonen will, dass es solche Nutzanwendungen noch viele geben kann, die ich jetzt nicht ahne. Die erste bezieht sich auf die Parabel, deren Gleichung ich, abweichend von der neueren Schreibweise, mit

$$y^2 = 2px$$

nach altem Styl beibehalte, weil ich sie für entsprechender erachte. Sucht man zur Parabel den allgemeinen Ausdruck für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so erhält man

$$x = p + 3x_1, \quad y = -\frac{y_1^3}{p^2}$$

und demnach

$$KR = \sqrt{(x - x_1^2 + (y - n_1)^2}$$

$$= \sqrt{(p + 2x_1)^2 + y_1^2 \left(\frac{y_1^2}{p^2} + 1\right)^2}$$

oder

$$\sqrt{(p + 2x_1)^2 + y_1^2 \left(\frac{2x_1}{p} + 1\right)^2} = \frac{(2x_1 + p)\sqrt{p + y_1^2}}{p}$$

Wollen wir nun in der Formel nur x_1 und y_1 haben, so müssen wir für p den Wert $\frac{y_1^2}{2x_1}$ einführen und erhalten dann

$$KR = \frac{\left(2x_1 + \frac{y_1^2}{2x_1}\right)\sqrt{\frac{y_1^4}{4x_1^2} + y_1^2}}{y_1^2/2x_1}$$

oder

$$KR = \frac{(4x_1^2 + y_1^2)\sqrt{\frac{y_1^4 + 4x_1^2 y_1^2}{2y_1}}}{y_1^2}$$

$$= \frac{(xx_1^2 + y_1^2)\sqrt{4x_1^2 + y_1^2}}{2x_1 y_1}$$

$$KR \,.\, 2x_1 y_1 = \left(\sqrt{4x_1^2 \; y_1^3}\right)$$

oder

$$\sqrt{2x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{KR \,.\, 2x_1 y_1}$$

endlich

$$\sqrt{(2x_4)^2 + y_1^2} = \sqrt{KR \,.\, 2x_1 y_1}$$

Dies ist die genaue Gleichung unserer Blattcurve, woraus sich also ergibt, dass der Krümmungsradius jedes Punktes der Parabel zu dessen Coordinaten in einer Beziehung steht, ähnlich wie die Constante S zu den Coordinaten der Blattcurve. Das Wichtigste ist nun, dass dies eine sehr einfache, directe Construction des Krümmungsradius für jeden Punkt der Parabel ermöglicht. Nämlich: man trägt x_1 2 mal nach rechts ab, errichtet y_1 senkrecht im Endpunkt dieser verdoppelten Abscisse, verbindet das obere Ende von y_1 mit dem Anfangspunkt und errichtet im Endpunkte dieses Rv wiederum eine Senkrechte. „Diese schneidet die Achsen, und deren sich ergebende Länge ist der gesuchte KR zum Punkte $x_2 y_1$ der Parabel.“

Die zweite Nutzanwendung ergibt sich bei der Curve mit der Gleichung:

$$x^2 y = T^3$$

welche man wol die Cubus-Hyperbel nennen könnte, indem die Gleichung

$$xy = S^2$$

die Hyperbel 2ten Grades bezeichnet. Die Tangentengleichung findet man wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 y_1 = S^3, \quad x_1^2 = \frac{S^3}{y_1} \\ x_1^2 y_{11} = S^3, \quad x_1^2 = \frac{S^3}{y_{11}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1^2 - x_1^2 = S^3 \frac{(y_{11}-y_1)}{y_1 y_{11}} = \frac{S^3}{y_1 y_{11}}(y_1 - y_{11}) \\ = \frac{(x_1+x_{11})y_1 y_{11}}{S^3} = \frac{y_1 - y_{11}}{x_1 - x_{11}} \end{array}$$

also Secantengleichung:

$$y - y_1 = -\frac{y_1 y_{11}(x_1 + x_{11})}{S^3}(x - x_1)$$

setzen jetzt beide Punkte als einen, Tangentengleichung:

$$y - y_1 = -\frac{2y_1^2 x_1}{S^3}(x - x_1) = -\frac{2x_1 y_1^2}{x_1^2 y_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{2y_1}{x_1}(x - x_1) \text{ Gleichg. der Normale } y - y_1 = \frac{x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

variiren nun x_1 als $x_1 \pm z$, $y_1 = \frac{S^3}{y_1^2}$ variirt $\frac{S^2}{x_1^2 \pm 2z x_1}$

$$y_1 + \frac{x_1 x}{2y_1} - \frac{x_1^2}{2y_1} = \frac{S^3}{x_1^2} + \frac{x_1^3 x}{2S^3} - \frac{x_1^4}{2S^4} = \frac{S^3}{x_1^2 \pm 2zx_1} + \frac{x_1 x_1^3 \pm 3zx_1^2)}{2S^3} - \frac{x_1^4 \pm 4zx_1^3}{\cdot 2S^3}$$

$$2S^6(x_1^2 \pm 2zx_1) + xx_1^5(x_1^2 \pm 2zx_1) - x^6(x_1^2 \pm 2zx_1)$$
$$= 2S^6 x_1^2 + xx_1^2(x_1^2 \pm 2zx_1)(x_1^3 \pm 3zx_1^2) = (x_1^4 \pm 4zw_1^3)(x_1^2 \pm 2zx_1)x_1^2$$

$$2S^6 x_1^2 \pm 4S^6 zx_1 + xx_1^7 \pm 2zxx_1^6 - x_1^8 \mp 2zx_1^7$$
$$= 2S^6 x_1^2 \times xx_{12} \pm 2zxx_1^6 \pm 3zxx_1^6 - x_1^8 \mp 4zx_1^7 \mp 2zx_1^7$$

dividire durch zx_1

$$4S^6 = 3xx_1^8 - 4x_1^6$$
$$8xx_1^5 = 4(S^6 + x_1^6)$$
$$x = \frac{4(S^6 + x_1^6)}{3x_1^5}$$

setze

$$S^6 = x_1^2 y_1^2, \quad x = \frac{4x_1^4(y_1^2 + x_1^2)}{3x_1^5}$$

$$x = \frac{4(x_1^2 + y_1^2)}{3x_1}, \quad x - x_1 = \frac{4x_1^2 + 4y_1^2 - 3x_1^2}{3x_1} = \frac{4y_1^2 + x_1^2}{3x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{x_1}{2y_1} \cdot \frac{4y_1^2 + x_1^2}{3x_1} = \frac{4y_1^2 + x_1^2}{6y_1}$$

und Krümmungsradius also

$$KR = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \frac{(4y_1^2 + x_1^2)}{3} \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{4y_1^2}}$$

$$= \frac{(4y_1^2 + x_1^2 \sqrt{4y_1^2 + x_1^2}}{3 \,.\, 2x_1 y_1}$$

$$KR = \frac{(\sqrt{4y_1^2 + y_1^2})^3}{6y_1 x_1}$$

Diesem Ausdruck kann man folgende Form geben:

$$3KR \,.\, 2y_1 y_1 = \left(\sqrt{4y_1^2 + x_1^2}\right)^3$$

oder

$$\sqrt{(2y_1)^2 + x_1^2} = \sqrt[3]{3\,KR \,.\, 2y_1 x_1}$$

Hier haben wir also wiederum eine Blattcurvengleichung, in welcher nur y_1 verdoppelt ist und in der 3 fachen KR die Stelle von S einnimmt; daraus ergibt sich, ähnlich wie bei der Parabel, eine einfache Construction des KR für jeden Punkt der Curve. Man errichtet senkrecht im Endpunkt der Abscisse y_1 die doppelte Ordinate y_1; zieht den Ro an den erhaltenen Punkt und errichtet im Endpunkt wiederum senkrecht auf dem Ro die Hypotenuse, welche die Achsen schneidet. „Ihre Länge ist dann gleich dem 3 fachen Krümmungsradius des Punktes $x_1 y_1$". (Siehe die Figur.)

Für eine Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten ist der Krümmungsradius

$$KR = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2)^3}}{a^2}$$

und da für diesen Fall

$$a^2 = 2x_1 y_1$$

so haben wir

$$2KR \,.\, x_1 y_1 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^3$$

oder

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt[3]{2KR \,.\, x_1 y_1}$$

was ebenfalls eine Blattcurvengleichung ist. Hier ergibt also die Senkrechte auf den Radiusvector in dem betr. Punkte der Hyperbel

sofort eine Hypotenuse gleich dem doppelten Krümmungsradius. Jedoch sind diesfalls die Asymptoten als Achsen anzusehen und hierauf die Coordinaten zu beziehen. (Siehe die Figur).

Eine ganze Anzahl von Werten, die sich bei Untersuchung dieser und anderer Curven ergeben und 3te Wurzeln von einfachen Zahlen enthalten, würden sich mit den gewöhnlichen Mitteln der Planimetrie nicht construiren lassen. Dagegen nach dem in § 8 demonstrirten Verfahren ist dies möglich.

Die Untersuchung weiterer Curven von der Formel

$$x^2 + y^2 = S^2$$

wird später folgen. In Vorstehendem sollte nur der Beweis geliefert werden, dass es möglich ist, Curven 3ten Grades auf einfach analytischem Wege erschöpfend zu behandeln und so unsren höheren Schulen zugänglich zu machen, die sich bisher über die Kegelschnitte nicht hinauswagen durften.

Anmerkung. Es sei hier gleich der Satz mitgeteilt, den bei näherer Untersuchung Jeder leicht bestätigt finden wird: „dass für alle Curven in der Ebene, deren Gleichung nur eine Constante enthält, der allgemeine Ausdruck für den Krümmungsradius die Form der Blattcurvengleichung annimmt, gleichviel welchen Grades die Curve sei.“ Also lautet dieser:

$$\sqrt{e \,.\, KR \,.\, z \,.\, y_1 \,.\, v \,.\, x_1} = \sqrt{(z \,.\, y_1)^2 + (v \,.\, x_1)^2}$$

worin e der Exponent der Constante, z derjenige von x_1 und v der von y_1 in der Gleichung der Curve ist. Die Coefficienten von zwei Gliedern geben also zusammen jedesmal den Coefficienten des dritten, wie in der Gleichung die Exponenten von zwei Gliedern zusammen den des dritten.

VIII.

Miscellen.

1.

Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen.

Bezeichnet man die Einer einer Zahl z mit z_1 und die Zahl in den Stellen vor den Einern mit z_2, so hat man $z = 10z_2 + z_1$. Da der Rest r, den z bei der Division durch m giebt, der Zahl congruent ist, so ist:

$$r = 10z_2 + z_1 \ [\text{mod}\ m]$$

Setzt man in diese Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod m], so ist auch

$$r \equiv 10z_2 + 10\alpha z_1 \ [\text{mod}\ m] \quad \text{und}$$

$$r \equiv 10(z_2 + \alpha z_1 \ [\text{mod}\ m]$$

Wegen der Congruenz $1 = 10\alpha$ [mod m] ist m relative Primzahl zu 10. Der Rest $10(z_2 + \alpha z_1)$ kann also nur null werden, wenn $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0$ [mod m] ist.

Die beiden Congruenzen $1 \equiv 10\alpha$ [mod m] und

$$z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \ [\text{mod}\ m]$$

sprechen also zusammen die Bedingung aus, unter welcher z durch m teilbar ist.

Die relativen Primzahlen zu 10 haben in den Einern eine der vier Zahlen 1, 3, 7, 9. Wenn man daher unter m_1 die Zahl der Stellen vor den Einern der Zahl m versteht, so lässt sich m darstellen durch eine der vier Formen

1) $m = 10m_1 + 1$
2) $m = 10m_1 + 3$
3) $m = 10m_1 + 7$
4) $m = 10m_1 + 9$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+1$] genügt $\alpha = -m_1$,

denn $10(-m_1) = -(10m_1+1)+1$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+3$] genügt $\alpha = 3m_1+1$,

denn $(10(3m_1+1) = 3(10m_1+3)+1$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+7$] genügt $\alpha = -(3m_1+2$,

denn $10(-3m_1-1) = -3(10m_1+7)+1$

Der Congruenz $1 \equiv 10\alpha$ [mod $10m_1+9$] genügt $\alpha = m_1+1$,

denn $10(m_1+1) = (10m_2+1)+1$

Wenn $m_1 = 0$ gesetzt wird aus $1 \equiv 10\alpha$ [mod $+1$] für $\alpha = 0$

$1 \equiv 10\alpha$ [mod $+3$] für $\alpha = 1$

$1 \equiv 10\alpha$ [mod $+7$] für $\alpha = -2$

$1 \equiv 10\alpha$ [mod $+9$] für $\alpha = 1$

Aus der Congruenz $z_2 + \alpha z \equiv 0$ [mod m] erhält man

1) $z_2 + 0 \cdot z_1 \equiv 0$ [mod 1]

2) $z_2 + 1 \cdot z_1 \equiv 0$ [mod 3]

3) $z_2 - 2 \cdot z_1 \equiv 0$ [mod 7]

4) $z_2 + 1 \cdot z_1 \equiv 0$ [mod 9]

Die Congruenz 1) spricht aus, dass jede Zahl durch 1 teilbar ist.

Die Congruenz 2) spricht aus, dass eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen von den Einern die Einer addirt.

$$72531 \equiv 7254 = 729 \equiv 81 \equiv 9 \text{ [mod 3]}$$

Die Congruenz 3) spricht aus, dass eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer subtrahirt.

$$5313 \equiv 525 \equiv 42 \equiv 0 \text{ [mod 7]}$$

Die Congruenz 4) spricht aus, dass eine Zahl durch 9 teilbar ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen von den Einern die Einer addirt

$$4788 \equiv 486 \equiv 9 \text{ [mod 9]}$$

Setzt man $n_1 = 1$, so ist 1) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 11] und $\alpha = -1$

2) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 13] und $\alpha = 4$

3) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 17] und $\alpha = -5$

4) $1 \equiv 10\alpha$ [mod 19] und $\alpha = 2$

Die Congruenz $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0$ [mod 11] giebt also

$$1)\quad z_2 - z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 11]$$
$$2)\quad z_2 + 4z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 13]$$
$$3)\quad z_2 - 5z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 17]$$
$$4)\quad z_2 + 2^0{}_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 19]$$

Nach 1) ist also eine Zahl durch 11 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern die Einer subtrahirt.

$$58443 \equiv 5841 \equiv 583 \equiv 55 \equiv 0 \ [\text{mod } 11]$$

Nach 2) ist eine Zahl durch 13 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl vor den Einern das Vierfache der Einer addirt.

$$8125 \equiv 832 \equiv 91 \equiv 13 \equiv 0 \ [\text{mod } 13]$$

Nach 3) ist eine Zahl durch 17 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Fünffache der Einer subtrahirt.

$$6341 \equiv 629 \equiv 37 \equiv 0 \ [\text{mod } 17]$$

Nach 4) ist eine Zahl durch 19 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer addirt.

$$14022 \equiv 1406 \equiv 152 \equiv 19 \equiv 0 \ [\text{mod } 19]$$

Wenn m_1 gleich 2 gesetzt wird, findet man

$$1)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 21] \quad \text{und} \quad \alpha = -2$$
$$2)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 23] \quad \text{und} \quad \alpha = +7$$
$$3)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 27] \quad \text{und} \quad \alpha = -8$$
$$4)\quad 1 \equiv 10\alpha \ [\text{mod } 29] \quad \text{und} \quad \alpha = +5$$

Die Congruenz $z_2 + z\alpha \equiv 0$ [mod m] giebt also

$$1)\quad z_2 - 2z_1 = 0 \ [\text{mod } 21]$$
$$2)\quad c^2 + 7z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 23]$$
$$3)\quad z_2 - 8z_1 \equiv 0 \ [\text{mod } 27]$$
$$4)\quad z_2 + 3z_1 = 0 \ [\text{mod } 29]$$

Nach 1) ist also eine Zahl durch 21 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer subtrahirt.

$$13734 \equiv 1365 \equiv 126 \equiv 0 \ [\text{mod } 21]$$

Nach 2) ist eine Zahl durch 23 teibar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Siebenfache der Einer addirt.

$$14651 \equiv 1472 \equiv 161 \equiv 23 \equiv 0 \ [\text{mod } 23]$$

Nach 3) ist eine Zahl durch 27 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Achtfache der Einer subtrahirt.

$$9369 \equiv 861 \equiv 54 \equiv 27 \equiv 0 \ [\text{mod } 27]$$

Nach 4) ist eine Zahl durch 29 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Dreifache der Einer addirt.

$$12064 = 1218 \equiv 145 \equiv 29 \equiv 0 \ [\text{mod } 29]$$

In derselben Weise kann man für jeden Modulus m, welcher zu 10 relative Primzahl ist, das entsprechende α und damit das Kennzeichen für die Teilbarkeit jeder Zahl z durch den Modulus m finden.

Direktor Dr. Theodor Lange.

2.

Facultätencongruenzen.

Für eine Reihe von auf einanderfolgenden Facultäten und für einen beliebigen Modul m bestehen die folgenden Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} 2! + (m-2)\,1! \\ 3! + (m-3)\,2! \\ 4! + (m-4)\,3! \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (m-1)! + (m-[m-1]\,(m-2)! \end{array}\right\} \equiv 0 \ (\text{mod } m)$$

Beispiel:

$m = 11.$

$$
\begin{aligned}
2! + 9 . 1! &= 11 \\
3! + 8 . 2! &= 22 \\
4! + 7 . 3! &= 66 \\
5! + 6 . 4! &= 264 \\
6! + 5 . 5! &= 1320 \\
7! + 4 . 6! &= 6920 \\
8! + 3 . 7! &= 55440 \\
9: + 2 . 8! &= 443520 \\
14! + 1 . 9! &= 3991680
\end{aligned}
$$

Die entstandenen Producte sind alle durch 11 teilbar.

Oldenburg i. G. G. Speckmann.

IX.

Anwendungen von Dühring's Begriff der Wertigkeit.

II.

Von

Dr. **K. Wessely.**

Fortsetzung von Nr. XX. im X. Teil.

Jede algebraische Gleichung mit constanten Coefficienten kann aufgefasst werden als specieller Fall der Definitions-Gleichung einer algebraischen Function; entweder in der Weise, dass die ganzen rationalen Functionen, welche die Coefficienten einer solchen Definitions-Gleichung bilden, nur das absolute Glied enthalten, oder in der Weise, dass diese Coefficienten durch Substitution eines bestimmten Wertes für die unabhängig Veränderliche zu Constanten geworden sind.

Entsprechend dem durch die Riemann'sche Fläche bestimmten Zusammenhang zwischen den einzelnen Zweigen der algebraischen Function kann man dann auch zwischen den einzelnen Lösungen einer numerischen Gleichung eine bestimmte Reihenfolge fixirt denken, und unter Beibehaltung der einmal fixirten Reihenfolge mit dem gesamten Wertecomplex der Lösung in derselben Weise arithmetische Operationen ausführen, wie mit einer algebraischen Function.

Tatsächlich ist ja auch eine irrationale Zahl $a+\sqrt{b}$ durch die Bedingung, einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten genügen zu sollen, mit einer zweiten irrationalen Zahl $a-\sqrt{b}$ insoferne verknüpft, als es unmöglich ist eine solche Gleichung zu bilden,

die eine der beiden Lösungen hätte ohne die andere; das heisst: es ist durch eine Gleichung:

$$x^2 = a$$

x als zweiwertige, durch eine Gleichung:

$$x^3 = a$$

x als dreiwertige Grösse definirt.

Jeder zweiwertige Coefficient $\pm\sqrt{a}$ macht eine Verbindung $x \pm \sqrt{a} \,.\, y$ zu einer „irreductiblen", das heisst zu einer solchen, welche aus der Gleichung

$$x \pm \sqrt{a} \,.\, y = 0$$

folgern lässt

$$x = 0; \quad y = 0$$

Es wird daher auch eine unabhängig Veränderliche

$$z = x \pm \sqrt{a} \,.\, y$$

in bestimmter Weise über die Fundamental-Ebene ausgebreitet werden können, sobald die Festsetzung gemacht ist, dass die beiden reellen Variablen x und y zwei auf einander senkrechte Richtungen der Ebene darstellen und der zweiwertige Coefficient $\pm\sqrt{a}$ nur dazu dient, ihre additive Verbindung zu einer irreductiblen zu machen, ohne dass a speciell gleich der negativen Einheit sein müsste. Für eine bestimmte Ausbreitung der complexen Grössen:

$$y + \sqrt{-1} \,.\, y$$

über die Fundamental-Ebene ist also die Deutung der imaginären Einheit als „Richtung" n i c h t erforderlich, und das Rechnen mit complexen Grössen kann in mancher Hinsicht als specieller Fall des Rechnens mit einem zweiwertigen Argument angesehen werden, das in analoger Weise auch für ein drei- und mehrwertiges Argument durchgeführt werden kann.

Ist z. B. k durch eine Gleichung

$$k^2 = a$$

als zweiwertige Grösse definirt, und ordnet man einem bestimmten Werte von

$$z = x + ky$$

einen bestimmten Wert von

$$f(z) = u + kv$$

zu, und ebenso einem unendlich benachbarten Wert von z einen solchen von $f(z)$, so folgt aus

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

dass der Quotient $\frac{df(z)}{dz}$ von dz unabhängig wird, sobald

$$\frac{df(z)}{\partial y} = k \frac{\partial f(z)}{\partial x}$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial g} + k \frac{\partial v}{\partial y} = k \left[\frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$= k \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 \frac{\partial v}{\partial x}$$

Da k^2 definitionsgemäss einwertig gleich a ist, folgt aus

$$\frac{\partial U}{\partial y} - a \frac{\partial V}{\partial x} + k \left\{\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = a \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

als notwendige und wie man leicht übersieht auch als hinreichende Bedingung dafür, dass $u+kv$ eine Function von z ist, d. h. einen Differential-Quotienten nach z besitzt, der von der Art, wie z verschwindet, unabhängig ist. Untersucht man aber das Verhältniss entsprechender Bogen-Elemente: $\frac{dU^2+dV^2}{dx^2+dy^2}$, so gibt die Rechnung:

$$dU^2+dV^2 = dx^2 \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} + dy^2 \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+ 2dx\,dy \left\{\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y}\right\}$$

so dass im allgemeinen das Verhältniss der Moduln entsprechender Bogenelemente von den Incrementen nicht unabhängig ist. Nur in dem speciellen Falle $a = -1$ wird, wie man sieht, der Quotient $\frac{dU^2+dV^2}{dx^2+dy^2}$ eine Function der Coordinaten, oder die Abbildung ähnlich.

Verfährt man in ganz analoger Weise mit einem dreiwertigen Argument

$$w = x + ky + k^2 z$$

wobei k durch die Gleichung

$$k^3 = a$$

als dreiwertige Grösse definirt sein soll, so dass durch w sämtliche Punkte des Raumes in bestimmter Weise repräsentirt werden können, so erhält man, wie früher, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$U + kV + k^2 W = f(w)$$

eine Function von w sei, aus

$$df(w) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = k \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = k^2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

oder:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial f}{\partial z}$$

hiefür kann man auch wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial y} + k^2 \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + k \frac{\partial V}{\partial z} + k^2 \frac{\partial W}{\partial z}$$

schreiben:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{k^2} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

Mit Rücksicht darauf, dass aus

$$k^3 = a \text{ folgt:}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{k^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{k}{a}$$

ergibt sich weiter, da man definitionsgemäss die Coefficienten der einzelnen Potenzen von k einander gleich setzen kann, für die Bedingungsgleichungen die Form:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = a\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = a\frac{\partial V}{\partial x} = a\frac{\partial W}{\partial y}$$

Jeder analytische Ausdruck, der von x, y, z nur in der Verbindung $x+ky+k^2z$ abhängt, lässt sich in bestimmter Weise auf die Form $U+kV+k^2W$ bringen.

Denn aus einer Gleichung

$$f(x+ky+k^2z) = U+kV+k^2W$$

bestimmen sich die Werte von U, V, W in eindeutiger Weise, da diese Gleichung nichts anderes ist, als eine kürzere Schreibweise für die drei linearen Gleichungen, die man erhält, wenn man für k seine drei Werte k_1, k_2, k_3 substituirt; bezeichnet man die entsprechenden Werte von w mit w_1, w_2, w_3, so folgt aus

$$\begin{cases} f(w_1) = U+k_1V+k_1^2W \\ f(w_2) = U+k_2V+k_2^2W \\ f(w_3) = U+k_3V+k_3^2W \end{cases}$$

$$3U = f(w_1)+f(w_2)+f(w_3)$$

$$3V = k_1^2f(w_1)+k_2^2f(w_2)+k_3^2f(w_3)$$

$$3W = k_1f(w_1)+k_2f(w_2)+k_3f(w_3)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man auch unmittelbar, dass die Grössen U, V, W den aufgestellten Bedingungsgleichungen genügen, so dass also jeder analytische Ausdruck der nur von $x+ky+k^2z$ abhängt, auch als eine Function des dreiwertigen Argumentes zu bezeichnen ist.

Bildet man nun wieder den Quotienten der Moduln sich entsprechender Bogenelemente, so zeigt sich wie früher, dass dieses Verhältniss im allgemeinen für einen bestimmten Punkt nicht constant ist, dass es aber in dem speciellen Fall

$$k^3 = 1 \quad \text{oder} \quad k^3 = -1$$

für jede Function von w eine bestimmte Fläche gibt, für deren Punkte der erwähnte Quotient eine Function der Coordinaten ist, os

dass diese Fläche auf der ihr durch $f(w)$ zugeordneten in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

Man erhält nämlich unter Benutzung der aufgestellten partiellen Differential Gleichungen:

$$dU^2+dV^2+dW^2 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx^2$$
$$+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dy^2$$
$$+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]dz^2$$
$$+2dx\,dy\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}\right]$$
$$+2dy\,dz\left[\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$
$$+2dz\,dx\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right]$$

daher für $k^3=1$

$$dU^2+dV^2+dW^2 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right](dx^2+dy^2+dz^2)$$
$$+2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)[dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx]$$

das heisst für alle Werte x, y, z, welche der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

genügen, wird

$$\frac{dU^2+dV^2+dW^2}{dx^2+dy^2+dz^2}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$$

oder jede Function von $x+ky+k^2z$

$$f(x+ky+k^2z) = U+kV+k^2W$$

wobei

$$k^3=1$$

bildet die Fläche, welche durch die obige Gleichung bestimmt ist, auf der ihr entsprechenden in den kleinsten Teilen ähnlich ab.

Man kann die Gleichung dieser Fläche in etwas einfachere Form bringen, wenn man für U den früher berechneten Wert einsetzt.

Man erhält dann:

$$3\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} + \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} + \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

$$3\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial y}$$

und unter Berücksichtigung, dass

$$k_1 = 1, \; k_2 = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \; k_3 = -\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad \text{ist,}$$

$$9\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2}\right)^2 + k_3\left(\frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}\right)^2$$
$$+ (k_2+1)\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} + (k_3+1) \cdot \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$
$$+ (k_3+k_2)\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2 z} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

Die analogen Relationen für die beiden übrigen Posten geben addirt:

$$9\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 3\left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 - 3\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

so dass die Gleichung der abzubildenden Fläche auch geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 = \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

Bezeichnet ψ die Umkehrungsfunction von f, so dass

$$w = \psi(U + kV + k^2 W)$$

so kann man die entsprechende Fläche schreiben:

$$\left[\frac{\partial f\psi(U+kV+k^2W)}{\partial\psi(U+kV+k^2W)}\right]^2 = \frac{\partial f\psi(U+k_2V+k_2^2W)}{\partial\psi(U+k_2V+k_2^2W)} \cdot \frac{\partial f\psi(U+k_3V+k_3^2W)_3}{\partial\psi(U+k_3V+k^2W)}$$

worin f und ψ im Zähler selbstverständlich weggelassen werden können.

Um hiernach ein einfaches Beispiel zu rechnen, das durch die Gauss'sche Abbildungstheorie leicht verificirt werden kann, möge f

$$w = x + ky + k^2 z$$

wobei k durch die Gleichung

$$k^3 = a$$

als dreiwertige Grösse definirt sein soll, so dass durch w sämtliche Punkte des Raumes in bestimmter Weise repräsentirt werden können, so erhält man, wie früher, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$U + kV + k^2 W = f(w)$$

eine Function von w sei, aus

$$df(w) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = k \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = k^2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

oder:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial f}{\partial z}$$

hiefür kann man auch wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial y} + k^2 \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + k \frac{\partial V}{\partial z} + k^2 \frac{\partial W}{\partial z}$$

schreiben:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial W}{\partial y}$$
$$= \frac{1}{k^2} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

Mit Rücksicht darauf, dass aus

$$k^3 = a \quad \text{folgt:}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{k^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{k}{a}$$

ergibt sich weiter, da man definitionsgemäss die Coefficienten der einzelnen Potenzen von k einander gleich setzen kann, für die Bedingungsgleichungen die Form:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = a\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = a\frac{\partial V}{\partial x} = a\frac{\partial W}{\partial y}$$

Jeder analytische Ausdruck, der von x, y, z nur in der Verbindung $x+ky+k^2z$ abhängt, lässt sich in bestimmter Weise auf die Form $U+kV+k^2W$ bringen.

Denn aus einer Gleichung

$$f(x+ky+k^2z) = U+kV+k^2W$$

bestimmen sich die Werte von U, V, W in eindeutiger Weise, da diese Gleichung nichts anderes ist, als eine kürzere Schreibweise für die drei linearen Gleichungen, die man erhält, wenn man für k seine drei Werte k_1, k_2, k_3 substituirt; bezeichnet man die entsprechenden Werte von w mit w_1, w_2, w_3, so folgt aus

$$\begin{cases} f(w_1) = U+k_1V+k_1^2W \\ f(w_2) = U+k_2V+k_2^2W \\ f(w_3) = U+k_3V+k_3^2W \end{cases}$$

$$3U = f(w_1)+f(w_2)+f(w_3)$$
$$3V = k_1^2f(w_1)+k_2^2f(w_2)+k_3^2f(w_3)$$
$$3W = k_1f(w_1)+k_2f(w_2)+k_3f(w_3)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man auch unmittelbar, dass die Grössen U, V, W den aufgestellten Bedingungsgleichungen genügen, so dass also jeder analytische Ausdruck der nur von $x+ky+k^2z$ abhängt, auch als eine Function des dreiwertigen Argumentes zu bezeichnen ist.

Bildet man nun wieder den Quotienten der Moduln sich entsprechender Bogenelemente, so zeigt sich wie früher, dass dieses Verhältniss im allgemeinen für einen bestimmten Punkt nicht constant ist, dass es aber in dem speciellen Fall

$$k^3 = 1 \quad \text{oder} \quad k^3 = -1$$

für jede Function von w eine bestimmte Fläche gibt, für deren Punkte der erwähnte Quotient eine Function der Coordinaten ist, os

dass diese Fläche auf der ihr durch $f(w)$ zugeordneten in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

Man erhält nämlich unter Benutzung der aufgestellten partiellen Differential Gleichungen:

$$dU^2+dV^2+dW^2 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx^2$$

$$+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dy^2$$

$$+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]dz^2$$

$$+2dx\,dy\left[\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{a}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial z}\right]$$

$$+2dy\,dz\left[\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{a}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

$$+2dz\,dx\left[\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{1}{a}\,\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{1}{a}\,\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial y}\right]$$

daher für $k^3=1$

$$dU^2+dV^2+dW^2 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right](dx^2+dy^2+dz^2)$$

$$+2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)[dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx]$$

das heisst für alle Werte x, y, z, welche der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

genügen, wird

$$\frac{dU^2+dV^2+dW^2}{dx^2+dy^2+dz^2}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$$

oder jede Function von $x+ky+k^2z$

$$f(x+ky+k^2z) = U+kV+k^2W$$

wobei

$$k^3=1$$

bildet die Fläche, welche durch die obige Gleichung bestimmt ist, auf der ihr entsprechenden in den kleinsten Teilen ähnlich ab.

Man kann die Gleichung dieser Fläche in etwas einfachere Form bringen, wenn man für U den früher berechneten Wert einsetzt.

Man erhält dann:

$$3\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} + \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} + \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

$$3\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial y}$$

und unter Berücksichtigung, dass

$$k_1 = 1,\ k_2 = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2},\ k_3 = -\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \text{ ist,}$$

$$9\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2}\right)^2 + k_3\left(\frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}\right)^2$$
$$+ (k_2+1)\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} + (k_3+1) \cdot \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$
$$+ (k_3+k_2)\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2 z} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

Die analogen Relationen für die beiden übrigen Posten geben addirt:

$$9\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 3\left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 - 3\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

so dass die Gleichung der abzubildenden Fläche auch geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 = \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

Bezeichnet ψ die Umkehrungsfunction von f, so dass

$$w = \psi(U + kV + k^2 W)$$

so kann man die entsprechende Fläche schreiben:

$$\left[\frac{\partial f\psi(U+kV+k^2W)}{\partial\psi(U+kV+k^2W)}\right]^2 = \frac{\partial f\psi(U+k_2V+k_2^2W)}{\partial\psi(U+k_2V+k_2^2W)}$$
$$\cdot \frac{\partial f\psi(U+k_3V+k_3^2W)_3}{\partial\psi(U+k_3V+k^2W)}$$

worin f und ψ im Zähler selbstverständlich weggelassen werden können.

Um hiernach ein einfaches Beispiel zu rechnen, das durch die Gauss'sche Abbildungstheorie leicht verificirt werden kann, möge f

so bestimmt werden, dass die abzubildende Fläche eine Rotationsfläche wird, deren Axe in die Richtung der früher definirten i oder $1+k+k^2$ fällt, welche Richtung auf der Ebene

$$x+y+z=0$$

senkrecht steht.

Die partielle Differential-Gleichung aller dieser Rotationsflächen lautet:

$$(y-z)\frac{\partial F}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial F}{\delta z}=0$$

Setzt man voraus, dass F die Form haben soll

$$F=\left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2-\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

so erhält man, wenn der Kürze halber

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w}=\varphi(w)$$

gesetzt wird, als Gleichung der Rotationsfläche:

$$\begin{aligned}&(y-z)[2\varphi(w_1)\varphi'(w_1)-\varphi(w_2)\varphi'(w_3)-\varphi(w_3)\varphi'(w_2)]\\&+(z-x)[2\varphi(w_1)\varphi'(w_1)-\varphi(w_2)\,\varphi'(w_3)k_3-\varphi(w_3)\varphi'(w_2)k_2]\\&+(x-y)[2\varphi(w_1)\varphi'(w_1)-\varphi(w_2)\varphi'(w_3)k_2-\varphi(w_3)\varphi'(w_2)k_3]=0\end{aligned}$$

woraus sich nach einigen einfachen Reductionen ergibt:

$$\varphi(w_2)\,.\,\varphi'(w_3)\cdot w_3-\varphi(w_3)\,.\,\varphi'(w_3)\,.\,w_2=0$$

Wählt man also φ so, dass

$$\varphi'(w)\,.\,(w)=A\,\varphi(w)\text{ wird,}$$

oder also

$$\log\varphi(w)=A\log w+\log C$$

$$\varphi(w)=C\,.\,w^A$$

worin C und A Constante bedeuten, so ist die obige Gleichung identisch erfüllt.

Für $f(w)$ folgt also:

$$f(w)=\frac{C}{A+1}\,w^{A+1}+C_1$$

oder wenn $A=-1$

$$f(w)=\log C_2\,.\,w^C$$

Speciell

$$f(w) = w^{-1} = U + kV + k^2 W$$

liefert als abzubildende Fläche:

$$w_3^{-4} = (w_2 \,.\, w_3)^{-2}$$

$$w_1^2 = \pm\, w_2 \,.\, w_3$$

oder

$$(x+y+z)^2 = \pm (x + k_2 y + k_3 z)(x + k_3 y + k_2 z)$$

indem

$$k_2^2 = k_3 \quad \text{und} \quad k_3^2 = k_2$$

Dreht man das Coordinaten-System in die Richtung der früher definirten Einheitsvectoren i, j, l durch die Transformation

$$x + ky + k^2 z = \frac{1+k+k^2}{\sqrt{3}}\xi + \frac{2-k-k^2}{\sqrt{6}}\eta + \frac{k-k^2}{\sqrt{2}}\zeta$$

worin die Coefficienten gleich hoher Potenzen von k gleich gesetzt werden können, so verwandeln sich die beiden Flächengleichungen, da

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z &= \frac{3}{\sqrt{3}}\xi \\ x+k_2 y+k_3 z &= \frac{3}{\sqrt{6}}\eta + \sqrt{\frac{-3}{2}}\zeta \\ x+k_3 y+k_2 z &= \frac{3}{\sqrt{6}}\eta - \sqrt{\frac{-3}{2}}\zeta \end{aligned}\right.$$

in:

$$\xi^2 - \tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{2}\zeta^2 = 0$$

und

$$\xi^2 + \tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^2 = 0$$

bedeuten also einen reellen und einen imaginären Kreiskegel.

Für die entsprechende Fläche ergeben sich selbstverständlich wegen der Reciprocität:

$$w_1 = (U + V + W)^{-1}$$
$$w_2 = (U + k_2 V + k_3 W)^{-1}$$
$$w_3 = (U + k_3 V + k_2 W)^{-1}$$

Gleichungen von derselben Form, so dass also die Function $\frac{1}{w}$ die Kegel auf sich selbst abbildet, und zwar in reciproker Weise, indem den Schnittcurven des Kreiskegels im xyz Raume mit den Ebenen

$$x + y + z = c$$

die Schnitte desselben Kegels im UVW Raume mit den Ebenen

$$U + V + W = \frac{1}{c}$$

entsprechen.

Im allgemeinen erhält man entsprechende Punkte durch die Relationen:

$$U = \frac{x^2 - yz}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}, \quad V = \frac{z^2 - xy}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}, \quad W = \frac{y^2 - zx}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}$$

welche sich auf die früher angegebene Weise durch directes Ausrechnen ergeben.

Eine conforme Abbildung des reellen Kegels auf die Ebene erhält man, wenn $A = -1$ gesetzt wird, also durch

$$f(w) = \log w = U + kV + k^2 W$$

indem man als abzubildende Fläche wieder erhält:

$$\left(\frac{1}{w_1}\right)^2 = \frac{1}{w_2} \cdot \frac{1}{w_3}$$

während sich für die entsprechende Fläche aus:

$$x + ky + k^2 z = c^{U + kV + k^2 W}$$

ergibt:

$$w_1^2 = e^{2(U + V + W)}$$

$$w_2 = c^{U + k_2 V + k_3 W}$$

$$w_3 = e^{U + k_3 V + k_2 W}$$

so dass

$$w_1^2 = w_2 w_3$$

übergeht in

$$2(U + V + W) = U + k_3 V + k_2 W + U + k_3 V + k_3 W$$

oder:

$$V + W = 0$$

Entsprechende Punkte erhält man durch die Relationen, die sich zwischen xyz und UVW aus den drei Gleichungen:

$$3U = \log w_1 w_2 w_3$$

$$3V = \log w_1 w_2^{k_3} w^{k_2}$$

$$3W = \log w_1 w_2^{k_3} w_3^{k_2}$$

ergeben.

Um auf eine von den bisherigen Entwicklungen unabhängige Weise zu zeigen, dass die einander in solcher Weise zugeordneten Flächen wirklich conform abgebildet sind, sollen noch beide Flächen mit je zwei Schaaren sich rechtwinklig schneidender Curven bedeckt werden; die Zuordnung entsprechender Punkte durch die obigen Relationen, muss dann in den krummlinigen Coordinaten ausgedrückt übergehen in eine Zuordnung durch gewöhnliche complexe Functionen.

Bezeichnet man die neuen Variablen für xyz mit δ und $\varkappa$ und die neuen Variablen für UVW mit σ und ϱ, so lässt sich die Kegelfläche

$$w_1^2 = w_2 w_3 \quad \text{oder} \quad xy + yz + zx = 0$$

darstellen durch

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} + \frac{2}{\sqrt{6}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \sin\lambda$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \cos\lambda - \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \sin\lambda$$

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \cos\lambda - \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \sin\lambda$$

und die zugeordnete Ebene darstellen durch

$$U = \sigma$$

$$V = -\varrho \cos\frac{\pi}{4}$$

$$W = \varrho \sin\frac{\pi}{4}$$

Mit Rücksicht darauf, dass

$$3U = 3\sigma = \log w_1 w_2 w_3$$

$$\varrho = \sqrt{V^2 + W^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\log w_1 w_3{}^{k}{}_3 w_3{}^{k_2} + [\log w_1 w_2{}^{k_3} w_3{}^{k_3}]^2}$$

und

$$w_1 = 3\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, c^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{-3}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \cos\lambda + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \sin\lambda = \sqrt{\frac{-3}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta}\, e^{-\sqrt{-1}\,.\,\lambda}$$

$$w_3 = -\sqrt{\frac{-3}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \cos\lambda + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta} \sin\lambda = -\sqrt{\frac{-3}{2}}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\delta}\, e^{\sqrt{-1}\,.\,\lambda}$$

folgt:

$$3U = \log\left\{\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{5}{5}}\, e^{3\sqrt{\frac{2}{3}}\partial}\right\}$$

$$= \tfrac{3}{3}\log\tfrac{5}{2} + 3\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\partial$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\partial$$

Um noch ϱ durch λ und δ auszudrücken, kann man für $\sqrt{-1}$ schreiben $e^{\sqrt{-1}\,.\,\frac{\pi}{2}}$, so dass

$$\sqrt{-\tfrac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.\,e^{\sqrt{-1}\,.\,\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad -\sqrt{-\tfrac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,e^{-\sqrt{-1}\,.\,\frac{\pi}{2}}$$

gesetzt wird, woraus sich weiter ergibt:

$$w_1\,.\,w_2^{\,k_2}\,.\,w_3^{\,k_1} = e^{-\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)}$$

und

$$w_1\,.\,w_2^{\,k_3}\,.\,w_3^{\,k_3} = e^{+\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)}$$

$$9\varrho^2 = 6\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)^2$$

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)$$

so dass zwischen den krummlinigen Coordinaten die Beziehung besteht:

$$\sigma + \sqrt{-1}\,\varrho = \tfrac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{-2}{3}} + \sqrt{\tfrac{7}{3}}(\partial + \sqrt{-1}\,\lambda)$$

was bekanntlich eine hinreichende Bedingung für die Conformität der Abbildung ist.

Als auszuschliessende Unstetigkeitsstellen einer eindeutigen Function eines dreiwertigen Argumentes müssen naturgemäss alle jene Punkte angesehen werden, in welchen einer der drei Functionswerte unstetig wird; für die Function $\frac{1}{w}$ erfüllen daher die Unstetigkeitsstellen erstens die Ebene

$$w_1 = 0 = x + y + z$$

und zweitens die Gerade $w_2 = 0$ oder (was dasselbe Resultat liefert) $w_3 = 0$; nämlich

$$x = y = z$$

Dies sind zugleich auch die im endlichen gelegenen Unstetigkeitsstellen des Logarithmus, wie man entweder aus den früher berechneten Werten von UVW, oder auch aus der Definition des Logarithmus durch die Summe $\int \frac{dw}{w}$ erkennt.

Dass ein solches Integral einen „Sinn“ hat, d. h. einen vom Integrationsweg unabhängigen Wert liefert, folgt aus dem Satz von Stokes, nach welchem ein Integral:

$$\int \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

das sich über eine geschlossene Curve erstreckt, stets ersetzt werden kann durch ein Flächen-Integral:

$$\int \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \cos(nz)\right] d\sigma$$

wobei n die Normale auf $d\sigma$ bedeutet und die Fläche vom Integrationsweg begrenzt wird.

Bringt man nämlich das Linien-Integral

$$\int f(w)\, dw$$

zunächst durch Ausführung der Multiplication:

$$(U + kV + k^2 W)(dx + k\, dy + k^2 dz)$$

auf die Form:

$$\int U dx + W dy + V dz + k \int V dx + U dy + W dz$$
$$+ k^2 \int W dx + V dy + U dz$$

und verwandelt dasselbe hernach nach dem Stokes'schen Satz in ein Flächen-Integral, so erhält man für den ersten Posten, wo UVW an die Stelle von $\alpha\beta\gamma$ treten:

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z}\right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cos(ny)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) \cos(nz)\right] d\sigma$$

und für den zweiten und dritten Posten durch cyklische Vertauschung:

$$\int\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial z}\Big)\cos(nx)+\Big(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\Big)\cos(ny)$$
$$+\Big(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\cos(nz)\Big]d\sigma$$

$$\int\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\cos(nx)+\Big(\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial y}\Big)\cos(ny)$$
$$+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\Big)\cos(nz)\Big]d\sigma$$

Nach den früher aufgestellten Relationen zwischen den einzelnen partiellen Differential-Quotienten verschwindet jeder einzelne Posten unter dem Integralzeichen, und es wird daher

$$\int f(w)\,dw=0$$

sobald man durch die geschlossene Integrations-Curve eine Fläche legen kann, die nur solche Punkte enthält, für welche die aufgestellten Relationen zwischen den partiellen Differential-Quotienten richtig sind.'

Wollte man etwa jene Stellen, wo die partiellen Differential-Gleichungen keine Giltigkeit haben, als „Wirbelraum" von $f(w)$ bezeichnen, so kann man also sagen, ein Integral

$$\int f(w)\,dw$$

hat für alle jene Curven, die sich ohne einen Wirbelraum zu treffen, in einander überführen lassen, ein und denselben Wert.

Beispielsweise wird das Integral

$$\int\frac{dw}{w}$$

erstreckt um irgend eine Curve, welche die Gerade

$$x=y=z$$

oder die Richtung i einschliesst, ohne die Ebene

$$x+y+z=0$$

zu treffen, ersetzt werden können durch dasselbe Integral längs eines Kreises, dessen Ebene auf der Richtung i senkrecht steht und dessen Mittelpunkt in die i Axe fällt.

Dreht man das Coordinaten-System in die Richtung der $i\ j\ l$ und führt Polar-Coordinaten ein, so dass für w zu schreiben ist:

$$w = r(i\cos\varphi + g\sin\varphi) \quad \text{wobei} \quad g = j\cos\lambda + l\sin\lambda$$

und für dw, mit Rücksicht darauf, dass bezüglich der Integration φ constant ist, geschrieben werden kann,

$$dw = r\sin\varphi\left(\frac{\partial g}{\partial\lambda} \cdot d\lambda\right)$$

so geht das Integral $\int\limits_{(C)} \frac{dw}{w}$ über in

$$\int\limits_0^{k\pi} \frac{\sin\varphi(-j\sin\lambda + l\cos\lambda)\, d\lambda}{i\cos\varphi + g\sin\varphi}$$

Man kann nun $\frac{1}{i\cos\varphi + g\sin\varphi}$ auf die Form: $iX + jY + lZ$ bringen, indem man in der Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 = {} & i^2\cos\varphi X + j^2\cos\lambda\sin\psi Y + l^2\sin\lambda\sin\varphi Z \\ & + jl(\sin\lambda\sin\varphi Y \sin\varphi Z) \end{aligned}$$

für i, j, l die Werte in k substituirt, und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von k einander gleich setzt, wodurch man erhält:

$$X = \frac{1}{3\cos\varphi}, \quad Y = \frac{2}{3}\frac{\cos\lambda}{\sin\varphi}, \quad Z = -\frac{2\sin\lambda}{3\sin\varphi}$$

hiernach wird:

$$\int \frac{dw}{w} = \int\limits_0^{2\pi} \left[iX + j \cdot \frac{2}{3}\frac{\cos\lambda}{\sin\varphi} - l \cdot \frac{2}{3}\frac{\sin\lambda}{\sin\varphi}\right] \sin\varphi \frac{\partial g}{\partial\lambda} d\lambda$$

der erste Posten unter dem Integral verschwindet, weil

$$ij = il \equiv 0$$

Ferner gibt:

$$dg = (-j\sin\lambda + l\cos\lambda)\, d\lambda$$

$$j\cos\lambda \cdot dg = (-j^2\cos\lambda\sin\lambda + jl\cos^2\lambda)\, d\lambda$$

$$l\sin\lambda \cdot dg = (-jl\sin^2\lambda + l^2\cos\lambda\sin\lambda)\, d\lambda$$

daher:

I. Allgemeine Gleichung.

SAN in Figur 1 sei ein Weltkörper, der sich in n Secunden einmal um seine Achse dreht. Durch die Centrifugalkraft, die sich aus der Umdrehung entwickelt, werden die Massenteilchen der Atmosphäre nach aussen gedrängt; durch die Anziehung, die der Weltkörper ausübt, werden sie nach dessen Mittelpunkt hingezogen. Da die Anziehung mit dem Abstande vom Weltkörper abnimmt, und die Centrifugalkraft mit diesem Abstande zunimmt, so muss es eine Grenze *FBED* geben, an welcher Anziehung und Centrifugalkraft mit einander im Gleichgewicht stehen. Bis zu dieser Grenze dehnt sich, wie hier abweichend von allen bisherigen Annahmen behauptet wird, mit stetig abnehmender Dichte die Atmosphäre aus und schliesst dort in einer Verdünnung ab, die wir weder mit Luftpumpen noch mit anderen Vorrichtungen erreichen können und die sich von der Torricellischen Leere kaum unterscheidet.

In E sei eine Masse ω vorhanden und die Beschleunigung der Fallschwere in diesem Punkte sei gleich γ. Die Anziehung, mit der das Gestirn die Masse ω nach dem Mittelpunkte C hinzieht und die gleich $\gamma\omega$ ist, werde mit q bezeichnet. Sie zerlegt sich in $q \sin \varphi$ parallel zur Achse FD und in $q \cos \varphi$ senkrecht zur Achse FD.

Die Centrifugalkraft, die sich im Punkte E in der Masse ω entwickelt, ist in der Figur mit P bezeichnet worden und ist, da sie durch Umdrehung des Gestirns um die Achse FD entsteht, senkrecht zu dieser Achse gerichtet. Wenn man also bestimmen will, wie weit der Punkt E in der Grenze der Atmosphäre vom Mittelpunkt C des Weltkörpers entfernt ist, so muss man die Gleichung ansetzen:

$$P = q \cos \varphi$$

Bei der Umdrehung um die Achse FD beschreibt der Punkt E mit der Tangentialgeschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi}{n} EH$$

einen Kreis vom Halbmesser EH. Danach ist

$$P = \frac{\omega v^2}{EH}$$

und, wenn man für v den eben genannten Wert einrückt und aus der Figur

$$EH = CE \cos \varphi$$

entnimmt,

$$P = \omega \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 CE \cos\varphi$$

Setzt man dies gleich $q \cos\varphi$, d. h. nach dem Vorhergehenden

$$= \gamma\omega \cos\varphi$$

so erhält man nach Ausscheidung der sich hebenden Grössen

$$CE = \gamma \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2$$

oder wenn man CE durch R bezeichnet

$$R = \gamma \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2$$

In diesem Ausdruck muss noch γ bestimmt werden. Es sei g die Beschleunigung der Fallschwere im Aequator unserer Erde, n der Aequatorial-Halbmesser der Erde, A die Masse der Erde und M mal A die Masse des fremden Gestirns. Da sich nun nach dem bekannten Gesetz die durch die Beschleunigungen γ und g vertretenen Anziehungen direct wie die Massen der ihnen zugehörigen Gestirne und umgekehrt wie die Quadrate der Abstände der angezogenen Masse von den Mittelpunkten dieser Gestirne verhalten, so hat man die Proportion

$$\gamma : g = \begin{Bmatrix} MA : A \\ a^2 : CE^2 \end{Bmatrix}$$

woraus sich

$$\gamma = M \cdot \frac{a^2 g}{CE^2} \quad \text{oder} \quad \gamma = Mg \left(\frac{a}{R}\right)^2$$

ergiebt. Durch Einführung dieses Wertes in die vorige Gleichung und durch Entwicklung von R erhält man schliesslich

$$R = \sqrt[3]{gM\left(\frac{na}{2\pi}\right)^2}$$

In diesem Ausdruck ist, wie der Deutlichkeit halber noch einmal wiederholt sein möge, $u\,(= 6377{,}5$ km) der Aequatorial-Halbmesser der Erde und $a\,(= 9{,}815$ m) die Beschleunigung der Fallschwere im Aequator der Erde, die aber, wenn a in Kilometern angenommen wird, ebenfalls als Bruchteil eines Kilometers

$$(= 0{,}009815 \text{ km})$$

angesetzt werden muss. M und n sind Maasse, die dem fremden Gestirn angehören, z. B. für den Saturn $n = 37757$ Secunden und $M = 92$.

Zufolge der vorstehenden Berechnung sind also die sämtlichen Punkte der Linie *FBED* gleich weit vom Mittelpunkt des Sterns

entfernt oder mit anderen Worten: die Linie ist eine Kreislinie und das Gestirn bildet mit seiner Atmosphäre trotz seiner Umdrehung und trotz der Abplattung des festen Teils eine genaue Kugel vom Halbmesser R.

II. Die Beschleunigung g.

In seinen logarithmischen Tafeln (Ausgabe 1879, Seite 160) giebt Dr. E. F. August die Beschleunigung der Pendelschwere im Aequator der Erde gleich 9,781 m an. Es ist dies die Beschleunigung der Fallschwere, vermindert um den Verlust, der ihr aus der Centrifugalkraft erwächst. Durch die Fallschwere wird eine im Aequator der Erde befindliche Masse ω mit der Kraft $g\omega$ angezogen. Die Centrifugalkraft der Masse ω ist aber $= \frac{\omega v^2}{a}$ oder, weil die Tangential-Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi a}{n}$ ist, gleich $\omega \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 b$.

Dieselbe Masse wird von der Pendelschwere mit der Kraft 9,781 ω angezogen und dies muss gleich

$$g\omega = \omega \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 a$$

sein, woraus man

$$g = 9{,}781 + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^3 a$$

erhält. Hierin ist $n = 86164$ Secunden, die Zeit einer Umdrehung der Erde um ihre Achse und $a = 6377500$ m der Halbmesser des Erd-Aequators. Die Ausrechnung ergiebt

$$\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 a = 0{,}034 \quad \text{und} \quad g = 9{,}815 \text{ m}$$

III. Die Anziehung $q \sin \varphi$.

Man beachte folgende drei Punkte. Erstens, dass die in E angenommene Masse ω, oder, wie wir auch sagen können, das Massenteilchen E sich an der Grenze oder, wenn man will, auf der Grenze der Dunsthülle befindet; zweitens, dass die Anziehung q (Figur 1) in die beiden Seitenanziehungen $q \cos \varphi$ und $q \sin \varphi$ zerlegt, folglich durch diese beiden Anziehungen ersetzt worden ist; drittens, dass die Seitenkraft $q \cos \varphi$ und die Centrifugalkraft P in

E mit einander im Gleichgewicht stehen, sich also gegenseitig aufheben, so dass das Massenteilchen E sich weder in der Richtung EH (Figur 1) gegen die Erdachse hin, noch in der Richtung EP nach aussen bewegt. Dann erkennt man, dass die Kraft $q \sin \varphi$ übrig geblieben ist und für sich allein, unabhängig von den Kräften $q \cos \varphi$ und P behandelt werden kann. Wir wollen sie K nennen, Figur 2, also

$$q \sin \varphi = K$$

setzen und in die beiden Aeste U in der Richtung des Halbmessers EC und T in der Richtung der Tangente an den Meridian DEB zerlegen. Die Seitenkraft U wird, wie man sieht, durch den Widerstand der Dunsthülle aufgehoben, so dass die Seitenkraft

$$T = K \cos \varphi = q \sin \varphi \cos \varphi$$

vollständig frei geworden ist. Durch die Kraft T wird das Massenteilchen E längs des Bogens EB nach der Aequatorebene CB, also nach B hingeführt.

Die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, ist bemerkenswert und soll zunächst besprochen werden. Sie geht infolge des anhaltenden Einflusses der wenn auch abnehmenden Kraft T in eine beschleunigte über und hört zufolge der Massenträgheit auch dann noch nicht auf, wenn T und $\varphi = 0$ geworden sind.

Zur Beantwortung der Frage, welche Geschwindigkeit das Massenteilchen E bei seiner Ankunft in A erlangt habe, nehme man an, es sei um den Bogen α bis G vorgerückt, und seine Geschwindigkeit in G sei gleich v geworden. In G ist die Kraft

$$T = q \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha)$$

Das Differential der Zeit sei dt, das Differential des Bogens ds und p die Beschleunigung, die durch die Kraft F erzeugt wird. Dann ist

$$dv = p\, dt \quad \text{und} \quad v\, dt = ds \quad \text{also} \quad v\, dv = p\, ds$$

Da wir nun die Beschleunigung der Fallschwere, die durch die Anziehung q in E hervorgerufen wird und die in jedem Punkte des Kreisbogens $DEBF$ die nämliche ist, mit γ bezeichnet haben, so ist $p : \gamma = T : q$ und hieraus nach dem Vorstehenden

$$p = \gamma \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha)$$

Auch ist

$$ds = R\, d\alpha$$

mithin

$$v\, dv = \gamma R \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha)\, d\alpha \quad \text{und}$$

$$v^2 = -\gamma R \sin(\varphi - \alpha)^2 + \text{Const}$$

Da für $\alpha = \theta$ auch $v = 0$ ist, so ist

$$\text{Const} = \gamma R \sin\varphi^2 \quad \text{und}$$
$$v^2 = \gamma R\{\sin\varphi^2 - \sin(\varphi - \alpha)^2\}$$

Hierin ist die Geschwindigkeit gegeben, die ein Massenteilchen erreicht hat, wenn es von einem beliebigen Punkte E aus um einen Bogen α vorgerückt ist. Von Bedeutung ist jedoch nur die in B erlangte Endgeschwindigkeit, die sich ergiebt, wenn $\alpha = \varphi$ geworden ist. Sie ist

$$v = \sqrt{gR} \sin\varphi$$

Im Abschnitt I. ist

$$\gamma = \frac{Ma^2}{R^2} g$$

berechnet worden, so dass man schliesslich für die Endgeschwindigkeit in B den Ausdruck erhält

$$v = a \sin\varphi \sqrt{\frac{gM}{R}}$$

Wenn man in dieser Gleichung $\varphi = 90$ Grad werden lässt und für R den im Abschnitt I. berechneten Wert setzt, so erhält man die Geschwindigkeit, die ein vom Pol der Dunsthülle, also von D herankommendes Massenteilchen an der Aequatorebene in B erlangt gleich

$$V = \sqrt[3]{\frac{2\pi a^2 gM}{n}}$$

In dieser Gleichung ist wieder $a = 6377{,}5$ km der Aequatorial-Halbmesser der Erde; $g = 9{,}815$ m (oder 0,009815 km) die Beschleunigung der Fallschwere im Erdaequator, wogegen M und n die dem fremden Gestirn angehörigen Maasse bezeichnen.

Die Ergebnisse einer hiernach ausgeführten Zahlenberechnung sind für drei vorzugsweise zu berücksichtigende Planeten in nachfolgender Liste zusammengestellt worden.

Gestirn	M Masse im Verhältniss zu der Masse der Erde	n Zeit einer Umdrehung des Gestirns Secunden	R Halbmesser der Oberfläche der Dunsthülle km	V Endgeschwindigk. der Massenteilchen vom Pol an der Aequatorebene km
Erde	1,0	86164	42185	3,1
Saturn	92,0	37757	109868	18,3
Jupiter	308,0	35707	158354	27,9

Die für R und V angegebenen Zahlen müssen befremden. Denn in Beziehung auf die Erde sagen sie zum Beispiel, dass die Höhe ihrer Atmosphäre über ihrer Oberfläche nicht 90 oder 200 bis 300 km, sondern $42185 - 6377{,}5$ = rund 35808 km beträgt. Die Berechnung macht aber, auch wenn das Ergebniss noch so viel Erstauen erregt, Anspruch auf volle Richtigkeit.

IV. Die Venus und unser Mond.

Wollte man die Berechnung auf die Venus anwenden, die sich angeblich in 224,7 Tagen einmal um ihre Achse dreht, oder auf unsern Mond, bei dem auf eine Umdrehung 29,53 Tage vergehen, so erhielte man für die Venus

$$R = 1437870 \text{ km}$$

und für den Mond

$$R = 93707 \text{ km}$$

das heisst, bis auf diese Abstände von ihren Mittelpunkten würden die Atmosphären dieser Gestirne reichen. Dem Mond wird keine Atmosphäre zugeschrieben, die Venus dagegen soll eine Atmosphäre haben, jedoch sie hat entweder keine Atmosphäre oder sie dreht sich rascher um, denn die ausserordentliche Grösse des Maasses, das sich für R herausrechnet, macht das Vorhandensein einer Dunsthülle unwahrscheinlich.

Die Formel für R zeigt deutlich, dass R um so kleiner wird je kleiner n ist, je rascher also das Gestirn sich dreht, und dass, abgesehen von der Masse M, die Gestirne ihre Atmosphäre um so fester zusammenhalten, je rascher sie sich umdrehen. Dies mag auffallend erscheinen, weil die Centrifugalkraft, also die aus einander treibende Kraft mit der Schnelligkeit der Umdrehung wächst, aber die Sache ist nicht anders.

V. Die Entstehung eines Ringes.

Die Massenteilchen E kommen freilich nicht mit der im Abschnitt III. angegebenen Geschwindigkeit an der Aequatorebene in B an. Es treten ihnen vielmehr einige Störungen entgegen, die nicht unbedeutend sind, die sich aber in keine Formeln fassen lassen. Jedes Massenteilchen schlägt zunächst die Richtung der Tangente ET ein, es wird auch beim Hervorquellen aus der Atmosphäre so zu sagen aufgeworfen, nach kurzem Lauf durch die

Anziehung des Gestirns wieder auf die Dunsthülle gestossen und gezwungen, seinen Weg in ähnlichen Sprüngen fortzusetzen wie der Stein, der über eine glatte Wasserfläche geschleudert wird. Bei jedem Sprunge erleidet es einen Aufenthalt. Ein anderer Aufenthalt entsteht dadurch. dass die aus höheren Breiten herkommenden, schon zu grösserer Geschwindigkeit angeregten Massenteilchen die aus niedrigeren Breiten entstammenden und deshalb langsamer hinziehenden Massenteilchen einholen und durch diese verzögert werden. Endlich entsteht noch ein Aufenthalt dadurch, dass die Massenteilchen infolge der Umdrehung des Gestirns sich in Spiralen bewegen, mithin einen grösseren Weg laufen müsssen, als worauf die Berechnung bezogen worden ist.

Nichtsdestoweniger wird die Endgeschwindigkeit an der Aequatorebene in *B* noch bedeutend sein: das Heranströmen der Massenteilchen würde sogar noch stürmisch genannt werden können, wenn die heraneilenden Luftarten nicht fast gewichtlos wären. In dieser Beziehung nimmt in der Tat die Sache ein Aussehen an, dass sich unsere Gedanken nur schwer an das Ergebniss heranwagen, das der Rechenstift herausrechnet. Wendet man nämlich das zwar für solche ausserordentlichen Fälle nicht ersonnene, immerhin aber hier nicht ganz abzulehnende Mariottesche Gesetz in Gemeinschaft mit den Gesetzen der Anziehung an und setzt man die Dichte der Luft an der Oberfläche der Erde gleich Eins, so findet man, dass ihre Dichte im Abstande

$$R - 42185 \text{ km}$$

vom Mittelpunkt der Erde, also an der Grenze *DEBF* unserer Dunsthülle sich in einem Bruche darstellt, dessen Zähler gleich Eins und dessen Nenner eine Million auf die etwa fünfzigste Potenz erhoben ist. Ungezählte Billionen Jahre müssten vergehen, ehe aus der Oberfläche der Dunsthülle, obgleich sie über zwanzig tausend Millionen Quadratkilometer gross ist, soviel Luft an der Aequatorebene *CB* zusammengeströmt wäre, wie einem einzigen Kubikmeter der Luft an der Erdoberfläche entspräche. Dies soll uns jedoch nicht abschrecken, den von uns eingeschlagenen Weg weiter zu verfolgen.

Die Massenteilchen *E*, die an der Oberfläche des nördlichen)Teils der Dunsthülle entspringen, begegnen an der Aequatorebene *CB* den Massenteilchen von der südlichen Halbkugel. Die einen drängen dort auf die andern und alle treten, da die Centrifugalkraft ihnen den Wiedereintritt in die Atmosphäre verwehrt, vor die Atmosphäre.

Solange die Massenteilchen dem von der Linie *FBD* begrenzten, durch die Anziehung des Gestirns zusammengehaltenen Dunstkreise

angehörten, wuchs ihre Tangential-Geschwindigkeit mit ihrem Abstande von der Achse *FD*, weil die Winkelgeschwindigkeit dieselbe blieb und der zu durchlaufende Kreis immer grösser wurde. Sobald hingegen die Teilchen bei *B* aus dem Dunstkreise ausgetreten sind, ist der Anziehungskraft durch die ihr in *B* in gleicher Grösse entgegentretende Centrifugalkraft die Möglichkeit genommen, die Tangential-Geschwindigkeit der Teilchen noch zunehmen zu lassen; sie behalten aber auf Grund der Trägheit einerseits in der Richtung der Planetenbahn um die Sonne die Geschwindigkeit des Planeten, andererseits in der Richtung der Tangente an den Aequator des Dunstkreises die Rotations-Geschwindigkeit, die der Punkt *B* bei der Umdrehung des Planeten um die Achse *FD* besitzt. Sie können aber nicht der Tangente folgen, das heisst, sich nicht in der Richtung der Tangente vom Dunstkreise entfernen, weil sie an diesen fortwährend durch die Anziehung des Gestirns herangezogen werden. Sich wieder in den Dunstkreis einzufügen, gestattet ihnen, wie wir schon gesagt haben, die Centrifugalkraft nicht, durch die sie vielmehr, sobald sie den Dunstkreis berühren, dauernd abgestossen werden. Es bleibt ihnen nichts anderes übrig, als sich bei *B* ausserhalb des Dunstkreises zu lagern.

Derselbe Vorgang, wie er beschrieben wurde, vollzieht sich in allen Punkten des Aequators der Dunsthülle in seinem ganzen Umfange. Zugleich strömen ununterbrochen andere Massenteilchen den zuerst ausgetretenen nach und drängen diese von dem Dunstkreise ab weiter nach *Z* hinaus.

Auf solche Weise entsteht um die Dunsthülle ein Ring oder Wolkenzug *BZ* Figur 3, der wegen der stetig in Wirksamkeit bleibenden Kraft $q \sin \varphi$ in der Richtung parallel zur Planetenachse gemessen nur sehr dünn sein kann und dem in Richtung der Aequatorebene eine grössere Ausdehnung offen steht.

Der Ring des Saturn ist sichtbar, der Ring der Erde nicht Wir sehen ja die Luft nicht, in der wir athmen: um so weniger können wir die Luft von dünnster Dünne sehen, die in weitem Abstande von uns den Ring um die Erde bildet. Aber er entgeht uns nicht; denn das Zodiakallicht ist unzweifelhaft sein Verräter.

Noch einiges andere von allgemeiner Bedeutung möge dem nächsten Abschnitt vorbehalten und der grösseren Anschaulichkeit halber an dem Planeten dargelegt werden, der merkwürdiger Weise in unserem Sonnensystem allein die hier in Behandlung genommenen Eigenschaften deutlich wahrnehmen lässt.

VI. Der Ring des Saturn.

In der nach dem Maassstabe gezeichneten Figur 4 ist der Saturn mit seinem Kranze dargestellt. Die stark punktirte Kreislinie E ist die rechnungsmässige Grenze seiner Atmosphäre, also die Linie $DEBF$ der früheren Figuren. Wie kommt es dann, so lautet sofort die Frage, dass der Ring, der nach den Lehren der vorigen Abschnitte ausserhalb der erwähnten Grenze liegen sollte, in diese hineinragt? Bevor dies erklärt wird, ist noch an das zu erinnern, was man bisher über den Ring beobachtet hat.

Früher schrieb man der Kranzscheibe eine Dicke von etwa 40 Kilometern zu, was mit unseren Ausführungen über die Kraft $q \sin \varphi$ schlecht übereinstimmt, In neueren Zeiten haben die mächtigen Fernrohre, die man jetzt besitzt, Zweifel an den 40 km erweckt und zu der Meinung geführt, dass mehr als ein halbes Kilometer Dicke nicht angenommen werden könne. Die Stärke einer Scheibe zu messen, die dem Einen aus Dunstmassen, dem Andern vielleicht aus Flüssigkeiten und dem Dritten gar aus einem kreisenden Schwarm von staubwolkenartigen Körperchen gebildet zu sein scheint und die mindestens 1190 Millionen Kilometer oder achtmal so weit wie die Sonne von uns entfernt ist, also die Dicke einer Scheibe zu bestimmen, die aus lauter verschiebbaren und in Bewegung befindlichen Teilchen besteht und die aus diesem Grunde schwerlich eine scharf begrenzte Kante hat, das ist viel zu schwierig, als dass die Unsicherheit der bisherigen Angaben auffallend wäre. Für unsere Untersuchungen ist, wie wir sehen werden, die Dicke der Scheibe gleichgültig.

Selbst der grösste Durchmesser der Scheibe, obgleich er als ein grösseres Object schärfer in's Auge gefasst werden kann, wird verschieden gross angegeben, einmal 271000 km, dann von dem amerikanischen, im Jahre 1863 verstorbenen Astronomen G. P. Bond 278230 km und in den neueren Jahren von Barnard 276368 km. Diese Zahl sollte die zuverlässigste sein, denn sie gründet sich auf Beobachtungen, die ihr Urheber im Jahre 1894, als die Sichtbarkeit des Saturn besonders günstig war, mit dem 36 zölligen Refractor der Lickstern warte ausgeführt hat. Der Unterschied der beiden amerikanischen Zahlen beträgt 1862 km und zeigt zur Genüge, dass die Angaben über die Dicke der Scheibe sich rein auf Schätzung beschränken müssen.

Schwer zu bekämpfen ist die herrschend gewordene Ansicht, dass der Kranz des Saturn aus zwei um einanderliegenden Ringen be-

stünde, die durch einen leeren Zwischenraum von einander getrennt wären. Im Anfange unseres Jahrhunderts hat man von dieser Trennung nichts gemerkt; der Astronom Barnard stellt sie auf Grund seiner sorgfältigen Beobachtungen ebenfalls in Frage und will nur etwas gesehen haben, das ihm wie eine schwache dunkle Linie auf dem Ringe erschienen wäre. In unserer Figur ist der Zwischenraum den G. P. Bond 3230 km breit angiebt, durch die Kreise F und G angedeutet werden.

Wenn wir auch mit berühmten Astronomen in Widerspruch geraten, so wollen wir doch von dem vermeintlichen Zwischenraum absehen und zwar sowol weil der Astronom Barnard Glauben verdient, als auch weil das Dasein einer leeren den Kranz in zwei concentrische Ringe spaltenden Schicht durch unsere Entwickelungen widerlegt wird. Der Astronom Bond führt auch noch einen dunkeln, innersten Ring an, der in der Figur durch die Kreislinien C und D eingeschlossen wird und 16155 km Breite haben soll. Zum Kranze des Saturn kann dieser dunkle Ring oder Raum nicht gehören: vielleicht ist es dasselbe, was Barnard einen dunklen Aepuatorialgürtel nennt. Wir bleiben bei dem Ringe stehen, der bisher stets als der eigentliche Ring betrachtet wurde und in der Figur durch die Kreislinien D und H begrenzt worden ist.

Dieser Ring dreht sich anscheinend rückläufig um den Planeten herum. Wir haben im vorigen Abschnitt gesagt, dass und weshalb jedes Massenteilchen E, das aus der Dunsthülle austräte, bei der Umdrehung um die Achse FD die Tangential-Geschwindigkeit bewahrte, die in der Grenzlinie $DEBF$ Figur 3 sich entwickelt hätte, was so gut für den Punkt Z gilt, wie für jeden zwischen Z und B befindlichen Punkt. Da nun der Punkt Z in Beziehung auf die Barnard'schen Angaben um 28316 km weiter vom Mittelpunkt des Saturn entfernt ist als der Punkt B, so muss Z mit der nämlichen Geschwindigkeit auf die Secunde, mit der B den von ihm bei jeder Umdrehung des Planeten mit dem Halbmesser CD beschriebenen Kreis durchläuft, eine um 17800 km grössere Kreislinie durchlaufen, was zur Folge hat, dass bei jeder Umdrehung des Saturn der Punkt Z sich um zwei Stunden und zweiundvierzig Minuten ($2^0\ 42'$) verspätet, oder mit anderen Worten, dass der Punkt Z zu einer Umdrehung um die Achse des Planeten $2^0\ 42'$ mehr verbraucht als der Punkt B, oder der Planet selbst. Ebenso ist es mit dem Punkte zwischen Z und B mit der Maassgabe, dass mit die Verzögerung kleiner wird, je näher der fragliche Punkt bei B liegt. Auf diese Weise entsteht der Eindruck einer rückläufigen Bewegung des Ringes um den Saturn.

Noch haben wir zu erwähnen, dass die Ringscheibe des Saturn streifig aussieht. Als die ersten Massenteilchen E aus der Dunsthülle austraten, bildeten sie einen Ring um den Planeten. Dann folgten andere Teile nach und schoben, da die Wirkung der Kraft $q \sin \varphi$ oder der Kraft $q \sin \varphi \cos \varphi$ (Abschnitt III) ihnen nicht erlaubte, sich neben dem ersten Ringe zu lagern, diesen weiter hinaus und bildeten für sich den zweiten Ring. Darauf folgte ein dritter, ein vierter und so fort immer ein neuer Ring nach dem andern, bis die jetzt bestehende, durch den Kreis H Figur 4 gekennzeichnete Ausdehnung erreicht worden war, deren Zunahme ununterbrochen stattfindet, für uns kurzlebige Menschen aber nicht wahrnehmbar ist. Hiernach hätten wir also zu verstehen gegeben, dass der Ring des Saturn aus lauter concentrischen Ringen bestünde. Man braucht dies jedoch nicht wörtlich zu nehmen, sondern nur auf die soeben ausgesprochene Bemerkung zurückzugehen, dass die an der Aussenseite der Grenze $DEBF$ der Dunsthülle liegenden Teile des Kranzes sich in ganz verschiedenen Zeiten um die Planetenachse drehen, je nachdem ihr Abstand von dieser grösser oder kleiner ist. Danach kann es nicht ausbleiben, dass sich, wenn es nicht schon von vornherein geschehen ist, auch nachträglich concentrische Ringe bilden, denen wir keinen unabänderliehen Bestand zusprechen wollen, das heisst, die wol hin und wieder in einander verschwimmen mögen, die aber dem Kranze des Planeten das erwähnte streifige Aussehen verschaffen müssen. Da der Ring durch die von Norden und von Süden gegen einander wirkenden Kräfte $q \sin \varphi$, durch die Anziehung des Planeten und durch die Centrifugalkraft zusammen gehalten wird, da er also ein geschlossenes Ganze bildet, so gehen die Drehungen der concentrischen Ringe um einander auch auf den innerhalb der Grenzlinie $DEBF$ liegenden Teil des Kranzes oder Ringes über und geben auch diesem ein streifiges Aussehen.

VII. Die Lage des Saturnringes.

Es kommt schliesslich darauf an, die Lage des Saturnrings zu der Grenzlinie $DEBF$ zu bestimmen, also auch nachzuweisen, weshalb sich der Ring, anscheinend im Widerspruch mit den Erklärungen des Abschnittes I, in den Raum erstreckt, der von der Grenzlinie $DEBF$ umschlossen wird. Wesentlich hierbei ist, dass der Ring gemäss dem Schlusssatz des vorigen Abschnitts ein zwar aus losen Teilen bestehendes, aber doch in sich vereinigtes Gebilde darstellt.

Wir schneiden den Keil $KKHH$ Figur 5 aus dem Ringe heraus. Seine Dicke sei gleich eins, seine Breite BB ebenfalls gleich eins.

C ist der Mittelpunkt des Saturn, AA seine Oberfläche, KK die innere und HH die äussere Kante des Saturnringes, BB die im Abschnitt I berechnete Grenzlinie oder die Oberfläche der Dunsthülle vom Halbmesser

$$R = 109\,868 \text{ km}$$

Die Centrifugalkraft, die sich in dem Stück BH entwickelt, vermehrt um die in KB entwickelte Centrifugalkraft muss mit der Anziehung die der Planet auf den ganzen Keil ausübt, im Gleichgewicht stehen. Es soll Alles auf die Linie BB bezogen werden, für welche wir die Beschleunigung der Fallschwere durch γ bezeichnet haben.

𝔄. In dem Stück BH kommt nach dem bisher gesagten durchweg dieselbe Tangential-Geschwindigkeit v vor, die dem der Grenzlinie BB angehörigen Punkt B bei der Umdrehung um die Planetenachse SN zu eigen geworden ist. Da

$$BB = 1$$

ist, so ist

$$hh = \frac{R+y}{R}$$

und das Differential, das zugleich die Masse ausdrücken möge,

$$= \frac{R+y}{R} dy$$

Danach ist die Centrifugalkraft

$$= \frac{R+y}{R} \cdot \frac{v^2}{R+y} dy$$

und dies von 0 bis b integrirt, ergiebt die ganze Centrifugalkraft des Stückes BH gleich $\frac{x^2}{R} b$ oder, weil

$$v = \frac{2\pi R}{n} \text{ ist}, \quad = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 Rb \, (\mathfrak{A})$$

𝔅. In Beziehung auf das Stück KB könnten zweierlei Ansichten geltend gemacht werden, entweder dass in diesem Stück die Tangential-Geschwindigkeit mit dem Abstande vom Mittelpunkte des Planeten gerade so zunimmt, wie in dem übrigen Raume innerhalb der Grenzlinie $DEBF$, oder dass das Stück KB, dessen Teile vorher, solange sie an der Aussenseite von $DEBF$ lagen, die constante Geschwindigkeit v hatten, diese wie im vorigen Abschnitt auch dann noch beibehalten hat, nachdem es durch das Stück BH in den Innenraum von $DEBF$ hineingedrückt worden war. Wahrscheinlich

werden beide Geschwindigkeiten einander beeinflussen und fortwährend mit einander kämpfen, ohne dass eine von beiden für sich allein jemals die Herrschaft zu behaupten vermag.

Die erste Ansicht, wonach die Tangential-Geschwindigkeit veränderlich ist, soll zunächst in Rechnung gezogen werden. Für die Masse *ee* ist der Umdrehungs-Halbmesser

$$= R - d + x$$

die Masse

$$= \frac{R-d+x}{R} dx$$

und die Centrifugalkraft

$$= \frac{R-d+x}{R} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \frac{(R-d+x)^2}{R-d+x} dx = \frac{(R-d+x)^2}{R} \left(\frac{2\pi}{u}\right)^2 dx$$

was von 0 bis d integrirt, die Centrifugalkraft des Stückes KB ergäbe

$$= \frac{1}{3R} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \{R^3 - (R-d)^3\} \quad (\mathfrak{B})$$

Wenn die zweite Ansicht gelten soll, so hat man einfach den unter A gegebenen Ausdruck von 0 bis $d+b$ zu integriren und erhält in diesem Falle die Centrifugalkraft des Stückes KB

$$= \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 R(d+b) \quad (\mathfrak{BB})$$

$\mathfrak{C}$. Die Anziehung des Saturn auf das Massenteilchen $BB = 1$ ist nach dem Früheren $= \gamma$, mithin auf das Massenteilchen *ee* gleich

$$\gamma \frac{R-d+x}{R} \cdot \frac{R^2}{(R-d+x)^2} dx = \gamma \frac{R}{R-d+x} dx$$

was von 0 bis $d+b$ integrirt, die ganze Anziehung, die der Planet auf den Keil HK ausübt, gleich

$$\gamma R \log \frac{R+b}{R-d}$$

ergiebt. Nach Abschnitt I ist aber

$$R = \gamma \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 \quad \text{also} \quad \gamma = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 R$$

mithin die ganze Anziehung auf den Keil gleich

$$\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 R^2 \log \frac{R+b}{R-d} \quad (\mathfrak{C})$$

Es ist also einmal $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und das andere Mal $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ zu setzen. Im ersten Falle erhält man nach gehöriger Auflösung die Gleichung

$$\frac{b+d}{R} = \log \frac{R+b}{R-d} + \frac{d^2}{R^2} - \frac{d^3}{3R^3} \quad (\mathfrak{D})$$

im anderen Falle die Gleichung

$$\frac{b+d}{R} = \log \frac{R+b}{R-d} \quad (\mathfrak{E})$$

Hierin ist für den Saturn $R = 109868$ der im Abschnitt III. angegebene Halbmesser seiner Dunsthülle; $b + d = 47816$ km nach G. P. Bond die ganze Breite KH des Ringes; b und d sind zu berechnen.

Im ersten Falle ergiebt die Zahlenberechnung

$b = 31271$ km und $d = 165544$ km im zweiten Falle

$b = 25636$ km und $d = 22179$ km

Zählt man b zu R hinzu, so erhält man den Halbmesser des äusseren Randes, und wenn man d von R abzieht, so erhält man den Halbmesser des innern Randes der Ringscheibe. Die nachstehende Uebersicht giebt Gelegenheit, die Zahlen der Berechnungen und die Zahlen der astronomischen Beobachtungen unter sich mit einander bequem zu vergleichen.

Streifenbreite			Halbmesser	
Urspung der Zahlen	b km	d km	des äussern Randes km	des innern Randes km
G. P. Bond	29247	18568	**139115**	**91300**
Barnard	28318	19499	**138184**	90369
Berechnung $\mathfrak{D}$	31271	16544	141139	93324
Berechnung $\mathfrak{E}$	25636	22179	135504	87689
Mittel aus $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$	28454	19361	138322	90507

Nur die drei fettgedruckten Zahlen sind von den Astronomen angegeben, und die übrigen Zahlen danach und nach der von G. P. Bond angegebenen Kranzbreite von 48815 km berechnet worden. Die letzte Zeile der vorstehenden Liste enthält auch das Mittel aus

den berechneten Zahlen. Dass dieses Mittel mit den Barnard'schen Messungen nahezu übereinstimmt, soll aber kein Beweis für die Richtigkeit der vorausgegangenen Herleitungen sein; denn wenn diese nicht an und für sich richtig wären, dann könnten ihnen auch keine Zahlen dazu verhelfen. Die Angabe des Durchschnitts erschien im Hinblick auf das, was vorhin unter (𝔅) über die zweierlei verschiedenen Ansichten gesagt wurde, nicht überflüssig, sondern geradezu geboten.

Zu bemerken ist noch, dass der Keil *KKHH* unter der beständigen Geschwindigkeit v dieselbe Centrifugalkraft (𝔅𝔅) auch dann liefern würde, wenn er, zwischen die verlängerten Radien *CH* und *CH* gefasst, dass heisst, von diesen Verlängerungen begrenzt und in der Masse vergrössert, ganz ausserhalb der Grenzlinie *BB* läge, vorausgesetzt, dass seine Höhe sich nicht änderte.

Anmerkung. Nicht unerwähnt soll bleiben, dass die Kraft $q \sin\varphi$ oder die im Abschnitt III. besprochene Kraft $q \sin\varphi \cos\varphi$, in dem Maasse, wie sie an die Oberfläche der Erde kommt, in dem beweglichen Wasser der Meere die Meeresströmungen verursacht und dadurch den Grund zu Ebbe und Flut legt. Der Mond hat dabei die Aufgabe übernommen, durch seine Anziehung, die nicht geläugnet werden soll, die in Bewegung befindlichen Massen einer gewissen Regelung zu unterwerfen.

XI.

Ueber das gleichseitige und das Höhenschnitts-Tetraeder.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Allgemeine Anordnungen.

Die Gleichheit aller 4 Seiten und der Schnitt aller 4 Höhen in einem Punkte sind 2 Eigenschaften, welche 2 specielle Classen von Tetraedern definiren. Die Vereinigung beider Eigenschaften macht das Tetraeder zu einem regelmässigen.

Die Untersuchung vereinfacht sich sehr, indem wir das orthogonale Axensystem so legen, dass die Anzahl der nötigen Bestimmungsstücke die kleinste wird, nämlich 3. Sei eine Seite $P_1P_2P_3$ als beliebiges Dreieck angenommen und Ebene der xy, eine Kante P_1P_2 Axe der x, und P_1 Anfang der xyz, überdies (mit Absehen vom Spiegelbild) z ausschliesslich positiv, also in Coordinaten

$$P_1 \equiv (0,\ 0,\ 0); \quad P_2 \equiv (a,\ 0,\ 0); \quad P_3 \equiv (b,\ c,\ 0)\ ; \quad P_4 \equiv (x_4,\ y_4,\ z_4) \tag{1}$$

Dann zeigt sich, dass die 4te Ecke durch a, b, c beim gleichseitigen Tetraeder eindeutig bestimmt, beim Höhenschnitts-Tetraeder nur von der letzten Höhe abhängig ist.

Das gegebene Dreieck $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}ac$ sei stets bezeichnet durch $\frac{1}{2}\varDelta$.

§ 2. Gleichseitiges Tetraeder.

Alle Punkte P_4, die der Bedingung

$$P_1 P_2 P_4 = P_1 P_2 P_3$$

genügen, liegen offenbar auf einem Cylinder, dessen Axe $P_1 P_2$ ist, und der durch P_3 geht. Dies angewandt auf die 2 übrigen Seiten zeigt, dass P_4 der Schnittpunkt dreier Cylinder ist, dessen Axen $P_2 P_3$, $P_3 P_1$ und $P_1 P_2$ sind, und die bzhw. durch P_1, P_2 und P_3 gehen. Die Gleichungen dieser Cylinder sind bzhw.

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & x_3-x_2 \\ y-y_2 & y_3-y_2 \end{vmatrix}^2 + g_1^2 z^2 = \varDelta^2$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2 + g_2^2 z^2 = \varDelta^2$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}^2 + g_3^2 z^2 = \varDelta^2$$

wo g_1, g_2, g_3 die Kanten $P_2 P_3$, $P_3 P_1$. $P_1 P_2$ bezeichnen. Den Coordinatenwerten zufolge werden sie:

$$\begin{vmatrix} x-a & b-a \\ y & c \end{vmatrix}^2 + \{(a-b)^2+c^2\} z^2 = (ac)^2 \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} x & b \\ y & c \end{vmatrix}^2 + (b^2+c\ )z^2 = (ac)^2 \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} x & a \\ y & 0 \end{vmatrix}^2 + a^2 z^2 = (ac)^2 \tag{4}$$

Die letzte gibt sogleich:

$$y^2 + z^2 = c^2 \tag{5}$$

die Differenz der 2 ersten:

$$a(y-c)\{2cx+(a-2b)y-ac\}+a(a-2b)z^2 = 0 \tag{6}$$

nach Division durch $a(y-c)$ mit Anwendung der vorigen Gleichung:

$$2cx - 2(a-b)c = 0$$

Demnach ist für P_4

$$x_4 = a - b \tag{7}$$

woraus nach Einführung in Gl. (3):

$$\{cy+b(a-b)\}^2 = \{c^2-b(a-b)\}^2$$

Die eine Wurzel ist $y = -c$; ihr entspricht $z = 0$. Das Tetraeder

degenerirt hier in ein Parallelogramm. Die andre, demnach allein gültige Wurzel gibt als Coordinaten der gesuchten Ecke:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= a-b;\quad y_4 = c - 2b\,\frac{d-b}{c} \\ z_4 &= \frac{2}{c}\sqrt{\{b(a-b)[e^2 = b(a-b)]\}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die 3 Factoren unter dem Quadratwurzelzeichen entscheiden über folgende Fälle. Verschwindet einer, so ist $\varDelta$ rechtwinklig, und die Figur fällt wegen $z_4 = 0$ in eine Ebene. Wird einer negativ, so wird $\varDelta$ stumpfwinklig und das Tetraeder imaginär. Mehr als einer können nicht null oder negativ werden. Sind alle Factoren positiv, so ist $\varDelta$ spitzwinklig, das Tetraeder reell. Es resultirt demnach:

L e h r s a t z 1. Alle Seiten jedes gleichseitigen Tetraeders sind spitzwinklig.

L e h r s a t z 2. Auf jedem spitzwinkligen Dreieck als Seite lässt sich ein und nur ein gleichseitiges Tetraeder errichten.

Bemerkung. Eine Figurbetrachtung zeigt unmittelbar, dass 3 Parallelogramme nebst Diagonalen die Bedingung gleichseitiger Tetraeder mit $\varDelta$ als Basis erfüllen, nämlich diejenigen, welche einzeln die 3 Seiten von $\varDelta$ zur Diagonale haben. Nun ergibt die Elimination von z und x zwischen den Gl. (1) (2) (3) direct eine Gleichung 4. Grades für y, welche dann durch Division auf ersten Grad herabsinkt. So verdankt die alleingültige Lösung (7) ihre Eindeutigkeit den 3 genannten zu verwerfenden Lösungen.

§ 3. Schwerpunkt des homogenen gleichseitigen Tetraeders.

Sind L, M und N die Schwerpunkte von P_1P_2, $P_1P_2P_3$ und dem Tetraeder, und u_2, u_3, u_4, t, v, w die Projectionen der Strecken P_1P_2. P_1P_3, P_1P_4, P_1L, $P_1M_1\,P_1N$ auf einen von P_1 ausgehenden Strahl, so ist

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{2}u_2;\quad v = t + \tfrac{1}{3}(u_3 - t) = \tfrac{1}{3}(u_2 + u_3) \\ w &= v + \tfrac{1}{4}(u_4 - v) = \tfrac{1}{4}(u_2 + u_3 + u_4) \end{aligned} \tag{8}$$

Geht dann der Strahl in die Axen der x, y, z über, und man setzt für die u die Coordinatenwerte (1), so kommt bzhw.:

$$t = \tfrac{1}{2}a; \quad v = \tfrac{1}{3}(a+b); \quad w = \tfrac{1}{2}a$$

$$t = 0; \quad v = \tfrac{1}{3}c; \quad w = \tfrac{1}{2}\left(c - b\,\frac{a-b}{c}\right)$$

$$t = 0; \quad v = 0; \quad w = \frac{1}{2c}\sqrt{\{b(a-b)[c^2 - b(a-b)]\}}$$

Demnach sind die Coordinaten des Schwerpunkts:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}a; \quad y_0 = \tfrac{1}{2}\left(c - b\,\frac{a-b}{c}\right)$$

$$z_0 = \frac{1}{2c}\sqrt{\{b(a-b)[c^2 - b(a-b)]\}}$$

Die erste dieser Gleichungen, auf alle 6 Kanten angewandt, zeigt, dass die normal halbirenden Ebenen derselben sich im Schwerpunkt schneiden. Dieser Schnittpunkt aber ist der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel. Es folgt:

Lehrsatz 3. Der Schwerpunkt des homogenen gleichseitigen Tetraeders ist zugleich der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel.

Bemerkung. Das Vorstehende hat eine gemeinsame Eigenschaft des gleichseitigen Tetraeders und des gleichseitigen Dreiecks ergeben. Man könnte die Frage untersuchen, ob die analogen Gebilde von beliebig vielen Dimensionen sie besitzen.

§ 4. Höhenschnitts-Tetraeder.

Sei N eine Normale auf der Dreiecksebene Δ und M ein variabler Punkt, der sie durchläuft. Dann beschreibt die Gerade P_2M eine Ebene Q. Normal zu jedem P_2M gehe eine Ebene E durch P_1. Die Schnitte aller E sind offenbar einander parallel, weil normal zu Q. Geht also einer durch P_3, so gehen alle durch P_1 und P_3. Hiermit erfüllen alle E die Bedingung der Ebene einer zweiten Tetraederseite gegenüber P_2, deren Höhenlot von P_2 durch M geht. Nun ist die Ebene Δ eine der Ebenen Q, entsprechend dem Fusspunkt von N; auch hier ist P_2M normal zu P_1P_3. Angewandt auf alle 3 Seiten ergibt sich:

Lehrsatz 4. Schneiden sich die Höhen eines Tetraeders in einem Punkte, so liegt der Fusspunkt einer jeden im Höhenschnitt des entsprechenden Seitendreiecks.

Damit auch der umgekehrte Satz gilt, ist noch die Bedingung zu erfüllen, dass die 3 analogen Ebenen E sich auf N schneiden.

Der Höhenschnitt des Dreiecks Δ hat die Coordinaten:

$$x = b; \quad y = b\frac{a-b}{c}; \quad z = 0$$

daher der Höhenschnitt des Tetraeders:

$$x = b; \quad y = b\frac{a-b}{c}; \quad z = h \tag{9}$$

wo h eine unbekannte Strecke bezeichnet. Daraus lassen sich die Gleichungen der übrigen Höhen (als Verbindungen des Punktes (9) mit P_1, P_2, P_3) und hieraus wieder die der zu ihnen normalen Tetraederseiten berechnen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} b(x-a) + b\frac{a-b}{c}y + hz &= 0 \\ (b-a)x + b\frac{a-b}{c}y + hz &= 0 \\ \left(b\frac{a-b}{c} - c\right)y + hz &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Als deren Durchschnitt ergibt sich der Punkt P_4 mit den Coordinaten

$$x_4 = b; \quad y_4 = b\frac{a-b}{c}; \quad z_4 = b\frac{a-b}{ch}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right) \tag{11}$$

Die letzte Bedingung ist also von selbst, und sogar für willkürliches h erfüllt. Es hat sich ergeben:

Lehrsatz 5. Auf jedem Dreieck als Seite lassen sich Höhenschnitts-Tetraeder errichten.

Lehrsatz 6. Ein Höhenschnitts-Tetraeder behält diese seine Eigenschaft, wenn die Höhe über einer unveränderten Seite longitudinal variirt.

Lehrsatz 7. Der Normalabstand des Höhenschnitts von einer Tetraederseite variirt, wenn diese unverändert bleibt, der Höhe umgekehrt proportional.

§ 5. Gleichseitiges Höhenschnitts-Tetraeder.

Soll ein Tetraeder beide, in § 2. und § 4. genannten Eigenschaften haben, so müssen (bei identificirten Grundflächen Δ) die

Werte (10) und (11) gleich sein. Die Werte von x_4 und y_4 ergeben sofort:

$$a = 2b; \quad c^2 = 3b^2$$

Dies genügt schon, das Grunddreieck zu einem gleichseitigen zu machen, und nach Gl (11) zeigt der Wert

$$z_4 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}a$$

dass das Tetraeder regelmässig ist. Gl. (11) bestätigt dies nur durch dessen Mittelpunkt:

$$h = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,a$$

Lehrsatz 8. Ein gleichseitiges Höhenschnitts-Tetraeder ist stets regelmässig.

§ 6. Schwerpunkt und Mittelpunkt der umschriebenen Kugel für das Höhenschnitts-Tetraeder.

Nach der Formel

$$w = \tfrac{1}{4}(u_2 + u_3 + u_4) \tag{3}$$

sind die Coordinaten des Schwerpunkts:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{1}{4}(a + 2b) \\ y_0 &= \tfrac{1}{4}\left(c + b\frac{a-b}{c}\right) \\ z_0 &= b\frac{a-b}{4ch}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel wird bestimmt als der Schnittpunkt der Ebenen, welche 3 Kanten normal halbiren. Wir wählen die Kanten P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4. Die Gleichungen der Ebenen sind:

$$\begin{aligned} &a\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0 \\ &b\left(x - \frac{b}{2}\right) + c\left(y - \frac{c}{2}\right) = 0 \\ &x - \frac{b}{2} + \frac{a-b}{c}\left(y - b\frac{a-b}{2c}\right) \\ &\qquad + \frac{a-b}{ch}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right)\left\{z - b\frac{a-b}{2ch}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right)\right\} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

woraus als Coordinaten des Mittelpunkts der umschriebenen Kugel:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a \\ y &= \tfrac{1}{2}\left(c - b\,\frac{a-b}{c}\right) \\ z &= b\,\frac{a-b}{2c^2}\,\frac{c^2 - b(a-b)}{h} - h \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Soll dieser mit dem Schwerpunkt zusammenfallen, so müssen die Werte von x, y, z gleich x_0, y_0, z_0 sein, demnach zuerst

$$a = 2b; \quad c = \sqrt{3}\,b$$

also das Grunddreieck gleichseitig, und das zugehörige Höhenlot muss auf dessen Mittelpunkt stehen.

Führt man die gefundenen Werte für a, c, x, y in Gl. (12) (13) ein, so kommt:

$$z = \frac{b^2}{3h} - h; \quad z_0 = \frac{b^2}{6h}$$

also gemäss $z = z_0$:

$$h = \frac{b^2}{\sqrt{6}}$$

Dies ergibt nach Gl. (14):

$$z_4 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,a$$

was einem regelmässigen Tetraeder entspricht.

Lehrsatz 9. Ein Höhenschnitts-Tetraeder, dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt der umschriebenen Kugel zusammenfällt, ist regelmässig.

§ 7. Fernere Eigenschaften des gleichseitigen Tetraeders.

Seien die Kanten P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4 bezeichnet durch g_{14}, g_{24}, g_{34}. Dann ist

$$g_{14}^2 = x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = x_4^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2 = g_1^2$$

(s. Gl. (5) (7)), also analog auch

$$g_{14} = g_1; \quad g_{24} = g_2; \quad g_{34} = g_3$$

Demnach hat jede Seite des Tetraeders ausser einer gemeinsamen 2 gleiche Kanten mit Δ. Es ergibt sich:

Lehrsatz 10. Die Gegenkanten eines gleichseitigen Tetraeders sind einander gleich.

Lehrsatz 11. Sind alle Seiten eines Tetraeders einander gleich, so sind sie auch einander congruent.

Infolge des Lehrs. 10. stellt sich die Spitze P_4 des gleichseitigen Tetraeders als Schnitt dreier Kugeln dar:

$$\begin{aligned} & x_4^2 + y_4^3 + z_4^2 = g_1^2 \\ & (x_4 - a)^2 + y_4^2 + z_4^3 - g_2^2 \\ & (x_4 - b)^2 + (y_4 - c)^2 + z_4^2 - g_3^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Durch Subtraction je zweier ihrer Gleichungen ergeben sich zwei lineare Gleichungen für x_4 und y_4. Aus Gl. (5) folgt dann der Wert von z_4, sämtliche Coordinaten in Uebereinstimmung mit § 2., einfacher hergeleitet, aber erst vermöge der Gleichheit der Gegenkanten.

§ 8. Mittelpunkt und Radius der eingeschriebenen Kugel eines gleichseitigen Tetraeders.

Ist $K \equiv (x_0 y_0 z_0)$ der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel, so hat dieser gleichen Normalabstand r von allen 4 Seiten. Zunächst ist also

$$z_0 = r$$

Legt man nun 6 Ebenen durch K und einzeln durch alle Kanten, so wird das Tetraeder in 4 congruente Tetraeder $= 3 \Delta r$ geteilt.

Das Tetraeder auf der Seite $P_2 P_3 P_4$ ist, wenn man sich in Betreff des Vorzeichens durch das regelmässige Tetraeder leiten lässt:

$$\Delta_1 r = - \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_4 - x_2 & x_0 - x_2 \\ y_3 - y_2 & y_5 - y_2 & y_0 - y_2 \\ z_3 - z_2 & z_4 - z_2 & z_0 - z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b - a & x_4 - a & x_0 - a \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} b & x_4 & x_0 \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_3 & z_0 \end{vmatrix}$$

Das Tetraeder über $P_1 P_3 P_4$:

$$\Delta_2 r = \begin{vmatrix} b & x_4 & x_0 \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} = b(y_4 z_0 - z_4 y_0) + c(z_4 x_0 - x_4 z_0)$$

das Tetraeder über $P_1 P_2 P_4$:

$$\Delta_3 r = \begin{vmatrix} a & x_4 & x_0 \\ 0 & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} = - a(y_4 z_0 - z_4 y_0)$$

ausserdem ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} = y_4 z_0 - z_4 y_0 + c(z_4 - z_0)$$

woraus nach Addition, sofern $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta$:

$$3\Delta r = ac(z_4 - z_0) = \Delta(z_4 - r)$$

folglich

$$r = \tfrac{1}{4} z_4$$

Dieselben Gleichungen ergeben auch:

$$(a+b)\Delta r = ac(z_4 x_0 - x_4 z_0) \quad \text{d. i.}$$

$$a + b = 4x_0 - (a - b) \quad \text{oder:}$$

$$x_0 = \tfrac{1}{2} a$$

ferner

$$\frac{\Delta r}{a} = z_4 y_a - y_4 z_0 = (4y_0 - y_4) r$$

$$4y_0 = c + y_4 = 2c - 2b\frac{a-b}{c}$$

$$y_0 = \tfrac{1}{2}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right)$$

Da die x_0, y_0, z_0 mit den Coordinaten des Schwerpunkts übereinstimmen, so hat man in Ergänzung von Lehrsatz 3:

Lehrsatz 12. Der Schwerpunkt des gleichseitigen Tetraeders fällt zusammen mit den Mittelpunkten der um- und eingeschriebenen Kugel.

§ 9. Mittelpunkt und Radius der eingeschriebenen Kugel des Höhenschnitts-Tetraeders.

Setzt man den doppelten Umfang eines beliebigen Tetraeders

$$\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \varDelta = U$$

so ist das sechsfache Tetraeder

$$Ur = \varDelta z_4 = acz_4$$

Die Bezeichnung von § 8. sei beibehalten und nur die Gleichheit der Seiten in Wegfall gebracht. Dann führt die gleiche Rechnung wie in § 8. zu folgenden Ergebnissen:

$$z_0 = r = \frac{\varDelta z_4}{U}$$

$$x_0 = \frac{a\varDelta_2 + b\varDelta_3 + x_4\varDelta}{U}; \quad y_0 = \frac{\varDelta_3 + ay_4}{U}c$$

Um aus diesen für beliebiges Tetraeder geltenden Formeln die dem Höhenschnitts-Tetraeder entsprechenden zu erhalten, sind nur die in § 6. angegebenen Werte

$$x_4 = b; \quad y_4 = b\frac{a-b}{c}; \quad z_4 = b\frac{a-b}{c^2}\frac{c^2 - b(a-b)}{h}$$

und die Seiteninhalte einzusetzen. Letztere findet man in bekannter Weise aus ihren Projectionen auf die Coordinatenebenen; es ergibt sich:

$$\varDelta_1 = (a-b)\frac{c^2 - b(a-b)}{c}\sqrt{1 + b^2\frac{c^2 + (a-b)^2}{c^2h^2}}$$

$$\varDelta_2 = b\frac{c^2 - b(a-b)}{e}\sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2}{c^2}\left(\frac{a-b}{h}\right)^2}$$

$$\varDelta_3 = ab\frac{a-b}{c}\sqrt{1 + \frac{1}{h^4}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right)^2}$$

§ 10. Lage der genannten Centra des Höhenschnitts-Tetraeders.

Die Coordinaten der 3 ersten Centra sind, um sie zum Vergleich zusammenzustellen:

Höhenschnitt K:

$$X = b; \quad Y = b\frac{a-b}{c}; \quad Z = h$$

Schwerpunkt K':

$$X' = \frac{a+2b}{4}; \quad Y' = \frac{c^2+b(a-b)}{4c}; \quad Z' = b\frac{a-b}{4ch}\left(s - b\frac{a-b}{c}\right)$$

Mittelpunkt der umschriebenen Kugel K'':

$$X'' = \frac{a}{2}; \quad Y'' = \frac{c^2-b(a-b)}{2c}; \quad Z'' = b\frac{a-b}{2ch}\left(c - b\frac{a-b}{c}\right) - h$$

demnach zu relativer Bestimmung:

$$X' - X = \alpha; \quad Y' - Y = \beta; \quad Z' - Z = \gamma$$
$$X'' - X = 2\alpha; \quad Y'' - Y = 2\beta; \quad Z'' - Z = 2\gamma$$

wo

$$\alpha = \frac{a-2b}{4}; \quad \beta = \frac{c^2-3b(a-b)}{4c}; \quad \gamma = b\frac{a-b}{4h}\,\frac{c^2-b(a-b)}{c^2} - h$$

Die genannten 3 Centra liegen also, gleichwie Höhenschnitt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks, auf einer geraden Linie, in gleicher Reihenfolge, aber in succedirenden Abständen, die beim Dreieck sich verhalten wie 2 : 1, beim Tetraeder wie 1 : 1. Setzt man

$$\varkappa^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

so dass beim Tetraeder die Richtungscosinus jener geraden Linie $\frac{\alpha}{\varkappa}, \frac{\beta}{\varkappa}, \frac{\gamma}{\varkappa}$, beim Dreieck $\frac{\alpha}{\varkappa}, \frac{\beta}{\varkappa}$ werden, so ist beim Tetraeder $KK' = \varkappa$ $KK'' = 2\varkappa$; $K'K'' = \varkappa$ beim Dreieck $KK' = \varkappa$; $KK'' = \frac{3}{2}\varkappa$, $K'K'' = \frac{1}{2}\varkappa$.

Die Ausdrücke für Inkugel- und Inkreismittelpunkt des Tetraeders und Dreiecks zeigen zunächst die Aehnlichkeit, dass sie den Umfang zum Nenner und einen aus den Seiten ähnlich gebildeten Zähler haben; eine instructive geometrische Beziehung kann vielleicht noch entdeckt werden.

§ 11. Zur Determination.

Der Umfang beider in Rede stehenden Specialclassen vom Tetraeder ist von den vorstehenden Sätzen vollständig enthalten. In Betreff der gleichseitigen Tetraeder liegt die Determination unmittelbar zutage. Es gibt genau ebensoviele verschiedene (d. h. weder congruente noch symmetrische) gleichseitige Tetraeder, als es verschiedene spitzwinklige Dreiecke gibt.

Auch das Gebiet der Höhenschnitts-Tetraeder ist durch die Bestimmung der Spitze P_4 bezüglich auf eine Grundseite schon absolut begrenzt. Zwar lässt sich die Variation des Parameters h auf 4 Parameter bezüglich auf alle 4 Seiten anwenden. Da aber die Variabilität von h bedingt ist durch Unveränderlichkeit des Grunddreiecks, so können nie mehr als ein Parameter zugleich variiren. Hat man nun das Gebiet nur mit Berücksichtigung eines Grunddreiecks begrenzt, so umfasst letzteres schon alle möglichen Dreiecke, mithin kann die Wahl eines der 3 übrigen Seiten zum Grunddreieck keinen neuen Fall ergeben. Die Determination lautet:

Es gibt soviele verschiedene Höhenschnitts-Tetraeder, als es verschiedene Dreiecke (als Grundflächen) und verschiedene Strecken (als Höhen) gibt.

§ 12. Gleichseitiges Tetraeder eingeschrieben in ein Parallelepipedon.

Je 2 Gerade im Raume bestimmen 2 parallele Ebenen, auf denen sie liegen. Um z. B. aus den Gleichungen der 2 Gegenkanten P_1P_2 und P_3P_9, nämlich

$$y=0;\quad z=0 \quad \text{und} \quad \frac{x-b}{x_4-b}=\frac{y-c}{y_4-c}=\frac{z}{z_4}$$

diese Ebenen zu erhalten, braucht man nur mit der letzteren durch P_1 die Parallele

$$\frac{x}{x_4-b}=\frac{y}{y_4-c}=\frac{z}{z_4}$$

zu ziehen; denn diese bildet mit der erstern die Winkelebene.

$$z_4y+(c-y_4)z=0$$

mit der dann die andre Ebene

$$z_4(y-c)+(c-y_4)z=0$$

nur parallel durch P_3 zu nehmen ist. Erstere sei Ebene der neuen Coordinaten XY (d. i. $Z=0$). Sie geht aus der xy Ebene durch Drehung um die Kante P_1P_2 hervor, so dass die Coordinatenrelationen die Form haben müssen:

$$x=X;\quad y=Y\cos\vartheta-Z\sin\vartheta;\quad z=Y\sin\vartheta+Z\cos\vartheta$$

und zwar bestimmt sich der Drehungswinkel ϑ am einfachsten aus den Bedingungen $Z = 0$, $Z_3 = Z_4$, woraus sogleich mit Beachtung von Gl. (5) folgt:

$$y_4 = -c\cos 2\vartheta, \quad z_4 = -c\sin 2\vartheta$$

also

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{c-y_4}{2c}}; \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{c+y_4}{2c}}$$

Verfährt man ebenso mit allen 3 Gegenkantenpaaren, so entstehen 3 Paare paralleler Ebenen, die ein Parallelepipedon begrenzen, in welches das Tetraeder in dem Sinne eingeschrieben ist, dass seine 6 Kanten Diagonalen der 6 Seiten desselben bilden. Seine 4 Ecken fallen in 4 der 8 Ecken des Parallelepipedons, während die 4 übrigen, unberührt vom Tetraeder, Ecken eines zweiten Tetraeders sind, das zum ersten in reciproker Beziehung gegenseitiger Bestimmung steht.

Die 3 Höhenlote des Parallelepipedons werden unmittelbar im Tetraeder dargestellt als Normalverbindungen der Gegenkanten. Aus den Gleichungen der Gegenkanten P_1P_2 und P_3P_4 ergeben sich zunächst deren Normalebenen

$$(x_2-x_1)(x-A)+(y_2-y_1)(y-B)+(z_2-z_1)(z-C) = 0 \tag{16}$$

$$(x_4-x_3)(x'-A')+(y_4-y_3)(y'-B')+(z_4-z_3)(z'-C') = 0 \tag{17}$$

bzhw. für die Fusspunkte (ABC) und $(A'B'C')$. Jeder dieser 2 Punkte muss aber auf beiden Normalebenen liegen; demgemäss muss

$$(x_2-x_1)(A'-A)+\ldots = 0 \tag{18}$$

$$(x_4-x_3)(A'-A)+\ldots = 0 \tag{19}$$

und, damit jeder auf zugehöriger Kante liegt,

$$A = x_1+\mu(x_2-x_1); \quad B = y_1+\mu(y_2-y_1);\ \ldots \tag{20}$$

$$A' = x_3+\mu'(x_4-x_3); \quad B' = y_3+\mu'(y_4-y_3),\ \ldots \tag{21}$$

sein. Diese Werte in Gl. (18) (19) eingesetzt gibt 2 lineare Gleichungen zur Bestimmung von μ und μ' und nach Gl. (20) (21) von A, B, C, A', B', C'. Sind letztere festgesetzt, so liegen die Punkte (xyz) und $(x'y'z')$, welche die Gl. (16) (17) befriedigen, auf der

Schnittlinie der 2 Normalebenen, ausgedrückt durch Verbindung beider Gleichungen. Der Normalabstand ist dann

$$= \sqrt{\{(A' - A)^2 + (B' - B)^2 + (C' - C)^2\}}$$

Auch wird derselbe als Höhe des Parallelepipedons dargestellt durch

$$Z_4 = c \sin \vartheta = \sqrt{c \frac{c + y_4}{2}}$$

Die vorstehenden Formeln sind nur für 1 Höhenlot ausgeschrieben, zur Anwendung auf die 2 übrigen bedarf es nur der Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4.

XII.

Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks; als besonderen Fall die Steiner'sche Curve des Dreiecks.

Von

Dr. **Bücking,**

Oberlehrer in Metz.

Einleitung.

Nach dem bekannten dualistischen Gesetz müssen den involutorischen Punktsystemen der Ebene, in denen die Punkte sich paarweise entsprechen, Strahlensysteme gegenüberstehen, in welchen die Geraden involutorisch zugeordnet sind. Zu diesen gehört das System der Seitensymmetriegeraden; ich nenne 2 Geraden Symmetriegeraden, wenn sie die Seiten eines △ in gleich weit von den Seitenmitten entfernten Punkten schneiden. Legt man bei den Punktsystemen die speciellen Punktcoordinaten $(x_1 x_2 x_3)$ zu Grunde, bei welchen die Abstände selbst, nicht bestimmte Vielfache derselben als Coordinaten angesehen werden, so sind $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ die Coord. des Winkelgegenpunkts von $(x_1 x_2 x_3)$. Wählt man bei den Liniensystemen als Liniencoordinaten $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ die Abstände der Geraden von den Ecken des Grunddreiecks, so sind $\xi_{i=1,2,3}$ und $\frac{1}{\xi_i}$ die Coordinaten zweier Seitensymmetriegeraden. In diesem Sinne stehen die Seitensymmetriegeraden den Winkelgegenpunkten zur Seite.

Die Geometrie des Dreiecks entfaltet ihren grössten Reiz in den besonderen Fällen; unter den Kegelschnitten z. B., welche durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks gehen, hat gewiss der Kreis

von Feuerbach die meisten und merkwürdigsten Eigenschaften. Alle sogenannten merkwürdigen Punkte sind um so wichtiger für das Dreieck, je elementarer ihr Zusammenhang mit ihm ist, z. B. können sich die Brocard'schen Punkte nicht mit dem Schwerpunkte messen. Bei Untersuchungen über das Dreieck wird man also stets gezwungen sein, die Einzelfälle der allgemeinen Sätze auszubeuten. Es wurde nicht immer die analytische Methode angewandt, da sie in trimetrischen Coordinaten ungeeignet zur Untersuchung von Winkeln und Massverhältnissen ist. Die analytischen Teile enthalten einen interessanten Stoff für projectivische Coordinaten; der englische Mathematiker Green schreibt: the question (die von den normalen Symmetriegeraden umhüllte Steiner'sche Curve) was proposed to me some time ago in conversation by Dr. Hirst as one of some difficulty and apt for the exercise of the method of trilinear coordinates. (The geometry of the triangle. u. s. w., 1865).

Es bedeutet H den Höhenschnittpunkt, M den Mittelpunkt des umgeschriebenen, O des eingeschriebenen Kreises, S den Schwerpunkt, $D_1 D_2 D_3$ die Mittelpunkte der Seiten des Grunddreiecks $A_1 A_1 A_3$; ferner C^2 einen Kegelschnitt, Γ^2 einen Strahlenbüschel zweiter Classe, also die Tangentenschaar eines Kegelschnitts, C^n eine Curve $n$ter Ordnung, Γ^n einen Strahlenbüschel $n$ter Classe; Ssg sei die Abkürzung für Seitensymmetriegerade, Fpl für Fusspunktlinie Wgp für Winkelgegenpunkt, Sgp. für Seitengegenpunkt.

1. Seitengegenpunkte.

Die Punkte P und P_1 sind Seitengegenpunkte im Dreieck $A_1 A_2 A_3$, wenn ihre Verbindungsgeraden mit den Ecken die Gegenseiten des Dreiecks in gleichweit von den Mittelpunkten der Seiten entfernten Punkten schneiden. (s. Fig. 1.)

Wenn die barycentrischen Coordinaten vom Punkte P (d. h. Grössen, welche den Flächen PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2 proportional sind) = p_1, p_2, p_3 sind, so sind diejenigen von

$$P_1 = \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}$$

die Coordinaten beider Punkte sind reciproke Werte. Es ist nützlich, die barycentrischen Coordinaten als Punktcoordinaten für die folgenden Untersuchungen zu verwenden.

Durchläuft P die Gerade a, deren Gleichung (in b. C.) ist

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

so erhält man den Ort seines Seitengegenpunktes, indem man die x_i mit $\frac{1}{x_i}$ vertauscht, also

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} = 0 \quad \text{oder}$$

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

d. h. einen durch A_1, A_2, A_3 gehenden Kegelschnitt.

Im allgemeinen entspricht einer C^n eine C^{2n}; die Verwandtschaft beider Systeme ist eine quadratisch involutorische. (s. A. Müller-Kempten, Untersuchungen über die merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks 1889; F. Bücking, die Winkelgegenpunkte des Dreiecks, Progr. 1892. Nr. 522. S. 2).

Aehnlich gestalten sich die Formeln für die Liniencoordinaten. Der Punkt P mit den barycentrischen Coordinaten p_1, p_2, p_3 hat die Gleichung

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

worin die ξ_i die Abstände jeder beliebigen durch P gehenden Geraden von den Ecken des Dreiecks bedeuten. Der Seitengegenpunkt von P hat die Gleichung

$$\frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} + \frac{\xi_3}{p_3} = 0$$

Die Coefficienten dieser Gleichungen sind also den Punktcoordinaten der durch die Gleichungen dargestellten Punkte proportional.

Jedem Punkte der Ebene entspricht ein bestimmter Punkt als Seitengegenpunkt, mit Ausnahme der Ecken des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, z. B. ist A_1 als Gegenpunkt eines jeden auf $A_2 A_3$ liegenden Punktes zu betrachten. Sich selbst entsprechende Punkte sind der Schwerpunkt S und die Schnittpunkte der Parallelen durch A_1, A_2 und A_3 zu den Seiten des Dreiecks.

2. Seitensymmetriegeraden.

Man erhält die Ssg. p_1 einer beliebigen p, indem man auf den Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ die zu den Schnittpunkten mit p in Bezug auf die Seitenmitten symmetrisch gelegenen Punkte aufsucht (Fig. 1.) Die Gleichungen von p und p_1 sind

$$1) \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0$$

also in Liniencoordinaten

$$2) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = p_1 : p_2 : p_3$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}$$

Eine Gerade fällt mit ihrer Ssg zusammen, wenn

$$p_1 = \pm p_3 = \pm p_1$$

ist. Dies giebt die 4 Geraden

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - e_3 = 0$$

Diese als Ssg sich selbst entsprechenden sind die ∞ ferne Geraden der Ebene und die Seiten des Dreiecks $D_1 D_3 D_3$ (s. Einleitg.).

Im System der Ssg entspricht also jeder Geraden eine bestimmte andere, mit Ausnahme der Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, von welchen jede ∞ viele entsprechende Geraden hat, nämlich alle durch den Gegenpunkt des Dreiecks gehende.

Wir wollen nun das Gebilde betrachten, das eine Gerade g durchläuft, wenn ihre Seitensymmetriegerade sich um einen Punkt dreht. Der Punkt sei P und seine Gleichung

$$3) \qquad p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

Dann müssen die Coord. von g nach 2) notwendig die Gleichung erfüllen

$$4) \qquad \frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0, \text{ oder}$$

$$p_1 \xi_2 \xi_3 + p_1 \xi_3 \xi_1 + p_3 \xi_1 \xi_2 = 0$$

Dies ist ein Strahlenbüschel zweiter Classe, zu welchem auch die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ gehören. Wir wollen es kurz bezeichnen mit $\Gamma(\pi)$ oder auch, indem wir den umhüllten Kegelschnitt in's Auge fassen, den Kegelschnitt π. Den Punkt P und die $\Gamma(\pi)$

wollen wir als „zusammen gehörend“ oder „entsprechend“ bezeichnen. (s. Fig. 2.)

Die Berührungspunkte von π mit den Seiten des Dreiecks findet man, indem man schreibt

$$p_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_1 (p_2 \xi_3 + p_3 \xi_2) = 0$$

und den Coefficienten von ξ_1, also

$$p_2 \xi_3 + p_3 \xi_2 = 0$$

setzt. Die Berührungspunkte sind dann

$$\frac{\xi_2}{p_2} + \frac{\xi_3}{p_3} = 0, \qquad \frac{\xi_3}{p_3} + \frac{\xi_1}{p_1} = 0. \qquad \frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} = 0$$

Wir nennen sie B_1, B_2, B_3. A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 schneiden sich dann im Punkte

$$\frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} + \frac{\xi_3}{p_3} = 0$$

er ist der Seitengegenpunkt P_1 von P. Wir nennen ihn den Nagelschen Punkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf π oder kurz den N. P. von π, indem wir einen Namen, der in gleicher Bedeutung für den eingeschriebenen Kreis bereits gebraucht wird, verallgemeinern.

Wenn eine Gerade ein Strahlenbüschel $n$ter Classe Γ^n durchläuft, so werden die Ssg. im allg. ein Γ^{2n} bilden. Denn ist die Gleichung der Γ^n

$$f_n(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

so erhält man als entsprechende nach Gl. 2)

$$f_n\left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3}\right) = 0$$

welche nach Multiplication mit $(\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n)$ vom $2n$ten oder geringeren Grade ist, z. B. bilden die Ssg. die Tangenten eines dem Dreieck $A_1A_2A_3$ des Kegelschnitts $\Sigma \frac{a_i}{x_i} = 0$ des Strahlenbüschels

$$\frac{a_1^2}{\xi_1^2} + \frac{a_2^2}{\xi_2^2} + \frac{a_3^2}{\xi_3^2} - \left[\frac{a_1 a_2}{\xi_1 \xi_2} + \frac{a_2 a_3}{\xi_2 \xi_3} + \frac{a_3 a_1}{\xi_3 \xi_1}\right] = 0$$

Jedem Punkte P entspricht, wie wir sahen, eine $\Gamma(\pi)$. Diese

kann auch in 2 Strahlenbüschel ausarten. Setzt man in Gl. 4) $p_1=0$, so ist die $\Gamma(\pi)$ das einfache Strahlenbüschel

$$p_2\xi_3+p_3\xi_2=0$$

dessen Mittelpunkt auf A_2A_3 liegt; hierzu kommt das Strahlenbüschel $\xi_1=0$ oder A_1. Jedem Punkt einer Seite des Dreiecks $A_1A_2A_3$ entspricht also ein Punkt derselben Seite; die sich entsprechenden Punkte liegen von der Seitenmitte gleichweit entfernt. Sie fallen zusammen in den Seitenmittenpunkten D_1, D_2 oder D_3 und in den ∞ fernen Punkten der Seiten des Dreiecks d. h. jedem Strahl eines dieser 6 Strahlenbüschel entspricht ein Strahl desselben Büschels, wie dies geometrisch sofort einleuchtend ist. Die Zuordnung in einem solchen ist eine involutorische und die Ordnungsstrahlen sind 2 sich selbst als Ssg. entsprechende Strahlen. Parallelen Geraden entsprechen die Tangenten einer dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Parabel, denn da zu jenen auch die sich selbst entsprechende ∞ ferne Gerade gehört, so muss der entsprechende Kegelschnitt sie zur Tangente haben. Einem ∞ fernen Punkt P entspricht also eine Parabel, deren Axe durch P geht. Also folgt auch umgekehrt, dass die Ssg. der Tangenten einer dem Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Parabel Durchmesser eben derselben sind. Im besonderen muss die Scheiteltangente der Parabel zu ihrer Ssg. senkrecht stehen und nur sie von allen Parabeltangenten hat diese Eigenschaft. Daraus folgt umgekehrt leicht: „Die zueinander normalen Seitensymmetriegeraden sind die Scheiteltangenten der dem Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Parabeln."

Wenn durch P an π Tangenten gezogen werden können, so sind es Ssg. Denn nennt man sie PU und PV, so ist die Ssg. von PU erstens Tangente an π, da PU durch P geht; zugleich muss sie auch P enthalten, da PU zur $\Gamma(\pi)$ gehört. Wenn also PU sich nicht selbst entspricht, so muss ihre Ssg. PV sein. Liegt P auf einer sich selbst entsprechenden Geraden, so fallen PU und PV zusammen, und P ist ein Punkt von π. Wir haben also den Satz:

„Die Tangenten von einem Punkte an dem zugehörigen Kegelschnitt sind Seitensymmetriegeraden."

Ferner:

„Durch jeden Punkt der Ebene gehen höchstens zwei Ssg."

Man erhält für die durch P gehenden Ssg. die Gl.

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 = 0$$

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

Also $\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{p_1 p_2}$, also $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 \pm \sqrt{\varphi}}{2p_1p_2}$

wenn

$$\varphi = -(p_1+p_2+p_3)(-p_1+p_2+p_3)(p_1-p_2+p_3)(p_1+p_2-p_3)$$

ist. Sie sind also reell, wenn $\varphi > 0$, sie fallen zusammen für $\varphi = 0$ und sind imaginär für $\varphi < 0$. φ ist $= 0$ für

$$\xi_1 = \pm \xi_2 = \pm \xi_3$$

also nur für die sich selbst entsprechenden Geraden (S. 272). Man findet $\varphi < 0$, wenn P im Dreieck $D_1D_2D_3$ oder in den Winkelräumen der Scheitelwinkel seiner Winkel liegt, sonst ist $\varphi > 0$. Also gilt der Satz:

„Durch jeden Punkt, welcher nicht im Dreieck $D_1D_2D_3$ oder in den Winkelräumen seiner Scheitelwinkel liegt, gehen zwei reelle Seitensymmetriegeraden."

Man findet sie für den Punkt P, indem man die Seitengegengeraden von A_1P, A_2P, A_3P zieht, durch ihre Schnittpunkte mit den Gegenseiten des Dreiecks einen dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt legt und vom ersten Punkt Tangenten an ihn zieht.

Um den Mittelpunkt von π zu bestimmen, ziehe man durch P die Parallele zu A_2A_3 und ihre Ssg, deren Berührungspunkt C_1 mit π auf A_3P liegen muss (s. Fig. 2.) B_1C_1 ist dann Durchmesser von π, für C_1 findet man die Coord.

$$\left(\frac{p_2+p_3}{2}\right)^2 : p_2 : p_3 \text{ und für den Mittelpunkt}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2+p_3) : (p_3+p_1) : (p_1+p_2)$$

Wir stellen uns die Frage, ob P Mittelpunkt von π sein kann. Es muss dann

$$p_1 : p_2 : p_3 = (p_2+p_3) : (p_3+p_1) : (p_1+p_2)$$

also

$$p_1 = p_2 = p_3 \text{ sein.}$$

Der Schwerpunkt S allein also ist der Mittelpunkt des zu ihm

Dieselbe Zuordnung der Strahlen im Büschel P erhält man, wenn man aus P die Punkte des Kreises und zugleich ihre Winkelgegenpunkte projicirt. (s. Bücking a. a. O. p. 10), PU und PV enthalten also auch die Wgp. von U und V.

Lässt man P den Kreis durchlaufen, so erhält man eine Schaar von Ordnungsstrahlen, sie sind, wenn O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bezeichnen, die Fusspunktlinien des Dreiecks $O_1O_3O_3$ (s. Bücking a. a. O. Auf. 31). Von ihnen berühren 3 den Kreis $A_1A_2A_3$ und die dazu gehörigen Normalstrahlen sind Durchmesser (s. Auf. 30).

Also giebt es auch 3 dem Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebene Parabeln, welche den Kreis $A_1A_3A_3$ berühren, und 3, welche ihn in denselben Punkten rechtwinklig schneiden. Da das Büschel P nur dann ein symmetrisches ist, wenn P auf dem Kreise $A_1A_2A_3$ liegt, so muss also, wenn zwei einem Dreieck eingeschriebene Parabeln sich rechtwinklig schneiden, der Schnittpunkt auf dem Umkreis des Dreiecks gelegen sein.

Die 4 als Ssg sich selbst entsprechenden Geraden bilden ein Vierseit, dessen eingeschriebene Kegelschnitte mit den Ssg in enger Verbindung stehen. Die Kegelschnitte sind die dem Dreieck $D_1D_2D_3$ eingeschriebenen Parabeln, da sie die ∞ ferne Gerade berühren; je 2 Ssg des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind conjugirt in Bezug auf alle diese Parabeln. Denn die Gleichung der letzteren ist

$$1) \qquad u_1\xi_1^2 + u_2\xi_2^2 + u_3\xi_3^2 = 0$$

in Verbindung mit der Bedingungsgleichung

$$2) \qquad u_1 + u_3 + u_3 = 0$$

Den Pol der beliebigen Geraden $\xi_i = p_i$ für eine Curve 1 erhält man in der Form

$$u_1\xi_1p_1 + u_2\xi_2p_2 + u_3\xi_3p_3 = 0$$

und 2 ist erfüllt, wenn

$$p_1\xi_1 = p_2\xi_0 = p_3\xi_3 \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{p_i}$$

ist, d. h. der Pol liegt auf der Seitensymmetriegeraden von $\xi_i = p\xi$.

Also enthält das dem Punkte P entsprechende Strahlenbüschel $\Gamma(\pi)$ die Polaren von P in Bezug auf die dem Dreieck $D_1D_2D_3$ eingeschriebenen Parabeln. Ist P ein Punkt einer solchen Parabel p, so ist seine Polare für p die Tangente t an p in P. Da t und

ihre Ssg t_1 conjugiert sind für p, so muss t_1 auch durch P gehen: es muss also noch eine 2te durch P gehende Parabel möglich sein, welche dann t_1 berührt. Geht man umgekehrt von einem Punkte P aus, durch welche zwei dem Dreiecke eingeschriebene Parabeln gelegt werden können, so sind die Tangenten an sie in P Ssg; Parabeln und Ssg durch C sind zu gleicher Zeit reell oder imaginär.

Da nun bekannt ist, dass man durch P nur dann Parabeln jener Art legen kann, wenn von den Punkten $PD_1D_2D_3$ keiner durch das von den 3 andern gebildete Dreieck eingeschlossen wird, so kommen wir auf den S. 7—8 abgeleiteten Satz zurück.

Die zwei durch P gehenden Ssg bestimmen nach dem Vorhergehenden auch den Winkel, unter welchem sich die zwei durch P gehenden dem Dreiecke $D_1D_2D_3$ eingeschriebenen Parabeln schneiden. Ist dieser $1R$, so liegt P auf dem Kreise $D_1D_2D_6$ (s. oben), also liegen die Schnittpunkte von je 2 normalen Ssg (b und b_1) des Dreiecks $A_1A_2A_3$ auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks. Für diejenige Parabel, deren Durchmesser b parallel sind, muss b selbst Axe sein, da von den Durchmessern einer Parabel nur die Axe zu den ihr conjugirten Geraden senkr. steht. Dasselbe gilt von b_1. Also haben wir den Satz:

„Die zu einander normalen Ssg sind die Axen der dem Dreieck $D_1D_2D_3$ eingeschriebenen Parabeln."

Da A_2A_3 Ssg eines jeden durch A_1 gehenden Strahls ist und das gleiche für A_3A_1 und A_1A_2 gilt, so folgt:

„Das Dreieck $A_1A_2A_3$ ist gemeinschaftliches Poldreieck aller dem Dreieck $D_1D_9D_3$ eingeschriebenen Parabeln." (s. Stoll 1893, Aufg. 1217 i. der Zeitschrf. f. math. u. naturw. Unterricht von J. C. V. Hoffmann.)

Die Axe einer beliebigen dem Dreieck $D_1D_2D_3$ eingeschriebenen Parabel wird von ihrer Ssg unter rechtem Winkel geschnitten. Da nun je 2 in Bezug auf eine Parabel conjugirte Normalstrahlen die Axe der Parabel in vom Brennpunkt gleich weit entfernten Punkten schneiden, so wird also auf irgend einer Geraden b, deren Ssg b_1 auf ihr senkrecht steht (s. oben), von den Paaren der anderen zu einander normalen Seitensymmetriegeraden Strecken ausgeschnitten, welche einen gemeinsamen Mittelpunkt besitzen, nämlich den Brennpunkt F der dem Dreieck $D_1D_2D_3$ eingeschriebenen Parabel mit der Axe b. Dem Punkt bb_1 (oder U) entspricht der Berührungspunkt T

derjenigen Curve, welche von den zu einander normalen Seitensymmetriegeraden eingehüllt wird (Steiner'sche Curve s. S. 274) so dass also $UT = FT$ ist.

3. Nähere Betrachtung der projectivischen Zuordnung des Strahlenbüschels P und des zugeordneten $\Gamma(\pi)$.

Die Strahlen durch P und ihre den Kegelschnitt π berührenden Ssg sind projectivisch einander zugeordnet, da sie A_2A_3, welche Tangente von π ist, in proj. Punktreihen schneiden. Sind nun p und v beliebige durch P gehende Geraden, p_1 und v_1 ihre Ssg, so sind im vollständigen Viereck (pv, p_1v_1) mit den Gegenseiten p und p_1 v und und v_1 auch das letzte Paar Gegenseiten (p und p_1 Ssg.) Denn schneidet man die Seiten des Vierecks durch A_1A_2, so erhält man 6 Punkte einer Involution, also liegen auch die Schnittpunkte von p und p_1 mit A_2A_3 gleichweit von den benachbarten Ecken entfernt, und dasselbe gilt von A_1A_2 und A_3A_1. Denkt man sich nun v und v_1 als feste Geraden, p und p_1 beweglich, nämlich p sich selbst drehend um P, so bleibt, wenn r durch P geht, r_1 Tangente von π, welche Lage auch p annimmt. Also sind p_1 und r_1 die Tangenten, die von dem v durchlaufenden Punkte (p_1v_1) an π gezogen werden, woraus folgt, dass p_1 und r_1 involutorisch geordnete Strahlen im Tangentenpunkt $T(\pi)$ sind. Deshalb sind auch die Punkte p_1v_1 und pv_1 der festen Geraden v_1 entsprechende Punkte einer involutorischen Punktreihe, durch welche je 2 Ssg der Büschel P und $\Gamma(\pi)$ gehen. Diese Reihe besitzt Ordnungspunkte, wenn v und π sich schneiden. Den Schnittpunkten von v_1 mit A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 entsprechen die Schnittpunkte von v_1 mit den Geraden A_1P, A_2P, A_3P. Es hat sich also ergeben:

a) P sei ein beliebiger, nicht auf einer Seite des Dreiecks $A_1A_2A_3$ liegender Punkt, π der dazu gehörige Kegelschnitt und v_1 eine Tangente von π. Bringt man die durch P gehenden Strahlen r zum Durchschnitt mit v_1 und zieht aus diesen Punkten die 2 ten Tangenten p_1 an π, so sind diese und die Ssg r_1 der ersten involutorisch zugeordnet im Tangentenbüschel $\Gamma(\pi)$. Die Involutionsaxe ist die Ssg v von v_1, das Involutions-Centrum also der Pol von v für π. Man erhält je 2 Paare von Ssg, wenn man von einem beliebigen Punkte von v die Tangenten l und m von π zieht und deren Schnittpunkte auf v_1 mit P verbindet (l' und m'); l' ist dann Ssg von m und m' Ssg von l.

b) Jede Tangente von π wird durch die anderen Tangenten und deren Ssg in den Punkten einer involutorischen Punktreihe geschnitten. In dieser sind auch zugeordnete Punkte $(v(s_1, s_1'; s_2, s_2'; s_3, s_3')$, wenn s_1 die Seite A_2A_3 und s_1' PA_1 bedeutet. Der Punkt vv_1 entspricht dem Berührungspunkt von v auf π. Gehen von P Tangenten an π, so schneiden sie v_1 in entsprechenden Punkten. Besitzt die Punktreihe reelle Ordnungspunkte, so sind für jeden die Tangente von ihm an π und die Verbindungsgerade mit P Ssg.

c) Es gibt keine anderen Strahlen der Ebene, welche die durch P gehenden Strahlen und ihre Ssg in involutorischen Punktreihen schneiden.

Lässt man P auf die ∞ ferne Gerade fallen, so folgt: jede Tangente einer dem Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Parabel wird durch die Tangenten der Parabel und den als Ssg diesen zugeordneten Durchmessern der Parabel in einer symmetrisch-involutorischen Punktreihe geschnitten.

Schneidet man die Strahlen des Büschels P durch eine beliebige Gerade z und die Tangenten des zugeordneten Kegelschnitts π durch eine Tangente u von π, so erhält man zwei projectivische Punktreihen, welche ein neues Strahlenbüschel 2ter Classe bestimmen, zu welchem auch x und u gehören. Dies Γ^2 zerfällt, wenn die durch den Punkt (ux) gehenden Ssg zu den Büscheln P und Γ^2 gehören. Nimmt man an, dass das Γ^2 in die Büschel (ux) und Q zerfällt und nennt man s_1'' die Verbindungslinie des Punktes (us_1) und des Schnittpunkts von x mit A_2A_3, so erhält man ebenso wie bei der reciproken Ableitungen über Winkelgegenpunkte eine Configuration (11), d. h. 11 Geraden und 11 Punkte in der Lage, wo jede der 11 Geraden 3 der 11 Punkte enthält, und durch jeden der Punkte 3 von den Geraden gehen. Es sind die 11 Geraden $s_1 s_2 s_3$; $s_1' s_2' s_3'$; $s_1'' s_2'' s_3''$, x und u und die 11 Punkte $A_1 A_2 A_3$; P, Q und 6 auf x und u liegende. Mit Hülfe der Restfiguren $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)$ findet man, dass sie von derselben Art, wie die oben genannte ist und sich dem Martinettischen Schema

1	2	3	4	5	(6)	7	8	9	10	11
(u)	A_3	A_3	(x)	Q	(u)	(u)	(u)	P	A_3	(x)
ε	ε	ε	δ	β	ε	ε	δ	α	ε	δ

fügt, wenn die Buchstaben der 2ten Zeile die Punkte unserer Configuration, die 1te und 3te Zeile die Abzählung und die Restfiguren von Martinetti bedeuten *).

*) s. Martinetti, Ann. di mat. Fr. Brioschi, Serie II, tome XV,

4. Kegelschnitte, welche den Punkten einer Geraden entsprechen.

Bewegt sich der Punkt P

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 = 0$$

auf einer Geraden m mit den Coordinaten

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = m_1 : m_2 : m_3$$

so sind die Coefficienten der Gleichung des zugehörigen Kegelschnitts π (S. 5.)

$$1) \quad \begin{cases} \frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0 \text{ durch die lineare Gleichung verbunden,} \\ p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 = 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen 1 bestimmen eine **Kegelschnittschaar**, welche aus den Kegelschnitten besteht, welche die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und die Gerade

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3}$$

zu gemeinschaftlichen Tangenten hat; diese Gerade (mc) ist die Ssg von m.

Zu den ∞ fernen Punkte von m gehört die Parabel der Schaar; ihre Axe ist zu m parallel. Für diese Parabel ist

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

$$p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 = 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

Also ist ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_2}, & \frac{1}{\xi_2}, & \frac{1}{\xi_3} \\ m_1, & m_2, & m_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{m_2 - m_3}{\xi_1} + \frac{m_3 - m_1}{\xi_2} + \frac{m_1 - m_2}{\xi_3} = 0$$

Der Nagel'sche Punkt von π ist

$$x_2 : x_2 : x_2 = \frac{1}{p_1} : \frac{2}{p_2} : \frac{1}{p_3}$$

den Ort dieses Punktes für die Kegelschnitte der Schaar erhält man, wenn man seine Coordinaten in die zweite Gleichung von 1) einsetzt

$$2)\qquad \frac{m_1}{x_1}+\frac{m_2}{x_2}+\frac{m_3}{x_3}=0$$

es ist ein dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umgeschriebener Kegelschnitt, zugleich die Seitengegencurve von m, d. h. sie enthält die Seitengegenpunkte der auf m liegenden Punkte.

Die zur ∞ fernen Geraden gehörende Kegelschnittschaar ist

$$\frac{p_1}{\xi_1}+\frac{p_2}{\xi_2}+\frac{p_2}{\xi_3}=0$$

$$p_1+p_2+p_3=0$$

sie enthält die dem Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Parabeln. Der Ort ihrer Nagel'schen Punkte ist

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$$

d. h. die Ellipse von Steiner, welche die durch die Ecken des Dreiecks zu seinen Gegenseiten gezogenen Parallelen berührt. Da sie die Seitengegenpunkte der ∞ fernen Punkte der Ebene enthält, „so „ist die Curve 2 eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem m „die Ellipse von Steiner schneidet, berührt, oder nicht trifft."

Wir wollen die Mittelpunkte der zur Geraden m gehörenden Kegelschnittschaar $(s_1s_2s_3m_1)$ betrachten. Der Mittelpunkt P_m des zum Punkte P

$$p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3=0$$

gehörenden Kegelschnitts

$$\frac{p_1}{\xi_1}+\frac{p_2}{\xi_2}+\frac{p_3}{\xi_3}=0$$

hat die Coordinaten

$$x_1:x_2:x_3=(p_2+p_3):(p_3+p_1):(p_1+p_2)$$

Die Gerade P_mP hat dann die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2+p_3, & p_1+p_3, & p_1+p_2 \end{vmatrix}=0$$

oder, nachdem man durch $p_1+p_2+p_3$ dividirt hat:

Da sie für
$$x_1(p_2-p_3)+x_2(p_3-p_1)+x_3(p_1-p_2) = 0$$
$$x_1 = x_2 = x_3$$

erfüllt wird, so geht sie durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Dies ergiebt sich auch leicht geometrisch (Fig. 2). Denn

$$B_1 D_1 = D_1 C_1, \quad \text{also}$$

$P_m D_1$ par. $C_1 E_1$ und $2 P_m D_1 = C_1 E_1 = A_1 P$, $D_1 S : SA_1 = 1:2$

also ist S Schwerpunkt im Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und

$$P_m S : SP = 1 : 2$$

Also sind P und P_m homologe Punkte in den ähnlich liegenden Dreiecken $A_1 A_2 A_3$ und $D_1 D_2 D_3$. Die Mittelpunkte also der Kegelschnitte, welche die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und eine 4te Gerade m_1 berühren, liegen auf einer zur Ssg m von m_1 parallelen Geraden m' der Art, dass m und m' entsprech. Geraden in den Dreiecken $A_1 A_2 A_3$ und $D_1 D_2 D_3$ sind.

Die Coordinaten von P seien $x_1 x_2 x_3$ die von P_m seien $x_1' x_2' x_3'$ dann folgt aus

$x_1' = x_2 + x_3$ (S. 7) u. s. w.

$x_1 = -x_1' + x_2' + x_3'$, $x_2 = x_1' - x_2' + x_3'$; $x_3 = x_1' + x_2' - x_3'$

Aus der Gleichung von m, nämlich

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

folgt dann die für m' durch Einsetzung jener Werte. Sie ist

$$(-m_1+m_2+m_3)x_1+(m_1-m_2+m_3)x_2+(m_1+m_2-m_3)x_3 = 0$$

Durchläuft P eine beliebige Curve $n$ter Ordnung, so ist die Bahn des Mittelpunkts des zu P gehörenden Kegelschnitts ebenfalls eine solche, welche zur ersten ähnlich liegt (Centrum S, Verhältniss $2:1$); dagegen ist die Bahn des Nagel'schen Punkts eine Curve vom $2n$ten Grade, die $A_1 A_2 A_3$ zu $n$fachen Punkten hat, nämlich die Seitencurve der ersten C^n.

Wir wollen das Vorhergehende an einigen besonderen Fällen erläutern. Der dem Dreieck umgeschriebene Kreis

$$\frac{s_1^2}{x_1} + \frac{s_2^2}{x_2} + \frac{s_3^3}{x_3} = 0$$

ist der Ort der Nagel'schen Punkte der die Seiten des Dreiecks und die Ssg der Seitengegengerade des Kreises, also

$$\frac{x}{x_1^2} + \frac{x_2}{s_2^2} + \frac{x_2}{s_3^2} = 0$$

berührenden Kegelschnitte. Die Parabel dieser Schaar hat die Gleichung

$$\frac{1}{s^2 - s_3^2} + \frac{s_2 - s_4^2}{\xi_1^2} + \frac{s_1^2 - r_2^2}{\xi_2} = 0$$

ihr Nagel'scher Punkt hat also die Coordinaten

$$\frac{1}{s_2^2 - s_3^2} : \frac{1}{s_3 - s_1^2} : \frac{1}{s_3 - s_3^2}$$

und ist der Steiner'sche Punkt, da er der Schnittpunkt des umgeschriebenen Kreises und der Steiner'schen Ellipse ist. Wenn H_1 den Seitengegenpunkt des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bedeutet, und wenn m durch H_1 geht, so ist der Kegelschnitt

$$\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \frac{m_3}{x_3} = 0$$

eine gleichseitige Hyperbel, da er H enthält. Die analytische Bedingung dafür ist $m_1 \tan A_1 + m_2 \tan A_2 + m_3 \tan A_2$, da $x_i = \cot A_i$.

Zieht man durch die Ecken des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in beliebiger Richtung Parallele, welche die Gegenseiten in B_1, B_2 und B_3 treffen, so schneiden sich die Ssg der Tangenten des Kegelschnitts, der in diesen Punkten berührt, in einem Punkte der Steiner'schen Ellipse, sein Mittelpunkt liegt also auf der Ellipse ε_1, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten berührt. Die Ssg der durch H gehenden Geraden umhüllen eine Ellipse, welche mit dem umgeschriebenen Kreise den Mittelpunkt M gemein hat, denn

$$HS : SM = 2 : 1$$

Sie berührt die Seiten in den Endpunkten der Seitengegengeraden der Höhen. Die Ssg der Durchmesser des Kreises M umhüllen eine Ellipse, die mit dem Feuerbach'schen Kreise den Mittelpunkt T gemein hat, denn

$$MS : ST = 2 : 1$$

Diese beiden Ellipsen und die eingeschriebene, zur Steiner'schen ähnlich liegende ε_1 haben eine gemeinschaftliche Tangente (ausser den Dreiecksseiten), nämlich die Ssg der Euler'schen Geraden MH, da ε_2 zu S gehört und S auf MH liegt. Die Parabel der zugehörigen Kegelschnittschaar hat also MH zum Durchmesser, zum Brennpunkt den Tarry'schen Punkt N (s. Lieber, Progr. 134 vom Fr. W. Gymn. Stettin 1856 Nr. 94), ihr Nagel'scher Punkt ist der 4. Schnittpunkt

der Steiner'schen Ellipse mit der Hyperbel $A_1 A_2 A_3 S H_1$ und durch ihn geht auch der Kreisdurchmesser RMN, welcher den Steiner'schen mit dem Tarry'schen Punkte verbindet. Der Grebe'sche Punkt K ist bekanntlich der Mittelpunkt der eingeschriebenen Ellipse, welche die Seiten in den Höhenfusspunkten berührt. „Also liegt der Ssg. H_1 von H so auf SK, dass

$$H_1 S : SK = 1 : 2 \text{ ist.“}$$

K und M sind also auch Sgp im Dreieck D_1, D_2, D_3, da

$$MS : SH = 1 : 2 \quad \text{und} \quad KS : SH_1 = 1 : 2$$

ist. Eine gleichseitige Hyperbel $A_1 A_2 A_3$ enthält stets H, also ist der Ort der Nagel'schen Punkte einer Kegelschnittschaar $(s_1 s_2 s_3 m')$ eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Ssg. (m) von m' durch H_1, die Mittelpunktsgerade also durch K gehet. Zu jeder solchen Schaar gehört die vorher genannte Ellipse um K.

Ist O der Mittelpunkt des eingeschr. Kreises, N der Punkt von Nagel (Schnittpunkt der zu den Berührungspunkten laufenden Transversale), N' sein Sgp, so ist N' der Punkt, zu welchem der eingeschr. Kreis gehört (s. oben), also liegen $N'S$ und O auf derselben Geraden und

$$N'S : SO = 2 : 1$$

Dies führt zu einer bemerkenswerten Folgerung. Zieht man nämlich durch die Ecken des Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten und nennt das neu erstandene Dreieck $A_1' A_2' A_3'$, so muss N' Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises dieses Dreiecks sein. Dasselbe gilt für die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$; nennt man sie O_1, O_2, O_3, die zugehörigen Nagel'schen Punkte N_1, N_2, N_3 und deren Sgp N_1', N_2', N_3', so ist das Viereck $N' N_1' N_2' N_3'$ zum Viereck $O O_1 O_2 O_3$ ähnlich liegend mit S als innere Aehnlichkeit und dem Verhältnisse $2 : 1$. Die Punkte N sind die Mittelpunkte der 4 die Seiten des Dreiecks $A_1' A_2' A_3'$ berührenden Kreise, so dass also jede Seite des ersten Vierecks die Winkel und Aussenwinkel des Dreiecks $A_1' A_2' A_3'$ halbiren. Der Mittelpunkt des Kegelschnitts ferner, welcher die Seiten des Dreiecks in den Endpunkten der durch O (Mittelpunkt des eingeschr. Kr.) laufender Transversalen berührt, ist ein für das Dreieck ausgezeichneter Punkt (L), nämlich der Schwerpunkt seiner Seiten, da

$$OS : SL = 2 : 1$$

sein muss (s. Laisant Théorie des équipollences p. 123).

Lässt man den Nagel'schen Punkt eine beliebige Gerade g durchlaufen, so ist der Ort für P ein durch $A_1A_2A_3$ gehender Kegelschnitt k, nämlich die Seitengegencurve von g, und der Ort für die Mittelpunkte P_m der zugehörigen Kegelschnitte ist der zu k ähnlich liegende Kegelschnitt durch $D_1O_2D_3$. P_m durchläuft den Kreis $D_1D_2D_3$, wenn g die Ssg des Kreises $A_1A_2A_3$ ist.

In der Schaar, deren Kegelschnitte den Punkten einer Geraden entsprechen, müssen wir noch die zerfallenden C^2 ins Auge fassen. Wenn der Punkt P die Gerade m durchläuft, so berührt der zugehörige Kegelschnitt π stets die Ssg m_1 von m. π wird zerfallen, wenn P auf eine Seite des Dreiecks zu liegen kommt. Denn schneiden m und m_1 $\overline{A_2A_3}$ in C und C_1 und fällt P auf C, so entsprechen ihm die Strahlenbüschel C_1 und A_1. Als Mittelpunkt der zerfallenden Curve muss also der Mittelpunkt von A_1C_1 betrachtet werden, und da A_1C_1 Diagonale ist im vollständigen Vierseit, gebildet aus den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und m_1, so ergiebt sich, dass m' auch die Mittelpunkte dieses Vierseits enthält, wie bekannt. Wenn man erwägt, dass m' und m parallel und durch S im Verhältniss $1:2$ getrennt sind, so erhält man: Die beliebigen Geraden $a_1a_2a_3a_4$ bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalmittelpunkte auf a_m liegen mögen. a_1' sei die Ssg von a_4 für das Dreieck $a_1a_2a_3$, analog a_2', a_3', a_4' und S_1, S_2 S_3, S_4 seien die Schwerpunkte der von den 4 Geraden bestimmten Dreiecke, so dass S_4 Schwerpunkt des Dreiecks $a_1a_2a_3$ ist. Dann ist

$$a_m \parallel a_1' \parallel a_2' \parallel a_3' \parallel a_4$$

(Richtung der Axe der zur Schaar gehörenden Parabel) und S_4 liegt zwischen a_4' und a_m so, dass jede durch S_4 gehende Gerade im Verhältniss $2:1$ geteilt wird, analoges gilt für a_1', a_2', a_3'.

Fasst man 5 Tangenten eines Kegelschnitts in's Auge, so ergiebt sich: Die Geraden $a_1a_2a_3a_4a_5$, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, bestimmen 10 Dreiecke, deren Schwerpunkte wir mit S_{12}, S_{13} u. s. w. bezeichnen; wobei S_{12} der Schwerpunkt des Dreiecks $a_3a_4a_5$ sein soll. Die Seitensymmetriegeraden von a_1 und a_2 für das Dreieck $a_3a_4a_5$ sollen sich in A_{12} schneiden, wodurch man 10 Punkte A erhält. Dann sind die Zehnecke, gebildet aus den Punkten S und A, ähnlich und ähnlich liegend; das Centrum (äusseres) ist der Mittelpunkt des die 5 Geraden berührenden Kegelschnitts und das Verhältniss $1:3$, so dass

$$MS_{12} : MA_{13} = 1:3 \quad \text{ist.}$$

5. Die dem Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln.

Nur dem stumpfwinkligen Dreieck können gleichs. Hyperbeln eingeschrieben werden; wir wollen deshalb für das Folgende voraussetzen $A_1 > 90^0$.

Die dem Dreieck eingeschriebene Hyperbel π habe die Asymptoten u und v und den Mittelpunkt P'. Dann sind die Ssg (u_1 und v_1) von u und v diejenigen Geraden des zu π gehörenden Strahlenbüschels P, welche die durch P gehenden, eingeschriebenen Parabeln berühren. Wir wollen deshalb zuerst die Gleichungen von u_1 und v_1 aufsuchen. P habe die Coordinaten p_1, p_2, p_3, also die Hyperbel die Gleichung

$$1)\qquad \frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

Eine durch P gehende, eingeschriebene Parabel habe die Gleichung

$$2)\qquad \frac{m_1}{\xi_1} + \frac{m_2}{\xi_2} + \frac{m_3}{\xi_3} = 0$$

wobei

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0$$

sein muss. Also muss sein

$$3)\qquad m_1 : m_2 : m_3 = \left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3}\right) : \left(\frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_1}\right) : \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\right)$$

Die Gleichung 2) kann auch geschrieben werden

$$(m_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (m_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (m_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$$

oder

$$4)\qquad m_1^2 x_1^2 + m_2^2 x_2^2 + m_3^2 x_3^2 - 2m_2 m_3 x_2 x_3 - 2m_3 m_1 x_3 x_1 - 2m_1 m_2 x_1 x_2 = 0$$

Wir setzen für $x_i = p_i$, da 4) durch P geht, und aus 3) die Werte für m_i

$$p_1^2\left(\frac{1}{\xi_2^2} - \frac{1}{\xi_3^2}\right)^2 + p_2^2\left(\frac{1}{\xi_3^2} - \frac{1}{\xi_1^2}\right) + p_3^2\left(\frac{1}{\xi_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2}\right)$$
$$- 2p_1 p_2\left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3}\right)\left(\frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_1}\right) - 2p_2 p_3\left(\frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_1}\right)\left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\right)$$
$$- 2p_3 p_1\left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\right)\left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$5)\qquad \frac{\left(\frac{p_2+p_3}{\xi_1}+\frac{p_3+p_1}{\xi_2}+\frac{p_1+p_2}{\xi_3}\right)^2 = 4(p_1+p_2+p_3)}{\left(\frac{p_1}{\xi_2\xi_3}+\frac{p_2}{\xi_1\xi_3}+\frac{p_3}{\xi_1\xi_2}\right)} .$$

Für die beiden durch P oder

$$6)\qquad p_1\xi_1+p_2\xi_2-p_3\xi_3=0$$

gehenden in 5 enthaltenen Geraden wird die rechte Seite 0, und man erhält

$$7)\qquad \frac{p_2+p_3}{\xi_1}+\frac{p_3+p_1}{\xi_2}+\frac{p_1+p_2}{\xi_3}$$

d. h. sie sind die Tangenten von P an diesen eingeschriebenen Kegelschnitt. Die Gleichungen für u_1 und v_1 ergeben sich, wenn man aus 6) und 7) die Wurzeln berechnet. Ihre Ssg u und v müssen dann die Wurzeln sein von

$$8)\qquad \frac{p_1}{\xi_1}+\frac{p_2}{\xi_2}+\frac{p_3}{\xi_3}=0$$

(s. Gl. 1)) und

$$9)\qquad (p_2+p_3)\xi_1+(p_3+p_1)\xi_2+(p_1+p_2)\xi_3=0 .$$

Setzt man die zweifachen Wurzelwerte $= q_i$ und q_i', so erhält man leicht

$$10)\qquad \frac{q_2}{q_3}=\frac{-p_2+p_3+w}{p_3(p_3+p_1)} \quad\text{und}\quad \frac{q'_2}{q_3}=\frac{-p_2-p_3-w}{p_3(p_3+p_1)} .$$

worin

$$w=\sqrt{p_2^2p_3^2-p_2p_3(p_1+p_2)(p_3+p_1)}$$

ist. Da nun die Hyperbel π eine gleichseitige sein soll, so muss u norm. z. v sein, oder ihre Coordinaten die Gleichung erfüllen

$$11)\qquad \begin{aligned}&[\cot A_1(q_2q_3'+q_3q_2')+\cot A_2(q_3q_1'+q_1q_3')\\ &+\cot A_3(q_1q_2'+q_2q_1')]\sin A_1 . \sin A_2 . \sin A_3\\ &=q_1 \cdot q_1'\sin^2A_1+q_2q_2'\sin^2A_2+q_3 \cdot q_3'\sin^2A_3\end{aligned}$$

Aus 10) folgt nun

$$\frac{q_2}{q_3}\cdot\frac{q_2'}{q_3'}=\frac{p_2(p_1+p_2)}{p_3(p_3+p_1)}$$

ähnlich

$$\frac{q_3}{q_3'} \cdot \frac{q_3'}{q_1'} = \frac{p_3(p_2+p_3)}{p_1(p_1+p_2)}$$

also

$$q_1 \cdot q_1' : q_2 \cdot q_2' : q_3 \cdot q_3' = \frac{p_1}{p_2+p_3} + \frac{p_2}{p_3+p_1} + \frac{p_3}{p_1+p_2}$$

Wir setzen

$$12) \qquad q_1 \cdot q_1' = \varepsilon \frac{p_1}{p_2+p_3}$$

Ferner folgt aus (10)

$$\frac{q_2}{q_3} + \frac{q_2'}{q_3'} = \frac{q_2 q_3' + q_2' q_3}{q_3 \cdot q_3'} = \frac{-2p_2}{p_1+p_3}$$

also nach 12)

$$= \frac{-2\varepsilon\, p_2 p_3}{(p_1+p_2)(p_1+p_2)}$$

Nach Multiplication mit $\frac{1}{\varepsilon}(p_2+p_3)(p_3+p_1)\cdot(p_1+p_2)$ wird dann aus 11)

$$2[\cot A_1 (p_2+p_3)\, p_2 p_3 + \cot A_2 (p_3+p_1)\, p_3 p_1 + \cot A_3$$
$$\cdot (p_1+p_2) p_1 p_2] \cdot \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 + \sin^2 A_1\, p_1 (p_3+p_1)$$
$$\cdot (p_1+p_2 + \sin^2 A_2\, p_2 (p_1+p_2)(p_2+p_3) + \sin^2 A_3\, (p_2+p_3)$$
$$\cdot (p_3+p_1) = 0$$

welche zerfällt in

$$(p_1+p_2+p_3) = 0$$

und

$$13) \quad p_1^2 \sin^2 A_1 + p_2^2 \sin^2 A_2 + p_3^2 \sin^2 A_3 + 2(\cot A_1\, p_2 p_3$$
$$+ \cot A_2\, p_3 p_1 + \cot A_3\, p_1 p_2) \cos A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 = 0$$

Die erste Gleichung stellt die ∞ ferne Gerade dar, und liefert die dem Dreieck eingeschriebenen Parabeln, welche hier nicht mitgezählt werden können, also bleibt nur 13) als Gleichung für die Punkte P. Sie ist die Gleichung eines Kreises. Denn die allg. Gleichung eines Kreises, nämlich

$$14) \quad (s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + x_3^2 x_1 x_2) + (a_1 x_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3)$$
$$\cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

geht in (13) über, wenn man 11)

$$a_1 = s_1^2$$

setzt und darauf durch $(-4r^2)$ dividirt. Man erhält:

15) $$-\Sigma s_1^2 x_2 x_3' + \Sigma s_1^2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

Die Radicalaxe mit dem umgeschriebenen Kreise ist die Gerade

$$s_1^2 x_1 + s_2^2 x_2 + s_3^2 x_3 = 0$$

oder in trimetrischen Coordinaten

$$s_1^3 x_1 + s_2^2 x_2 + s_3^3 x_3 = 0$$

Gleichung 15) kann auch geschrieben werden:

$$s_1^2 x_1^2 + s_2^2 x_2^2 + s_3^2 x_3^2 + 2 s_2 s_3 . x_2 x_3 \cos A_1 + 2 s_3 s_1 x_3 x_1 \cos A_2 + 2 s_1 s_2 x_1 x_2 \cos A_3 = 0$$

Hieraus folgt nun leicht die Gleichung für den Mittelpunkt P' der gleichseitigen Hyperbel π. Denn Gleichung (9) zeigt, dass seine Coordinaten sind

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2 + p_3) : (p_3 + p_1) : (p_1 + p_2)$$

Also ist

$$p_1 : p_2 : p_3 = (-x_1 + x_2 + x_3) : (x_1 - x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 - x_3)$$

Man setze diese Werte in 15) ein und erhält nach einigen Aenderungen, wenn r den Radius des Kreises $A_1 A_2 A_3$ bedeutet,

16) $$s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + s_3^2 x_1 x_2 - \frac{s_1 s_2 s_3}{2r} (x_1 + x_2 + x_3) (\cot A_1 . x_1 + \cot A_2 . x_2 + \cot A_3 . x_3) = 0$$

oder in gewöhnlichen Coordinaten

16a) $$(s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1) - (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3) = 0$$

Dieser Kreis gehört zu dem Büschel, welches der umgeschriebene und der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bestimmen, denn die Gl. des letzteren, nämlich

$$2(4(s_1 x_2 x_3 + s_2 x_2 x_1 + s_3 x_1 x_2) - (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) (\cos A_1 . x_1 + \cos A_2 . x_2 + \cos A_3 . x_3) = 0$$

zeigt, dass die gemeinsame Radicalaxe der 3 genannten Kreise die Gerade

$$\cos A_1 \cdot x_1 + \cos A_2 \cdot x_2 + \cos A_3 \cdot x_3 = 0$$

ist zugleich die Axe der Homologie, von $A_1A_2A_3$ und dem Dreieck der Höhenfusspunkte.

Die Gleichung 16) unseres Kreises (in barycentrischen Coordinaten) kann in die Form gebracht werden

$$18) \qquad x_1^2 \cot A_1 + x_2^2 \cot A_2 + x_3^2 \cot A_3 = 0$$

sie zeigt, dass er nur reell ist, wenn eine der Coefficienten negativ ist, also nur für stumpfwinklige Dreiecke. In einem solchen schneidet bekanntlich der Feuerb. Kreis den umgeschriebenen, und es folgt, dass auch der neue Kreis durch diese beiden Schnittpunkte gehen muss.

Sein Mittelpunkt ist ein Punkt der Euler'schen Geraden und zwar der Höhenschnittpunkt. Denn setzt man für den Punkt A_2 seine Coordinaten in Gl. 16) und bezeichnet die Potenz des Kreises 16) im Punkte A_2 mit p_2^2, so ist

$$m \cdot p_2^2 = - s_2 h_2^2 \cdot \cos A_2$$

anderseits ist p_2^4 gleich dem Product der Abschnitte auf x_3, gemessen von A_2 und dies ergiebt sich aus Gl. 18)

$$p_2^2 = \frac{s_3^2 \cot A_2}{\cot A_1 + \cot A_2}$$

Beides liefert

$$m = - 2r \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3$$

Setzt man nun die Coordinaten von

$$M(x_i = r \cos A_i)$$

ein, so ist die Potenz

$$= r^2(1 - 4 \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3)$$

und die von H

$$= 4r^2 \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3$$

Da nun

$$MH^2 = r^2(1 - 8 \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3)$$

ist, so ist klar, dass H der Mittelpunkt des untersuchten Kreises und

$$2r \sqrt{- \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3}$$

sein Radius ist. Wir haben also den Satz:

„Die Mittelpunkte der einem bei A_1 stumpfwinkligen Dreieck „$A_1A_2A_3$ eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln liegen auf einem „um seinen Höhenschnittpunkt beschriebenen Kreise, der durch die

„reellen Schnittpunkte des umgeschriebenen und des Feuerbach'schen „Kreises des Dreiecks geht und dessen Radius gleich

$$2r\sqrt{-\cos A_1 \,.\, \cos A_2 \,.\, \cos A_3} \text{ ist.“}$$

Die Asymptoten dieser Hyperbeln bilden einen Strahlenbüschel 6ter Classe, das die ∞ fernen Geraden zur Doppeltangente hat. Denn ihre Coordinaten sind Wurzeln der Gl. 8) und 9), woraus folgt

$$p_1 : p_2 : p_3 = \xi_1^2(\xi_3 - \xi_2) : \xi_2^2(\xi_1 - \xi_3) : \xi_3^2(\xi_2 - \xi_1)$$

Da für die p_i die Gleichung besteht 18)

$$(p_2+p_3)^2\cot A_1 + (p_3+p_1)^2\cot A_2 + (p_1+p_2)^2\cot A_3 = 0$$

so folgt für die Asymptoten

$$(\xi_2 - \xi_3)^2(-\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2)^2\cot A_1 + \ldots = 0$$

Aehnlich liegen die Brennpunkte auf einer Curve 6ter Ordnung. Denn ist Gl. 8) die Gleichung einer solchen Hyperbel und $x_1 x_2 x_3$ die Coordinaten eines ihrer Brennpunkte, so ist p_1 proportional

$$\frac{x_2 \sin A_3}{x_3 \sin A_3} + \frac{x_3 \sin A_2}{x_2 \sin A_3} + 2\cos A_1$$

(s. Bücking a. a. O. S. 5). Setzt man

$$x_1(x_2^2\sin^2 A_3 + x_3^2\sin^2 A_2 + 2x_2x_3\sin A_2 \sin A_3 \cos A_1) = \eta_1$$

so ist der Ort der Brennpunkte

$$\eta_1^2\sin^2 A_1 + \eta_2^2\sin^2 A_2 + \eta_3^2\sin^2 A_3 + 3(\eta_2\eta_3\cot A_1 + \eta_3\eta_1\cot A_2 + \eta_1\eta_3\cot A_3) = 0$$

Der umgeschriebene Kreis und der Kreis um H schneiden sich unter einem Wkl. φ, so dass

$$\cos^2\varphi = -\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3$$

ist; setzt man an die Stelle des umgeschriebenen Kreises, den von Feuerbach, so erhält man

$$\cos^2\varphi = -\frac{1}{16}\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3$$

Die Potenz unseres Kreises im Schwerpunkt ist

$$= \frac{2\Delta \cot \cot \omega}{9}$$

wenn

$$\Delta = \Delta\, A_1\, A_2\, A_3$$

und ω den Brocard'schen Winkel *) bedeutet.

Der Kreis um S, welcher mit den Kreisen um M und H zu einem Büschel gehört, schneidet den Kreis um H in U und V rechtwinklig, denn US und UH halbiren den Winkel MUF und dessen Nebenwinkel. Also ist auch

$$SU^2 = \frac{2\,\Delta \cot\omega}{9} = SV^2$$

Endlich ist die Entfernung

$$UV = 4r\sqrt{\frac{-w(1+w)}{1-8w}}$$

wenn

$$w = \cos A_1 \,.\, \cos A_2 \,.\, \cos A_3 \quad \text{ist.}$$

Die Punkte U und V sind zugleich Mittelpunkte von 2 dem Dreiecke umgeschriebenen und von 2 ihm eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Zu ihrer Construction dienen die erwähnten involutorischen Büschel; man ziehe US bis zum 2ten Schnittpunkt U_1 auf dem Kreise $A_1A_2A_3$, und bestimme die Ordnungsstrahlen von U und U_1. Die ersteren sind die Asymptoten der umgeschriebenen, die Seitensymmetriegeraden, die letzteren die Asymptoten der eingeschriebenen Hyperbeln.

Unter den dem stumpfwinkligen Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln giebt es solche mit paarweise parallelen Asymptoten. Sind X und Y die ∞ fernen Punkte einer solchen eingeschriebenen Curve, so gehören zu ihnen eingeschriebene Parabeln x und y, welche von den Seitensymmetriegeraden der durch X und Y gehenden Geraden umhüllt werden, und deren Axen durch U und V gehen, also senkrecht zu einander sind. Wenn U und V in dem Winkelraum des stumpfen Winkels des Dreiecks liegen, so schneiden sich x und y in 4 Punkten. Zu jedem von diesen Punkten gehört eine eingeschriebene durch U und V gehende Hyperbel, also giebt es in diesem Falle 4 gleichseitige Hyperbeln mit parallelen Asymptoten.

Jene Schnittpunkte sind Punkte des Kreises, dessen Gleichung 45) ist, und die ihnen entsprechenden Punkte auf dem Kreise 16) sind die Mittelpunkte der Hyperbeln. Liegen aber die Parabeln

*) s. die Brocard'schen Gebilde von Emmerich.

in verschiedenen Winkelräumen der Winkel A_1, A_2, A_3, so schneiden sie sich überhaupt nicht. Also haben wir den Satz:

„Die in 2 einem stumpfwinkligen Dreieck eingeschriebenen Para-„beln, deren Axen auf einander senkrecht stehen, schneiden sich ent-„weder nicht, oder in 4 Punkten eines Kreises, und dieser Kreis „ist für alle ein und derselbe".

Man kann beliebig viele Paare solcher Parabeln finden, indem man von ihren Brennpunkten ausgeht, die auf dem Kreise $A_1A_2A_3$ diametral gegenüber liegen. Sind A_2A_2' und A_3A_3' Durchmesser dieses Kreises, so können die Brennpunkte nur auf den Bogen A_2A_2' gelegen sein. Ist G ein solcher Brennpunkt, so geht die Axe a der zu ihm gehörenden Parabel durch G und den ∞ fern liegenden Winkelgegenpunkte von G, die Fusspunktlinie von G für das Dreieck $A_1A_2A_3$ liefert nun die Scheiteltangente und die Parallele dazu durch H die Leitlinie l der Parabel. Diejenige eingeschriebene Parabel, deren Axe zu der Axe der vorhergehenden senkrecht steht, habe den Brennpunkt G', die Axe a', die Leitlinie l'; dann ist $G'G$ Kreisdurchmesser, $a \perp a'$, $l \perp l'$, wodurch diese Linien sogleich bestimmt sind.

Die Nagel'schen Punkte der einem (stumfwinkligen) Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln sind die Seitengegenpunkte der Punkte P (s. oben); man vertausche in Gl. 15) die x_i mit $\frac{1}{x_i}$ und erhält als Ort für jene die Curve

$$\Sigma \frac{s_1^2}{x_1^2} + 2\Sigma \frac{s_2 s_3 \cos A_1}{x_2 x_3} = 0$$

oder in gewöhnlichen Coordinaten

$$x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 x_3 \cos A_1 + \ldots = 0$$

Diese Gleichung findet man bei Depène (1893 Progr. 177, Breslau, über die einem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kegelschnitte). Synthetisch ist sie als Curve 4ten Grades und 6. Classe bereits von Montag bestimmt worden. (1870, Dissert. von C. Montag, Breslau, Seite 27).

6. Gegenschaaren.

Unter einer Gegenschaar wollen wir eine Schaar von Geraden verstehen der Art, dass die Seitensymmetriegerade einer jeden wieder eine Gerade der Schaar ist.

Man erhält eine solche, wenn man den Punkt P eine beliebige Curve beschreiben lässt, und für jede Lage die 2 durch P gehende Ssg bestimmt. Die von P durchlaufene Curve wollen wir die Leitcurve der Schaar nennen.

1) Die Leitcurve sei die Gerade m mit den Coordinaten

$$\xi_2 = m_i$$

Die Coordinaten der durch P gehenden Ssg seien ξ_i' und ξ_i'', ihr Schnittpunkt also

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' \end{vmatrix} = 0$$

Man setzt hierin

$$\xi_i'' = \frac{1}{\xi_i'}$$

und für die ξ_i der ersten Zeile m_i, da ihr Schnittpunkt sich auf m bewegt. Man erhält dann die Gleichung 3ten Grades

$$1)\quad m_1\xi_1(\xi_2^2 - \xi_3^2) + m_2\xi_2(\xi_3^2 - \xi_1^2) + m_3\xi_3(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$$

Die Gegenschaar also, deren Leitcurve eine Gerade ist, ist ein Strahlenbüschel 3ter Classe, d. h. ein solches, von welchem durch einen Punkt der Ebene höchstens 3, immer aber ein Strahl geht. Sie enthält, da

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2$$

der Gleichung 1) genügt, alle sich selbst entsprechenden Geraden, darunter die ∞ ferne Gerade, ferner die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$, die Gerade m und deren Ssg, und die Berührungspunkte auf m sind die Punkte, in denen m von den sich selbst entsprechenden Geraden geschnitten wird. Sie enthält endlich die Geraden A_1M_1, A_2M_2 A_3M_3, wenn die M die Schnittpunkte von m mit den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bedeuten.

Die Gegenschaar zerfällt, wenn

$$m_1 = m_2$$

allgemeiner, wenn

$$m_1^2 = m_2^2 \quad \text{oder} \quad m_2^2 = m_3^2 \quad \text{oder} \quad m_3^2 = m_1^2 \text{ ist,}$$

d. h. wenn m zu einer Dreieckseite parallel oder durch $D_1D_2D_3$ geht (Schnittpunkte von je 2 sich selbst entsprechenden Seiten). Für

$$m_1 = m_2$$

z. B. erhält man

$$m_1(\xi_2-\xi_1)(\xi_1\xi_2+\xi_3^2)+m_3\xi_3(\xi_1^2-\xi_2^2)=0$$

zerfallend in

$$\xi_1=\xi_2 \quad \text{und}$$

$$m_1(\xi_1\xi_2+\xi_3^2)-m_3\xi_3(\xi_1+\xi_2)=0$$

Diese Γ^3 enthält auch A_2A_3, A_3A_1, D_2D_3 und D_3D_1.

2) Die Leitcurve sei eine Curve $n$ter Ordnung, deren Gleichung ist

$$f_n(x_1x_2x_3)=0$$

Wenn die durch P gehenden Ssg die Coordinaten ξ_i' und $\frac{1}{\xi_i'}$ haben, so ergeben sich die Punktcoordinaten ihres Schnittpunkts aus

$$\xi_1'x_1+\xi_2'x_2+\xi_3'x_3=0$$

$$\frac{x_1}{\xi_1'}+\frac{x_2}{\xi_2'}+\frac{x_3}{\xi_3'}=0$$

also

$$x_1:x_2:x_3=\xi_1(\xi_2^2-\xi_3^2):\xi_2(\xi_3^2-\xi_1^2):\xi_3(\xi_1^2-\xi_2^2)$$

Durch Einsetzen dieser Werte wird

$$f_n(x_i)=0$$

eine Gleichung $3n$ten Grades in ξ_i.

Durchläuft z. B. der Punkt die Ellipse von Artzt

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$$

so ist die entsprechende Γ^6 von der Form

$$\frac{\xi_2\xi_3}{\xi_2^2-\xi_3^2}+\frac{\xi_3\xi_1}{\xi_3^2-\xi_1^2}+\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}=0$$

Also hat sich ergeben:

„Duchläuft ein Punkt eine Curve $n$ter Ordnung, so bilden die „durch ihn gehenden Seitensymmetriegeraden im allgemeinen ein „Strahlenbüschel der Classe $3n$“.

Eine andere Methode Gegenschaaren zu erhalten, soll für diejenigen 3ter Classe gezeigt werden. Die Gleichung

$$P=p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3$$

geht durch Vertauschung der ξ_i mit ihren reciproken Werten $\frac{1}{\xi_i}$ und Multiplication der Gleichung mit $\xi_1 . \xi_2 . \xi_3$ über in

$$P = p_1 \xi_2 \xi_3 + p_2 \xi_3 \xi_1 + p_3 \xi_1 \xi_2$$

Bedeuten R und R', Q und Q' u. s. w. ebenfalls solche Ausdrücke und c eine constante Grösse, so ist

$$1) \quad c_1 . P . P' + c_2 . Q . Q' + c_3 . R . R' + \ldots = 0$$

die Gleichung einer Gegenschaar der 3ten Classe. Denn jeder Summand ist vom 3ten Grade und beim Einsetzen der $\frac{1}{\xi_i}$ für die ξ_i und folgender Multiplication mit $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ geht P in P' u. s. w., die Gleichung also in sich selbst über, d. h. die Geraden sind paarweise Symmetriegeraden. Da PQ' für die ξ_i ein homogener Ausdruck 3ten Grades ist und durch Einsetzen der reciproken Werte der ξ_i für die ξ_i selbst übergeht in $P' . Q$, so erhält man auch Gegenschaaren in der Form

$$PQ' \pm P'Q = 0$$

oder allgemeiner

$$2) \quad c_1(P . Q' \pm P' . Q) + c_2(R . S' + R'S) + \ldots = 0 \quad \text{und}$$

$$3) \quad c_1(P . Q' - P' . Q) + c_2(R . S' - R' . S) + \ldots = 0 \quad \text{und}$$

$$4) \quad c_1(PQ' + P'Q) + c_2(RS' + R'S) + \ldots + \gamma_1 P . P' + \gamma_2 Q . Q' + - \ldots = 0$$

4) ergiebt sich durch Combination von 1) und 2), eine solche von 1) und 3) giebt keine Gegenschaar, denn für 3) ist nach Einsetzung der $\frac{1}{\xi_i}$ an Stelle der ξ_i und einer nachfolgenden Multiplication mit $\xi_1^2 . \xi_2^2 . \xi_3^2$ auch eine solche mit -1 erforderlich, um die alte Gleichungsform wieder herzustellen. Also würde die Gleichung

$$(PQ' - P'Q) + PP' = 0$$

übergehen in

$$(PQ' - P'Q) - P . P' = 0$$

also nicht in sich selbst.

Die Gleichungen 1), 2) und 4) erscheinen bei unserer Untersuchung in der gemeinsamen Form

$$\text{I.} \quad \frac{\xi_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2 + \xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{n_3} + \varepsilon . \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

die Gleichung 3) in der Form

$$\text{II.} \quad m_1 \xi_1(\xi_2^2 - \xi_3^2) + m_2 \xi_2(\xi_3^2 - \xi_1^2) + m_3 \xi_3(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$$

Die letztere ist uns bereits bekannt; ihre Leitcurve ist eine Gerade (S. 298). Ehe wir I. untersuchen, wollen wir die anderen Gegenschaaren 3ter Classe bestimmen. I. und II. stimmen darin überein, dass die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ zur Gegenschaar gehören. Diese Bedingung lassen wir fallen, Angenommen, die durch A_1 gehenden Strahlen der Schaar wären verschieden von A_1A_2 und A_1A_3, dann müssten auf A_2A_3 3 Berührungspunkte liegen, oder A_2A_3 wäre ein 3 facher Strahl der Γ^3, was unmöglich ist. Also bleibt uns noch der Fall, dass A_2A_3 eine Doppeltangente und eine der anderen Seiten, etwa A_1A_3 einfacher Strahl der Γ^3 ist. Dann ist die Gleichung der Schaar

$$\xi_3^2 \,.\, P + \xi_2 \,.\, R = 0, \quad \text{da für} \quad \xi_3 = 0$$

die übrigen Glieder ξ_3^2 als Factor haben müssen. Infolge der Bedingung, dass die Schaar sich selbst entspricht, findet man leicht $R = P'$; also

$$\text{III.} \qquad \xi_i P \pm \xi_k \,.\, P' = 0$$

wenn i und $k = 1, 2, 3$ sind.

Diese Gleichungen bieten kein besonderes Interesse, wol aber die Gegenschaaren von der Form I., zu deren näheren Untersuchung wir jetzt gehen wollen.

Zur Gegenschaar

$$\frac{\xi_1(\xi_2^2+\xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2+\xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2+\xi_2^2)}{n_3} + \varepsilon\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3 = 0$$

gehören zuerst die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$, dann die Verbindungslinien des Punktes $N(x_i = n_i)$ mit A_1, A_2 und A_3, denn für $\xi_1 = 0$ ist

$$\frac{\xi_2\xi_3^2}{n_2} + \frac{\xi_3\xi_2^2}{n_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_2\xi_3\left(\frac{\xi_2}{n_2} + \frac{\xi_3}{n_3}\right) = 0$$

d. h. durch A_1 geht ausser A_1A_2 und A_1A_3 der Strahl

$$n_3\xi_3 + n_2\xi_2 = 0$$

Die für die 3 Ecken so erhaltenen Strahlen gehen durch den Punkt

$$n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + n_3\xi_3 = 0$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = n_1 : n_2 : n_3$$

Der Sgp von N liefert die Berührungspunkte auf den Seiten des

Dreiecks. Da die Γ^3 die Seiten des vollständigen Vierecks, gebildet aus A_1, A_2, A_3 und N enthält, so muss sie geschrieben werden können

$$N \cdot u - \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdot v = 0$$

worin

$$N = n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + n_3\xi_5 \quad \text{ist.}$$

Man findet

$$u = n_1\xi_2\xi_3 + n_2\xi_3\xi_1 + n_3\xi_1\xi_2$$

$$v = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3} - 2$$

also ist $u = 0$ der zum Punkte N gehörende Kegelschnitt. Die Gleichung I. lautet dann

$$(n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + n_3\xi_3)\left(\frac{\xi_2\xi_3}{n_1} + \frac{\xi_3\xi_1}{n_2} + \frac{\xi_1\xi_2}{n_3}\right) + \left(-\varepsilon + \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3}\right)\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

Für

$$\varepsilon = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3}$$

zerfällt also die Γ^3 in das Strahlenbüschel N und dessen Ssg, oder die Tangenten des zugehörigen Kegelschnitts:

$$n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + n_3\xi_3 = 0$$

$$\frac{n_1}{\xi_1} + \frac{n_2}{\xi_2} + \frac{n_3}{\xi_2} = 0$$

Wir betrachten die Leitcurve der Gegenschaar I., d. h. den Ort der Schnittpunkte der in der Schaar enthaltenen Ssg. Schreibt man I. nach Division $\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\frac{\frac{\xi_2}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_2}}{n_1} + \frac{\frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi_3}}{n_2} + \frac{\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1}}{n_3} + \varepsilon = 0$$

und benutzt

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{x_2 x_3}$$

so erhält man sofort

$$\alpha) \quad \frac{x_1}{n_1}(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_2}{n_2}(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_3}{n_3}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - \varepsilon x_1 x_2 x_3 = 0$$

Die Leitcurve von I. ist also eine Curve 3ter Ordnung; sie geht durch die Mittelpunkte $D_1 D_2 D_3$ der Dreiecksseiten, durch die ∞ fernen Punkte der Seiten, durch die Schnittpunkte der Geraden $A_1 N$, $A_2 N$ und $A_3 N$ mit den Gegenseiten des Dreiecks.

Zerfällt die Γ^3 (s. oben), so wird aus α)

$$\beta)\quad \frac{x_1}{n_1}(-x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\frac{x_2}{n_2}(x_1^2-x_2^2+x_3^2) \\ +\frac{x_3}{n_3}(x_1^2+x_2^2-x_3^2)-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{n_1 n_2 n_3}x_1 x_2 x_3 = 0$$

oder nach einigen Veränderungen

$$\gamma)\quad (x_1+x_2+x_3)\cdot\left[\frac{x_1}{n_1}(-x_1+x_2+x_3)+\frac{x_3}{n_3}(x_1+x_2-x_3)\right] \\ -\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{n_1 n_2 n_3}\cdot x_1\, x_2\, x_3 = 0$$

Die Leitcurve schneidet also die Seiten des Dreiecks ausser in den ∞ fernen Punkten in 6 Punkten eines dem Dreieck $D_1 D_2 D_3$ umgeschriebenen Kegelschnitts, die Gleichung ist

$$\delta)\quad \frac{x_1}{n_1}(-x_1+x_2+x_3)+\frac{x_2}{n_2}(x_1-x_2+x_3)+\frac{x_3}{n_3}(x_1+x_2-x_3) = 0$$

Die Umformung von β) kann auch so geschehen, dass $x_1+x_2-x_3$, allgemein $(x_1 \pm x_2 \pm x_3)$ als Factor des ersten Products erscheint, z. B.

$$\varepsilon)\quad (x_1+x_2-x_3)\left[\frac{x_1}{n_1}(-x_1+x_2-x_3)+\frac{x_2}{n_2}(x_1-x_2-x_3)\right. \\ \left.+\frac{x_3}{n_3}(x_1+x_3+x_3)\right]-\frac{(x_1+x_2-x_3)^2}{n_1 n_2 n_3}\cdot x_1\, x_2\, x_3 = 0$$

Die Betrachtung von γ) lehrt uns, dass hier die Leitcurve zerfällt, wenn

$$n_1+n_2+n_3 = 0$$

ist, in die ∞ ferne Gerade und den Kegelschnitt δ; ε aber und die analogen Gleichungen zeigen, dass dies auch stattfindet für

$$\zeta)\quad n_1 \pm n_2 \pm n_3 = 0$$

Es ist

$$n_1+n_2+n_3 = 0$$

die Bedingung dafür, dass der Punkt N auf der ∞ fernen Geraden

$$x_1 + x_2 + x_3$$

liegt, wie schon gesagt wurde; der zugehörige Kegelschnitt ε ist eine Parabel, denn bringt man ihn zum Schnitt mit

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und setzt

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

so wird

$$\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)^2 = 0$$

was zeigt, dass die ∞ ferne Gerade Tangente und N ihr ∞ ferner Punkt ist.

Da β der Ort der Schnittpunkte der Strahlen des Büschels N mit dem Ssg ist, so hat sich also ergeben:

„Die Strahlen eines Büschels N werden von ihren Seitensym-„metriegeraden in den Punkten einer Curve 3ter Ordnung geschnit-„ten, welche zerfällt, wenn N auf einer der sich selbst entsprechen-„den Geraden liegt, in diese Gerade und einen sie berührenden „Kegelschnitt, welcher dem von den 3 anderen sich selbst entspre-„chenden Geraden gebildeten Dreieck umgeschrieben ist. Im be-„sonderen werden parallele Geraden von ihren Ssg in einer durch „$D_1 D_2 D_3$ gehenden Parabel geschnitten, deren Axe den Geraden „parallel ist, und welche die von den Ssg umhüllten Parabel be-„rührt.“

Ist P ein beliebiger Punkt, v eine durch ihn gehende Gerade, v_1 deren Ssg, und schneidet die zum Punkte P gehörende C^3 v_1 ausser im Punkte vv_1, noch in den Punkten S und T, so sind die S und T die Ordnungspunkte der involutorischen Punktreihen, in welchen v_1 von den Strahlen des Büschels P und deren Ssg geschnitten werden.

Wir kehren zu der nicht zerfallenden Gegenschaar zurück, deren Gleichung war

$$\eta)\qquad \frac{\xi_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2 + \xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{n_3} + \varepsilon\, \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

deren Leitcurve ist

$$\varkappa)\quad \frac{x_1}{n_1}(-x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\frac{x_2}{n_2}(x_1^2-x_2^2+x_3^2)$$
$$+\frac{x_3}{n_3}(x_1^3+x_2^2-x_3^2)-\varepsilon x_1 x_2 x_3=0$$

Diese C^3 kann zerfallen, ohne dass die $T^3(\eta)$ zerfällt, in einen Kegelschnitt und eine Gerade. Setzt man nämlich die linke Seite von

$$k = (a_1 x_1 + a_2 x_2 a_3 x_3)$$
$$(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + \partial_1 x_2 x_3 + \partial_2 x_3 x_1 + \partial_3 x_1 x_2)$$

so erhält man

$$a_1 b_1 = -\frac{1}{n_1},\quad a_2 b_2 = -\frac{1}{n_2},\quad a_3 b_3 = -\frac{1}{n_3}$$

Berechnet man ferner die Coefficienten von $x_2^2 x_3$ und $x_3^2 x_2$, so muss sein

$$a_3^2 \partial_1 \,.\, n_2 \,.\, n_3 = a_2 n_2 + a_3 n_3$$
$$a_2^2 \partial_1 \quad n_2 \quad n_3 = a_2 n_2 + a_3 n_3$$

woraus folgt

$$a_2^2 = a_3^2$$

Die Bedingung für das Zerfallen der $C^3(k)$ ist also

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$$

Wir nehmen zuerst

$$a_1 = a_2 = a_3$$

dann wird

$$\partial_1 = \frac{n_2+n_3}{a_1 n_2 n_3},\quad -\varepsilon = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + a_3 \partial_3 = 2\,\frac{n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2}{n_1 n_2 n_3}$$

Die Gleichung k lautet dann

$$\frac{x_1}{n_1}(-x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\frac{x_2}{n_2}(x_1^2-x_2^2+x_3^2)+\frac{x_3}{n_3}(x_1^2+x_2^3-x_3^2)$$
$$+2x_1 x_2 x_3\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)=0$$

sie zerfällt in

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und

$$\lambda)\quad \frac{x_1}{n_1}(-x_1+x_2+x_3)+\frac{x_2}{n_2}(x_1-x_2+x_3)+\frac{x_3}{n_3}(x_1+x_2-x_3)=0$$

Die letzte Gleichung stellt einen dem Dreieck $D_1D_3D_3$ umgeschriebenen Kegelschnitt dar. Die Gleichung der zugehörigen Gegenschaar ist

$$\frac{\xi_1(\xi_2^2+\xi_3^2)}{n_1}+\frac{\xi_2(\xi_3^2+\xi_1^2)}{n_2}+\frac{\xi_3(\xi_1^2+\xi_2^2)}{n_3}$$
$$-2\xi_1\xi_2\xi_3\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)=0$$

oder

$$\frac{\xi_1}{n_1}(\xi_2-\xi_3)^2+\frac{\xi_2}{n_2}(\xi_3-\xi_1)^2+\frac{\xi_3}{n_3}(\xi_1-\xi_2)^2=0$$

Sie enthält ausser den genannten Strahlen stets die ∞ ferne Gerade als Doppeltangente.

„Es wird später bewiesen werden, dass die Aymptoten der Hyperbeln eines Kegelschnittbüschels eine solche T^3 bilden.“

Die Leitcurve der Gegenschaar n zerfällt, wenn

$$a_1=\pm a_2=\pm a_3$$

ist; berücksichtigen wir jetzt auch noch die negativen Zeichen. Mit den a_i wechseln die b_i ihr Vorzeichen, während die ∂_i ihre Zeichen behalten. Die Folge davon ist, dass der Kegelschnitt λ einem andern der 4 von den sich selbst entsprechenden Geraden gebildeten Dreiecken umschrieben sein muss. Im Falle, dass er auch noch die 4te sich selbst entsprechende Gerade berührt, zerfällt die Gegenschaar, was oben bereits besprochen wurde. λ kann ferner zerfallen in 2 Geraden, so werden wir wieder auf Gegenschaaren geführt, deren Leitcurve Geraden sind und zwar auf einen besonderen Fall des allgemeinen.

Fassen wir unsere Resultate zusammen:

Es giebt 2 Arten der Gegenschaaren 3ter Classe mit ξ_i symmetrischen Gleichungen. Diejenigen der ersten Art sind die Paare von Ssg, deren Schnittpunkte auf einer Geraden liegen; zu der Geraden $\xi_i = m_i$ gehört die Gegenschaar

$$m_1\xi_1(\xi_2^2-\xi_3^2)+m_2\xi_1(\xi_3^2-\xi_1^2)+m_3\xi_3(\xi_1^2-\xi_2^2)=0$$

Die Gegenschaaren der 2ten Art haben die Gleichung

$$\frac{\xi_1}{m_1}(\xi_2^2+\xi_3^2)+\frac{\xi_2}{m_2}(\xi_3^2+\xi_1^2)+\frac{\xi_3}{m_3}(\xi_1^2+\xi_2^2)+\varepsilon\,\xi_1\xi_2\xi_3=0$$

Es sind bei constanten n_1, n_2, n_3 die variabelen ε die Strahlenbüschel 3ter Classe, welche in den 6 Seiten eines vollständigen

Vierseits und in den Berührungspunkten auf dreien von ihnen übereinstimmen. Die Leitcurve einer solchen T^3 ist eine C^3 mit der Gleichung

$$\Sigma \frac{x_i}{n_i}(-x_i^2 + x_i^2 + x^2) - \varepsilon x_1 x_2 x_3 = 0$$

Für constante n_i und variabeles ε sind es die C^3 eines c^3 Büschels. Die Gegenschaar zerfällt in ein gewöhnliches Strahlenbüschel N und deren Ssg, also Γ^2 für

$$\varepsilon = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3}$$

Die Leitcurve zerfällt, wenn

$$\varepsilon = -2\left(\frac{1}{n_1} \pm \frac{1}{n_2} \pm \frac{1}{n_3}\right)$$

ist, in eine sich entsprechende und einem Kegelschnitt, welcher dem von den anderen sich selbst entsprechenden Geraden gebildeten Dreieck umgeschrieben ist. Die dazu gehörige Gegenschaar ist

$$\frac{\xi_1}{n_1}(\xi_2 - \xi_3)^2 \pm \frac{\xi_2}{n_2}(\xi_3 - \xi_1)^2 \pm \frac{\xi_3}{n_3}(\xi_1 - \xi)^2 = 0$$

Gegenschaar und Leitcurve zu gleicher Zeit, wenn N auf eine der sich selbst entsprechenden Geraden, also auf der ∞ fernen Geraden oder auf eine Seite des Dreiecks $D_1 D_2 D_3$ liegt. Die Gleichungen sind dann

$$n_1 \xi_2 \xi_3 \pm n_2 \xi_3 \xi_1 \pm n_3 \xi_1 \xi_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{n_1}(-x_1 + x_3 + x_3) \pm \frac{x_2}{n_2}(x_1 - x_2 + x_3) \pm \frac{x_3}{n_3}(x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

$$n_1 \pm n_2 \pm n_3 = 0$$

Besonders bemerkenswert von den dem Dreieck $D_1 D_2 D_3$ umgeschriebenen Kegelschnitten (Gl. λ S. 31) ist der Feuerbach'sche Kreis, für welchen N auf den Höhenschnitt

$$\left(n_i = \frac{1}{\cot A_i}\right)$$

fällt. Seine Gleichung lautet also

$$x_1 \cot A_1(-x_1 + x_2 + x_3) + x_2 \cot A_2 (x_1 - x_2 + x_3) \\ + x_3 \cot A_3 (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

und die dazu gehörige Gegenschaar ist

$$\cot A_1\, \xi_1(\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2\, \xi_2(\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3\, \xi_3(\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

Diese wichtige Gegenschaar werden wir im Abschnitt 3 besonders behandeln.

7. Die Seitensymmetriegeraden als Asymptoten der dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umgeschriebenen Hyperbeln.

Die Geraden p und q mit ihrem Ssg p' und q' mögen dargestellt sein durch

$$\Sigma p_i x_i = 0; \quad \Sigma q_i x_i = 0; \quad \Sigma \frac{x_i}{p_i} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{x_i}{q_i} = 0$$

Dann ist

$$\alpha) \qquad \Sigma p_i x_i \, \Sigma \frac{x_i}{p_i} - \Sigma q_i x_i \, \Sigma \frac{x_i}{q_i} = 0$$

ein Kegelschnitt, welcher durch die Ecken des Vierecks $pqp'q'$ geht. Die Quadrate der Coordinaten fallen weg, und seine Gleichung ist

$$\beta) \quad x_2 x_3 \left[\frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} - \left(\frac{q_2}{q_3} + \frac{q_3}{q_2}\right)\right] + x_3 x_1 \left[\frac{p_3}{p_1} + \frac{p_1}{p_3} - \left(\frac{q_3}{q_1} + \frac{q_1}{q_3}\right)\right] + x_1 x_2 \left[\frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1}\right)\right] = 0$$

und ist also auch dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umgeschrieben.

Ist nun q eine sich selbst entsprechende Ssg. also

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = 1$$

so wird aus Gl. α)

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)\left(\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3}\right) = (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^2$$

d. h. die Geraden p und p' sind Tangenten des Kegelschnitts und ihre Berührungssehne die Gerade

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$$

Also haben wir den Satz:

„Wenn 2 beliebige Seitensymmetriegeraden eine sich selbst ent- „sprechende Gerade in den Punkten U und V schneiden, so berührt „der Kegelschnitt $A_1 A_2 A_3\, U V$ jene Geraden."

Da es 4 sich selbst entsprechende Ssg giebt, so folgt durch Parallelprojection allgemein:

Durch die 3 Punkte $A_1 A_2 A_3$ können 4 die festen Geraden p und p' berührende Kegelschnitte gelegt werden; die Verbindungslinien zusammengehöriger Berührungspunkte schneiden sich paarweise auf den Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$; es sind die sich selbst entsprechenden Geraden in dem involutorischen Liniensystem, das durch das Grunddreieck $A_1 A_2 A_3$ und p und p' als entsprechende Geraden gegeben ist. Jene Kegelschnitte sind reell, wenn das Liniensystem reelle sich selbst entsprechende Geraden besitzt.

Für die ∞ ferne, als Ssg sich selbst zugeordnete Gerade folgt nun:

„Je zwei Seitensymmetriegeraden sind die Asymptoten einer dem „Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umgeschriebenen Hyperbel."

Die Gleichung einer solchen folgt aus β) für

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

$$\gamma) \quad p_1(p_2 - p_3)^2 \cdot x_2 x_3 + p_2(p_3 - p_1)^2 \cdot x_3 x_1 + p_3(p_1 - p_2)^2 x_1 x^2 = 0$$

Umgekehrt sind also die Asymptoten einer dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umgeschriebenen Hyperbel Ssg für das Dreieck $A_1 A_3 A_3$ wie bekannt. Angenommen, die Hyperbel γ ginge durch den Punkt

$$N(x_i = n_i)$$

wenn man dann γ durch $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ dividirt, so wird

$$\delta) \quad \frac{p_1}{n_1} p_2 - p_3)^2 + \frac{p_2}{n_2}(p_3 - p_1)^2 + \frac{p_3}{n_3}(p_1 - p_2)^2 = 0$$

Vergleicht man dies mit der S. 306 gegebenen Gleichung einer Gegenschaar, deren Leitcurve ein dem Dreieck $D_1 D_2 D_3$ umgeschriebener Kegelschnitt war, so findet man vollständige Uebereinstimmung.

Die Grössen p_i sind nämlich die Liniencoordinaten der Geraden p und p'; also gilt der Satz:

„Die Asymptoten der durch die festen Punkte $A_1 A_2 A_3 N$ gehen„den Hyperbeln bilden ein Strahlenbüschel 3ter Classe δ. Die „Mittelpunktscurve des Kegelschnittbüschels ist"

$$\frac{x_1}{n_1}(-x_1 + x_2 + x_3) + \frac{x_2}{n_2}(x_1 - x_2 + x_3) + \frac{x_3}{n_3}(x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

Wir wollen jetzt die dem Dreieck umgeschriebenen Hyperbeln mit gleichen Asymptotenwinkeln untersuchen. Wird der eine Winkel, den die Geraden

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

und

$$p_1' x + p_2' x_2 + p_3' x_3 = 0$$

bilden, mit θ bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\sin\theta = \pm \frac{\Sigma(p_j p_i' - p_i p_j')}{\Sigma\left(\frac{p_i p_i' \sin^2 A_i}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}\right) - \Sigma(p_j p_i' + p_i p_j')\cot A_k}$$

positiv oder negativ zu wählen, je nachdem θ spitz oder stumpf ist.

Da hier

$$p_i = \frac{1}{p_i'}$$

ist, so erhält man, wenn man

$$\frac{\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \sin^2 A_3}{\sin A_1 \,.\, \sin A_2 \,.\, \sin A_3} = U \text{ setzt,}$$

$$\delta)\quad \pm\tan\theta \,.\, \left[U - \left[\left(\frac{p_3}{p_2} + \frac{p_2}{p_3}\right)\cot A_1 + \left(\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_3}{p_1}\right)\cot A_2 + \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2}\right)\cot A_3\right]\right] = \left(\frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_1}{p_3}\right) + \left(\frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1}\right)$$

Es ist nun

$$U = 2(\cot A_1 + \cot A_2 + \cot A_3)$$

ferner die rechte Seite von δ

$$= \frac{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)}{p_1 p_2 p_3}$$

Ersetzt man die p_i als Liniencoordinaten der Geraden, von denen wir ausgingen, durch ξ_i und multiplicirt mit $\xi_1 \,.\, \xi_2 \,.\, \xi_3$, so erhält man aus δ die Gleichung

$$\varepsilon)\quad (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1) \mp \tan\theta \,.\, [\cot A_1 \,.\, \xi_1(\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2\, \xi_2(\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3\, \xi_3(\xi_1 - \xi_2)^2] = 0$$

Der Winkel θ muss hierbei, ebenso wie die Wkl. A_i in einer bestimmten Drehungsrichtung gemessen werden, etwa im Sinne des sich drehenden Uhrzeigers. Dann enthält ε erstens nach Voraussetzung alle Geraden der Ebene, welche von ihren Ssg unter dem Wkl. θ geschnitten werden. ε enthält aber zweitens auch diese schneidenden Geraden. Für sie hat man nur das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen; denn wenn m eine Gerade von ε, m' ihre Ssg, und

$$mm' = \theta \text{ ist, so ist } m'm = 180^0 - \theta$$

Setzt man

$$180^0 - \theta = \theta'$$

so muss die Gleichung aller Geraden m' die Form haben (wenn man für den ersten Fall das obere Zeichen wählt)

$$(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1) - \tan\theta' \,.\, f(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3) = 0$$

oder

$$(\xi_1 - \xi_2)\,.\,(\xi_2 - \xi_3)\,.\,(\xi_3 - \xi_1) + \tan\theta \,.\, f(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3) = 0$$

was sich bewahrheitet, wenn man in ε die ξ_i durch $\frac{1}{\varepsilon_i}$ ersetzt. Beide Gleichungen zusammen repräsentiren die gesuchten Asymptoten. Man hat also den Satz:

„Die Asymptoten der dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen „Hyperbeln mit gleichen Asymptotenwinkeln bilden im allgemeinen „zwei Strahlenbüschel 3ter Classe, der Art, dass die beiden Asymp- „toten jeder Hyperbel entsprechende Seitensymmetriegeraden in den „Büscheln sind."

Für $\theta = 90^0$ muss der Factor von $\tan\theta$ in ε verschwinden, also ist die Bedingung für die sich rechtwinklig schneidenden Asymptoten

$$\cot A_1 \,.\, \xi_1(\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2 \,.\, \xi_2(\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3 \,.\, \xi_3(\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

es sind die Asymptoten der gleichseitigen, dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen Hyperbeln. Die Werte

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$$

erfüllen die Gleichung und geben die ∞ ferne Gerade, welche, wie bekannt, als auf sich selbst senkrecht betrachtet werden kann.

Die Mittelpunkte der betrachteten Hyperbeln, deren Asymptoten gleiche Winkel bilden, liegen bekanntlich auf einer Curve 4ter Ordnung (s. u. A. Bücking, a. a. O. 8. 13). Wir wollen mit Hilfe des Vorhergehenden die Gleichung dieser C^4 ableiten. Die Asymptoten einer Hyperbel seien

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$$

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0$$

Daraus folgen die Coordinaten des Mittelpunkts

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1(p_2^2 - p_3^2) : p_2(p_3^2 - p_1^2) : p_3(p_1^2 - p_2^2)$$

Man setze

$$x_1 = p_1(p_2^2 - p_3^2)$$

und hat dann

$$\eta) \quad x_1 + x_2 + x_3 = p_1 p_2 p_3 \left[\left(\frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_1}{p_3}\right) + \left(\frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1}\right)\right]$$

ferner ist

$$\frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{x_2 x_3}$$

also

$$\frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_2} = \frac{\varphi}{x_2 x_3}$$

wenn

$$\varphi^2 = -(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)$$

ist, also

$$\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_1}{p_3} = \frac{\varphi}{x_3 x_1}$$

$$\frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1} = \frac{\varphi}{x_1 x_2}$$

Demnach aus η

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \varphi$$

oder

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{\varphi}$$

Wir haben jetzt die Mittel ε umzuformen. Wenn

$$\Sigma p_i x_i = 0$$

eine Gerade ist, deren Liniencoordinaten ε genügen, so hat man, indem man auf δ zurückgreift,

$$p_1(p_2^2 - p_3^2) + p_2(p_3^2 - p_1^2) + p_3(p_1^2 - p_2^2)$$
$$\mp \tan\theta\,[\cot A_1 \cdot p_1)p_2 - p^2)^2 + \ldots] = 0$$

Es ist aber

$$p_1(p_2 - p_3)^2 = p_1 p_2 p_3 \left(\frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} - 2\right)$$
$$= -\frac{x_1 x_2 x_3}{\varphi} \cdot \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)}{x_2 x_3}$$

demnach

$$x_1 + x_2 + x_3 \pm \tan\theta \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\varphi}$$
$$\cdot [\cot A_1 x_1 (-x_1 + x_2 + x_3) + \ldots] = 0$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und

$$[\cot A_1 x_1(-x_1 + x_2 + x_3) + \ldots] \pm \varphi \cot \theta = 0$$

setzt man den Wert von φ ein und hebt aufs Quadrat, so ist

$$[\Sigma \cot A_i \cdot x_i(-x_i + x_j + x_k)]^2$$
$$+ \cot^2\theta(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

„Diese Curve 4ter Ordnung enthält also die Mittelpunkte der dem „Dreieck $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen Hyperbeln mit gleichen Asymp- „totenwinkeln θ."

Die Curve hat D_1, D_2, D_3 zu Doppelpunkten und geht durch die 2 ∞ fernen imaginären Kreispunkte.

Hier fällt der Unterschied zwischen θ und $(180^0 - \theta)$, welchen wir in ε und ϑ wahrnahmen, weg, wie zu erwarten war.

Sie zerfällt für $\theta = 90^0$ und wir kommen mit

$$\Sigma \cot A_i \cdot x_i \cdot (-x_i + x_j + x_k) = 0$$

auf den Feuerbach'schen Kreis zurück; ferner treten für $\theta = 0^0$ statt der Curve die 4 als Ssg sich selbst entsprechenden Geraden $\varphi^2 = 0$ auf.

8. Normale Seitensymmetriegeraden oder die Fusspunktlinien des Dreiecks; die Curve von Steiner.

Die Gesamtheit der zu einander normalen Ssg bildet, wie wir abgeleitet haben, ein Strahlenbüschel 3ter Classe, dessen Gleichung ist

$$\cot A_1 \xi_1 (\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2 \xi_2(\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3(\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

Durch jeden Punkt der Ebene gehen also höchstens 3, wenigstens aber eine dieser Geraden. Sie sind die Strahlen einer Gegenschaar, deren Leitcurve der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks ist mit der Gleichung:

$$\cot A_1 x_1(-x_1 + x_2 + x_3) + \cot A_2 x_2(x_1 - x_2 + x_3)$$
$$\cot A_3 x_3(x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

d. h. der Schnittpunkt von je 2 aufeinander senkrecht stehenden Ssg liegt auf dem Feuerbach'schen Kreise.

Diese Geraden sind auch die Asymptoten der dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln, ferner die Scheiteltangenten der dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und endlich die Axen der dem Dreieck $D_1 D_2 D_3$ eingeschriebenen Parabeln. Auch sieht man leicht, dass sie die Fusspunktlinien oder Simsongeraden des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ sind; denn man erhält eine solche, wenn man von einem beliebigen Punkt P des Kreises $A_1 A_2 A_3$ auf die Dreiecksseiten die Lote fällt und deren Fusspunkte, die auf einer Geraden p liegen, verbindet. Denn p ist nichts anders als die Scheiteltangente der dem Dreieck eingeschriebenen Parabel π mit dem Brennpunkte P.

So sehen wir, dass die zu einander normalen Ssg eine vielseitige und deshalb wichtige Rolle in der Geometrie des Dreiecks spielen. Viele Mathematiker haben sich mit ihnen beschäftigt, seitdem Steiner nachgewiesen hatte, dass sie eine Curve der 3. Classe und 4 ter Ordnung mit 3 Spitzen (die sog. Steiner'sche Curve) umhüllen. Steiner gab eine Reihe von Sätzen ohne Beweis im 53. Band von Crelle's Journal. Schröter behandelte im 54. Band die Sache synthetisch. Er betrachtet die Fpl. als Verbindungslinien der Punkte des F. Kreises und deren ∞ fern liegenden Winkelgegenpunkte für das Dreieck $D_1 D_2 D_3$. „Durch einen Punkt a des Kreises geht ein fester Strahl aa_1 und ein beweglicher Strahl ax, welcher in den x den Kreis zum andern Male trifft. Trägt man den Winkel xaa_1 an den Schenkel aa_1 entgegengesetzt an, so dass der andere Schenkel ax_1 dieselbe Neigung zu aa_1 hat, wie ax zu aa_1 und zieht dann durch den Punkt x eine Parallele zu ax_1, so wird dieselbe eine Curve 3 ter Classe umhüllen, während der Punkt x den Kreis durchläuft". Von dieser Definition, welche das Dreieck $D_1 D_2 D_3$ bei Seite lässt, ausgehend, entwickelt er in überaus klarer Weise die Hauptfragen; doch verallgemeinert er das Problem, indem er an die Stelle des Kreises und der ∞ fernen Geraden eine beliebige Punktreihe 2 ter und 1 ter Ordnung setzt.

8 Jahre später (1865) erhob sich unter englischen Mathematikern ein Wettstreit, die Fusspunktlinien analytisch zu untersuchen. Im 7., 8. und 9. Bande des Quarterly Journal of pure and applied Mathematics findet man eine Reihe von Aufsätzen von Green, Ferrers, Cayley, Walton über unsere Geraden. Green gab die Gleichung der Fusspunktlinie des Punktes $(\alpha\beta\gamma)$ für das Dreieck ABC in trimetrischen Coordinaten (x, y, z) in der Form

$$X\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)+Y\mu(\mu-\nu)(\mu-\lambda)+Z\nu(\nu-\lambda)(\nu-\mu)=0$$

(worin $X = x \,.\, \sin A \,.\, \tan A$, $\lambda = \dfrac{\cos A}{\alpha}$) und die Gleichung der Enveloppe; doch fügt er hinzu: I am forced to conclude for my part that the easicst method of obtaining the desired eliminant is the straight-formed but unsymmetrical course. Ferrers untersuchte mit Hilfe von cartesischen Coordinaten und erhält für die Enveloppe

$$p = \tfrac{1}{4}a \sin 3\psi$$

worin p das Lot vom Mittelpunkt des F. Kreises (Radius $= \frac{1}{2}a$) auf eine Fpl, und ψ deren Neigungswinkel zu einer festen Axe bedeuten, Im 8. Band füllte Cayley die von Green gelassene Lücke und giebt mit Hülfe Hesse'scher Formeln a symmetrical method zur Ableitung der Tangentialgleichung und der eingehüllten Curve in der Form

$$\frac{1}{(x+y+z)^2}\,\text{recip}\,\{a\xi(\eta-\zeta)^4+\ldots\}=0$$

Dann bestimmte er durch mühsame Rechnungen die Coefficienten, um bei einer sehr complicirten Gleichung zu endigen; s. auch den Nachtrag dazu in demselben Bande S. 75.

Im 9ten Bande gab auch Walton die Gleichung der eingehüllten Curve

$$\frac{a}{L}+\frac{b}{M}+\frac{c}{N}$$

worin $a = \tan A$; L, M und N homogene Functionen 2ten Grades in den laufenden Coordinaten der Curve bedeuten.

Ferrers (Band IX, S. 153) berechnete sie für das Dreieck $W_1 W_2 W_3$ (s. F. 3.) und erhielt

$$(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)^2 - 4x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=0$$

was einfacher geschrieben werden kann als

$$\frac{1}{x_1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x_2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x_3^{\frac{1}{2}}}=0$$

Bezogen auf das Dreieck $v_1v_2v_3$ (s. F. 3.) als Grunddreieck giebt iene Gleichung vermittelst der Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= 7x_1' + x_2' + x_3' \\ x_2 &= x_1 + 7x_2' + x_3' \\ x_3 &= x_1 + x_2' + 7x_3' \end{aligned}$$

Bogen $D_3 D_2$ den Punkt F (s. Fig. 4) und die durch ihn gehende Fpl. FG, so dass

$$\widehat{GU} = 2\widehat{UF}$$

ist. Wir ziehen zu $D_3 D_2$ die parallele Sehne FN und $D_1 N$. Dann liegt der Wgp. von U ∞ weit auf $D_1 N$, also ist

$$FG \parallel ND_1$$

Man setze

$$\widehat{ND_2} = \delta = \widehat{FD_3}$$

und die Wkl. des Dreiecks gleich α_1, α_2 und $\alpha_3 (\alpha_1 > \alpha_2)$. Dann ist

$$\widehat{FN} = 2\alpha_1 - 2\delta = D_1 G; \quad \widehat{D_3 G} = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 + 2\delta$$

$$FG = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 + 3\delta; \quad FU = \delta - 2\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}$$

Wir berechnen UD_1, UD_2 und UD_3 (δ_1, δ_2, δ_3:

$$\delta_3 = \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2}{3}$$

$$\delta_1 = \frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2}{3}$$

$$\delta_2 = \frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3}{3}$$

also ist deren Summe

$$= 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi$$

Denken wir uns nun im Kreise $D_1 D_2 D_3$ einen beliebigen Radius OR ($= 1$) als Axe von Aequipollenzen und Bogen RU, in der Richtung der früheren gemessen, $= u$ gesetzt, so ist

$$OU = \varepsilon^u, \quad OD_1 = \varepsilon^{(\delta_1 + u)}, \quad OD_2 = \varepsilon^{(\delta_2 + u)}, \quad OD_3 = \varepsilon^{(\delta_3 + u)}$$

also

$$OD_1 \,.\, OD_2 \,.\, OD_2 = \varepsilon^{(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 3u)}$$

und da

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi \quad \text{und} \quad \varepsilon^{2\pi} = 1$$

so ist

$$OD_1 \,.\, OD_2 \,.\, OD_3 = \varepsilon^{3u} = OU^3$$

also

$$OU = \sqrt[3]{OD_1 \,.\, OD_2 \,.\, OD_3}\ .$$

Diese Wurzel hat 3 Werte, welche bekanntlich um 120° von einander getrennt sind, und liefert uns die Strecken OU_1, OU_2 und

OU_3. Wir haben also den Satz: „Für jeden Radius des Feuerb. „Kreises als Axe von Aequipollenzen ergeben sich die Radien „nach dem Berührungspunkte der Steiner'schen Curve als Wurzel- „werte von $\sqrt[3]{OD_1 \,.\, OD_2 \,.\, OD_3}$".

Dieser Satz gilt nicht allein für die Punkte D, sondern auch für beliebig viele andere Tripel von Punkten des F. Kreises, nämlich den Seitenmittelpunkten aller Dreiecke, deren Seiten und Höhen Fusspunktlinien sind.

Da $UG = 2UF$ ist (s. d. Fig.); so ist, wenn man die Axe der Aequipollenzen nach OF legt

$$OU = \sqrt[3]{OG}$$

Auch diese Gleichung liefert uns 3 Punkte, welche Teilpunkte der in derselben Richtung gemessenen Bögen FG, $FG + 2\pi$, $FG + 4\pi$ sind (s. diese Teilung, schon angewandt bei van Schooten in seinen coment. zur geometria des Descartes, Ausgabe 1683, p. 345 ff., de cubicarum aequitionum resolutione)

Endlich folgt aus

$$OU = \sqrt[3]{OD_1 \,.\, OD_2 \,.\, OD_3}$$

und

$$OU = \sqrt[3]{OG}$$

$$OG = OD_1 \,.\, OD_2 \,.\, OD_3$$

gültig für die Axe OF. Sie bestimmt zum Punkt F den zugehörigen Punkt G und kann als Definitionsgleichung der Fusspunktlinien (FG) für die Rechnung in Aequipollenzen angesehen werden.

XIII.

Ueber eine Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck.

Von

Dr. **Dziobek,**

Professor in Charlottenburg.

In einer Abhandlung (gesammelte Werke, Bd. III, Nachlass pag. 481--490) hat Gauss für ein gegebenes rechtwinklig sphärisches Dreieck ein Fünfeck besonderer Art, nämlich ein solches, dessen fünf Diagonalen sämtlich Quadranten sind — von ihm Pentagramma mirificum genannt — angegeben, aus dessen Betrachtung unter Anderen sich auf der Stelle die merkwürdigen Neper'schen Analogien ergeben. Der Versuch, diese Figur so zu erweitern, dass sie auf irgend ein gegebenes schiefwinkliges sphärisches Dreieck angewendet werden kann, führt zwar zu einer grösseren Zahl von Punkten und Linien, aber doch zu einem Netz von sehr übersichtlichem geometrischen Gepräge, aus dessen analytischer Untersuchung sich recht eigentümliche Formeln für die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks ergeben.

Man gelangt hierzu wie folgt. Gegeben sei das sphärische Dreieck ABC. Man construire das Polardreieck $A'B'C'$, so dass A' Pol von BC, B' von CA, C' von AB ist (Pol eines Kreisbogens oder eines Kreises soll hier ein Punkt heissen, der zu jenem die Lage von Pol zu Aequator hat. Im übrigen mag es gleichgültig sein, welchen von beiden Polen man nimmt, da hier zwei gegenüberlie-

gende Punkte im wesentlichen einander ersetzen und daher als ein Punkt angesehen werden können). Die drei grössten Kreise durch AA', BB', CC' sind dann die Höhen sowol des Dreiecks ABC als auch des Dreiecks $A'B'C'$ und schneiden sich in einem Punkte D. Das gegebene Dreieck und sein Poldreieck liegen daher perspectivisch und befinden sich die drei Schnittpunkte EFG der Seiten BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ in einem grössten Kreise.

Bisher sind 10 Punkte ABC, $A'B'C'D$, E, FG und 10 Kreise genannt worden. Sie bilden eine in sich geschlossene Figur, derart, dass durch jeden Punkt drei Kreise gehen, und auf jedem Kreise drei Punkte liegen. Ausserdem ist diese Figur sich selbst polar, da jedem der zehn Punkte einer der zehn Kreise als Aequator entspricht. Doch tritt ihr Charakter fester hervor bei einer zweckmässigen Bezeichnung ihrer Punkte (und Kreise). Hierzu wählt man am einfachsten 5 Indices 1, 2, 3, 4, 5 und giebt jedem Punkte zwei Indices, so dass z. B. der Punkt A die Indices 1 und 4 erhalten und von nun an P_{14} oder P_{41} heissen möge. Dann sollen die neuen Bezeichnungen folgende werden:

A	B	C,	A'	B'	C'	D	E	E	G
$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{5,1}$	$P_{5,2}$	$P_{5,3}$	$P_{4,5}$	$P_{2,3}$	$P_{3,1}$	$P_{1,2}$

Die Indices sind so verteilt, dass je zwei Punkte mit einem gleichen Index, wie z. B. P_{23} und P_{13} auf einem der zehn Kreise liegen. Auf demselben Kreise liegt auch der Punkt $P_{1,2}$. Er möge $l_{4,5}$ oder $l_{5,4}$ genannt werden u. s. w., so dass jeder Kreis durch die drei Punkte geht, welche mit ihm keinen Index gemein haben.

Sämtliche „Diagonalen" dieser Figur, z. B. P_{12}—P_{24} sind Quadranten, und desgleichen schneiden sich in jedem „Diagonalpunkte", wie l_{12}, l_{34} die beiden Kreise senkrecht. Zählt man diese 15 Kreise und 15 Punkte noch hinzu, so lassen sich in der Figur jetzt 15 sich selbst polare Dreiecke namhaft machen.

Unter den vielen merkwürdigen in dem Netz enthaltenen Figuren möge hier nur noch eine besondere Art hervorgehoben werden. Stellt man 5 der zehn Punkte P zu einem Cyklus zusammen, z. B.

$$P_{12},\ P_{23}\ P_{34}\ P_{45},\ P_{51}$$

so erhält man nichts anderes als ein Gauss'sches Pentagramma mirificum, da die fünf Diagonalen, wie $P_{12}-P_{34}$ sämtlich Quadranten sind. Solche Fünfecke, die der Einfachheit wegen mit [1, 2, 3, 4, 5] etc. bezeichnet werden mögen, giebt es 12, und sie gruppiren sich zu zwei und zwei, wie z. B. [1, 2, 3, 4, 5] und [1. 3, 5, 2, 4] der-

art, dass die zehn Punkte P und die 10 Linien l sich in nur je einem als Ecken oder Seiten finden, wobei überdies noch zu bemerken ist, dass jedes der beiden Pentagramme dem andern zugleich ein- und umschrieben ist.

In Folge der Symmetrie leuchtet auch ohne Weiteres ein, dass dieselbe Construction, welche von dem sphärischen Dreieck P_{41}, P_{42}, P_{43} ausgegangen, zu demselben Satze führen muss, wenn man von irgend einem der 20 sphärischen Dreiecke ausgeht, die aus diesem durch Vertauschung der Indices hervorgehen. Und es muss auch möglich sein, ihre Seiten und Winkel, (oder auch nur ihre Seiten, da zu jedem Dreieck das Polardreieck in der Figur vorhanden ist) durch symmetrische Formeln auszudrücken. Es erhebt sich aber die Frage, in welcher Weise dies geschehen soll?

Zu ihrer Beantwortung ist es sehr zweckmässig, das Netz auf folgende Weise auf den Raum hinein zu projiciren. Man suche im Raume fünf Punkte $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5$ auf, derart, dass die 10 Verbindungslinien dieser fünf Punkte parallel sind zu den 10 durch die Punkte P gehenden Durchmessern der Kugel, also z. B. $Q_4 Q_5$ parallel zum Durchmesser nach $P_{4,5}$. Dass dies möglich ist, ergiebt sich ohne Weiteres aus der Tatsache, dass je drei der Durchmesser immer in einer Ebene, nämlich der Ebene eines Kreises l liegen. Auf die fünf Punkte Q überträgt sich dann die Polarität in der Weise, dass die Verbindungslinie irgend zweier, z. B. $Q_4 Q_5$ senkrecht steht auf der Verbindungslinie zweier anderer, z. B. $Q_1 Q_2$, also auch senkrecht steht auf der Ebene $Q_1 Q_2 Q_3$. Je vier der fünf Punkte bilden daher ein Tetraeder, in dem die gegenüber liegenden Kanten auf einander senkrecht stehen.

In einem solchen Tetraeder schneiden sich aber die vier Höhen in einem Punkte, und dieser Punkt ist kein anderer, als der fünfte, übrig bleibende Punkt.

So hat sich also die Aufgabe in eine andere verwandelt, nämlich die Winkel der 10 ebenen Dreiecke durch symmetrische Formeln auszudrücken, und hierzu ist es wieder am besten, sich an die Längen der 10 Verbindungslinien $Q_1 Q_2$ zu halten. Nach einem bekannten Satze sind in einem Tetraeder, dessen vier Höhen sich in einem Punkte schneiden, die drei Summen der Quadrate gegenüber liegender Seiten einander gleich, also z. B.:

$$Q_1 Q_2^2 + Q_3 Q_4^2 = Q_{13}^2 + Q_2 Q_4^2 = Q_{14}^2 + Q_{23}^2 \text{ etc.}$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man setzt:

$$Q_1 Q_2^2 = u_1 + u_2$$
$$Q_1 Q_3^2 = u_1 + n_3$$
$$Q_1 Q_4^2 = u_1 + u_4$$
$$Q_1 Q_5^2 = u_1 + u_5$$

etc., wo die fünf Grössen u noch näher zu untersuchen sind. Hierzu bemerke man, dass $Q_4 Q_5$ senkrecht auf der Ebene $Q_1 Q_2 Q_3$ steht. Der Durchschnitt beider sei S und es sei

$$Q_4 S = x$$
$$Q_5 S = y$$

also zunächst

$$\pm (x \pm y) = Q_4 Q_5 = \sqrt{u_4 + u_5}$$

Andererseits folgt sofort durch Betrachtung des Dreiecks $Q_4 Q_5 Q_1$, indem S der Fusspunkt einer Höhe ist:

$$x^2 - y^2 = Q_4 Q_1^2 - Q_5 Q_1^2 = u_4 - u_5$$

daher in der Verbindung mit der vorigen Gleichung

$$\pm (x \mp y) = \frac{u_4 - u_5}{\sqrt{u_4 + u_5}}$$

daher

$$\pm x = \frac{u_4}{\sqrt{u_4 + u_5}}$$

$$\pm y = \frac{u_5}{\sqrt{u_4 + u_5}}$$

x und y sind die Höhen von Q_4 und Q_5 der beiden Tetraeder $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ und $Q_1 Q_2 Q_3 Q_5$. Die Inhalte derselben verhalten sich daher wie $u_4 : u_5$ oder wie $\frac{1}{u_5} : \frac{1}{u_4}$. Da nun die algebraische Summe der Inhalte der fünf Tetraeder $= 0$ ist, so folgt hieraus die wichtige Gleichung:

$$\text{I)} \qquad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = 0$$

Eine andere Gleichung zwischen den u findet nicht statt. Zu bemerken ist aber, dass für reelle Punkte nur eines der u negativ sein kann.

Aus dem Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ folgt sofort:

$$\cos Q_2 Q_1 Q_3 = \cos(P_{12} P_{13}) = \frac{u_1}{\sqrt{u_2+u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}}$$

und ähnlich für alle zwanzig Winkel. Hieraus findet man

$$\sin Q_2 Q_1 Q_3 = \sin P_{12} P_{13} = \frac{\sqrt{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}}{\sqrt{u_2 \cdot u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}}$$

$$= \frac{\sqrt{u_1 u_2 u_3 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right)}}{\sqrt{u_2+u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}} = \frac{\sqrt{\frac{u_1 u_2 u_2}{u_4 u_5}} \cdot \sqrt{u_4+u_5}}{\sqrt{u_2+u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}}$$

Kehrt man endlich wieder zu dem ursprünglichen Dreieck *ABC* und seinem Polardreieck *A'B'C'* zurück, so ergeben sich schliesslich folgende eigentümliche Formeln für die Seite *abc* und Winkel $\alpha\beta\gamma$ eines sphärischen Dreiecks.

II)

$$\cos a = \frac{u_4}{\sqrt{u_2+u_4} \cdot \sqrt{v_3+u_4}}; \quad \cos \alpha = \frac{-u_5}{\sqrt{u_2+u_5} \cdot \sqrt{u_3+u_5}}$$

$$\cos b = \frac{u_4}{\sqrt{u_3+u_4} \cdot \sqrt{u_1+u_4}}; \quad \cos \beta = \frac{-u_5}{\sqrt{u_3+u_5} \cdot \sqrt{u_1+u_5}}$$

$$\cos c = \frac{u_4}{\sqrt{u_1+u_2} \cdot \sqrt{u_2+u_4}}; \quad \cos \gamma = \frac{-u_5}{\sqrt{u_1+u_5} \cdot \sqrt{u_2+u_5}}$$

$$\sin a = \frac{\sqrt{\frac{-u_1 u_2 u_3}{u_1 u_5}} \cdot \sqrt{u_1+u_5}}{\sqrt{u_2+n_4} \cdot \sqrt{u_3+u_4}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\frac{-u_5 u_2 u_3}{u_1 u_4}} \cdot \sqrt{u_1+u_4}}{\sqrt{u_2+u_5} \cdot \sqrt{u_3+u_5}}$$

$$\sin b = \frac{\sqrt{\frac{-u_4 u_3 u_1}{u_2 u_5}} \cdot \sqrt{u_2+u_5}}{\sqrt{u_3+u_4} \cdot \sqrt{u_1+u_4}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{\frac{-u_5 u_3 u_1}{u_3 u_4}} \cdot \sqrt{u_2+u_4}}{\sqrt{u_3+u_5} \cdot \sqrt{u_1+u_5}}$$

II)
$$\sin c = \frac{\sqrt{\frac{-u_4 u_1 u_2}{u_3 u_5}} \cdot \sqrt{u_3+u_5}}{\sqrt{u_1+u_4} \cdot \sqrt{u_2+u_4}}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{\frac{-u_5 u_1 u_2}{u_3 u_4}} \cdot \sqrt{u_3+u_4}}{\sqrt{u_1+u_5} \cdot \sqrt{u_2+u_5}}$$

wo zwischen den u die Gleichung I) stattfindet. Zu bemerken ist noch, dass man die Vorzeichen der Wurzeln im allgemeinen beliebig annehmen kann.

Vertauscht man in den Formeln II) die Indices 1, 2, 3, so bleibt man in demselben Dreieck und wechselt die Reihenfolge der Ecken. Vertauscht man die Indices 4 und 5, so geht man von dem Dreieck zu seinem Polardreieck über. Vertauscht man aber die Indices 1, 2, 3, 4, 5 unter einander in irgend einer anderen Weise, so ergeben sich die Seiten und Winkel eines anderen Dreiecks aus den vorhin nambaft gemachten Gruppen von 20 Dreiecken.

Aus den Gleichungen II) folgen noch einige kleine Reductionen

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = -\cos a \cos b \cos c + \cos^2 a : -\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b$$
$$: -\cos a \cos b \cos c + \cos c^2 : \cos a \cos b \cos c$$

und man kann also, da eine der Grössen u beliebig bleibt, setzen:

$$u_1 = \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos a \,.\, \cos \alpha$$
$$u_2 = \sin c \,.\, \sin a \,.\, \cos b \,.\, \cos \beta$$
$$u_3 = \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos c \,.\, \cos \gamma$$
$$u_4 = \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c$$

Andererseits ergiebt sich entsprechend

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5 = \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma : \cos^2\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$: \cos^2\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma : -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= \sin\beta\sin\gamma\cos a\cos\alpha : \sin\gamma \,.\, \sin\alpha\cos b\cos\beta : \sin\alpha : \sin\beta\cos c\cos\gamma :$$
$$-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Setzt man daher durch Abkürzung

$$\text{III)} \qquad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = k$$

so folgt:

$$u_5 = -k^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

und daher zum Schluss noch die ausserordentlich merkwürdige Gleichung:

$$\text{IV)} \qquad \frac{1}{\cos a \cos b \cos c} + \frac{1}{\sin b \sin c \cos a \cos \alpha} + \frac{1}{\sin c \sin a \cos b \cos \beta}$$
$$+ \frac{1}{\sin a \sin b \cos c \cos \gamma} - \frac{1}{k^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} = 0$$

XIV.

Zur Theorie der Lemniskate.

Von

Dr. K. Zahradnik.

Die Lemniskate, deren Gleichung

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0 \tag{1)}$$

ist bekanntlich eine rationale Curve. Jeder Kreis, der die Lemniskate in realem Doppelpunkt berührt, schneidet dieselbe in 7 festen Punkten; der achte Schnittpunkt ist eindeutig vom Halbmesser u des Kreises abhängig, d. h. wir können den Halbmesser als seinen rationalen Parameter betrachten und erhalten so

$$\begin{aligned} x &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2+u^2)}{a^4+u^4} \\ y &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2-u^2)}{a^4+u^4} \end{aligned} \tag{2)}$$

als Gleichungen der Lemniskate in parametrischer Darstellung.

Durch die Substitution

$$u=at,\quad a\sqrt{2}=c \tag{3)}$$

gehen diese Gleichungen über in [1])

---

1) Den Parameter u benutzt Dr. Em. Weyr in seiner Abhandlung: Die Lemniskate in rationaler Behandlung, Prag 1875. Auf anderem Wege kommt Hermite zur Parameterdarstellung (4) der Lemniskate in seinem Cours d'Analyse. Paris 1873, pg. 242.

$$
\left.\begin{aligned}
x &= c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4}\\
y &= c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}
\end{aligned}\right\} \qquad 4)
$$

Setzen wir nun die Werte (4) in die Gleichung eines Kreises ein, so erhalten wir sofort

$$t_1\,t_2\,t_3\,t_4 = 1 \qquad 5)$$

als die Bedingungsgleichung für die Lage von vier Punkten t_1, t_2, t_3, t_4 der Lemniskate auf einem Kreise.

Setzen wir

$$t_2 = t_3 = t_4 = t$$

so erhalten wir

$$t^3 t_1 = 1 \qquad 6)$$

eine Relation zwischen dem Osculationspunkte t des Krümmungskreises und dessen Durchschnitt t_1 mit der Lemniskate.

Aus der Gleichung (6) erhellt, dass durch jeden Punkt t_1 der Lemniskate drei Krümmungskreise hindurch gehen und zwar ein realer und zwei imaginäre. Die Parameter ihrer Osculationspunkte erhalten wir als Wurzeln der kubischen Gleichung

$$t^3 = \frac{1}{t_1} \qquad 7)$$

Aus dieser Gleichung folgt sogleich, wenn wir ihre Wurzeln mit t', t'', t''' bezeichnen, dass die drei Osculationspunkte t', t'', t''' der drei Krümmungskreise, welche durch den Punkt t_1 der Lemniskate hindurchgehen, auf einem Kreise liegen, was natürlich ist, da ja dieser Satz für den Kegelschnitt gilt, und somit auch für jede Curve, welche aus ihm durch Inversion hervorgeht, z. B. Cardioide, Lemniskate, Cissoide.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\Sigma t = (t)_1, \quad \Sigma tt = (t)_2, \quad \Sigma ttt = (t)_3$$

so folgt aus (7)

$$(t)_1 = 0, \quad (t)_2 = 0, \quad (t)_3 = \frac{1}{t_1} \qquad (8)$$

somit

$$
\left.\begin{aligned}
&(t^{3\lambda})_1 = \frac{3}{t_1{}^{\lambda}}, \quad (t^{3\lambda})_2 = \frac{3}{t_1{}^{2\lambda}}\\
&(t^{\mu}) = (t^{\mu})_2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (8')
$$

für $\mu = 3\lambda$, wo λ und μ ganze positive Zahlen sind.

Die drei Osculationspunkte t', t'', t''', welche dem Punkte t_1 zugeordnet sind, nennen wir ein Osculationstripel oder Osculationsdreieck.

Schwerpunkt des Osculationstripels.

2. Es sei $\varphi(\xi, \eta)$ der Schwerpunkt des Osculationstripels [1] t_1, t_2, t_3, welches dem Punkte t zugeordnet ist, somit gilt mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (8'):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{c}{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{t_\lambda(1-t_\lambda^2)}{1+t^4} = c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ \eta &= \frac{c}{3}\sum\frac{t_\lambda(1-t_\lambda^2)}{1+t_\lambda^4} = c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

„Der einem Osculationstripel zugeordnete Punkt der Lemniskate „ist der Schwerpunkt dieses Osculationstripels.“

Umkreis des Osculationstripels.

3. Die Gleichung des Kreises durch drei Punkte ist

$$(x^2+y^2)\,|\,x;\ y,\ 1\,| - x\,|\,x^2+y^2,\ y,\ 1\,| + y\,|\,x^2+y^2,\ x,\ 1\,| - |\,x^2+y^2,\ x,\ y\,| = 6 \quad 10)$$

Nun ist für ein Osculationstripel

$$|\,x,\ y,\ 1\,| = \frac{-2c^2\varDelta\,.\,\{(t_1)+(t)_2(t)_3\}}{\prod\limits_{k=1}^{3}(1+t_k^4)}$$

wegen der Gl. (8) und (8'); ferner ist

$$|\,x^2+y^2,\ y\ 1\,| = \frac{-2c^3\varDelta\,.\,[1+(t)_k{}^2]}{\prod\limits_{h=1}^{3}(1+t_h^4)}$$

$$|\,x^2+y^2,\ x,\ 1\,| = \frac{-2c^3\varDelta\,.\,[1-(t)_{32}]}{\prod\limits_{k=1}^{3}(1+t_k^4)}$$

---

1) Statt t', t'', t''' schreiben wir im folgenden t_1, t_2, t_3 und den zugeordneten Punkt t_1 bezeichnen wir einfach t.

Leider ist von den Briefen, welche mathematische Fragen behandeln, bisher nur der folgende gefunden worden. Aus dem Schlusse desselben geht hervor, dass andere dieser Art vorangegangen und wahrscheinlich auch gefolgt sind. Der vorliegende Brief, welcher in dem von J. L. Jacobi herausgegebenen Briefwechsel: „Schleiermachers Briefe an die Grafen zu Dohna“ (Halle 1887) nicht enthalten ist, lautet folgender massen[1]):

Arithmetik.

1. Wesen der Arithmetik.

Arithmetik und Geometrie sind beides Wissenschaften, die uns Lehrsäze über die Verhältnisse der Grössen in einem gewissen System geben. Sie unterscheiden sich aber dadurch, dass sich die Geometrie blos auf die stetigen Grössen im Raum bezieht.

Anm. Stetig nennt man eine Grösse, die unserer sinnlichen Anschauung ein Ganzes darbietet, wie z. E. jede geometrische Linie, Fläche und Körper. Wir denken uns auch die stetige Grösse, wenn wir nemlich keine Rüksicht auf ihre Materie nehmen gar nicht als aus Theilen zusammengesezt, sondern als aus dem ganzen vorhandenen Raum heraus genommen und begränzt: erst wenn wir sie haben denken wir uns Theile willkührlich hinein, wir denken also hier die Theile nur durch das Ganze. Ich glaube, dass ich Ihnen das schon lezthin mündlich deutlich genug gemacht habe. Erlauben Sie mir aber es durch ein paar Beispiele zu erläutern. Indem ich einen Triangel zeichne, so stell ich mir gar nicht die drei Linien als die Theile vor, aus denen er zusammengesezt wäre, wie denn auch diese gar nicht Theile der Fläche seyn können, sondern nur Gränzen; dennoch entsteht der Triangel, indem ich diese Linien ziehe, also nicht dadurch, dass ich eine kleine Fläche als Theil hervorbringe und dann immer mehr hinzuseze, bis der Triangel fertig ist (das hiesse ihn aus Theilen zusammensezen) sondern die ganze Fläche, die er einschliesst ist schon lange vorhanden und ich thue nichts als sie abzusondern. — Wenn ich zum Behuf irgend eines geometrischen Lehrsazes in einem Triangel eine parallele mit seiner Basis ziehe, so denke ich mir die beiden Theile nicht so, als ob der Triangel daraus entstanden und zusammengesezt worden, sondern diese sind wiederum

1) Orig. Arch. Schlobitten.

willkührlich aus dem Triangel abgesondert worden, eben so wie vorher der Triangel selbst aus dem ganzen Raum. Wenn man sagt ein Zirkel entsteht wenn eine gerade Linie sich um einen festen Endpunkt bewegt, so denkt man sich die kleinen Flächenräume, welche entstehn, wenn man die Bewegung der Linie irgend wo anhält gar nicht als die Theile woraus der Zirkel erst zusammengesezt würde, sondern der Bewegung ist nur die Regel, nach welcher die Gränze hervorgebracht und also die Zirkelfläche abgesondert werden soll.

Den Eigenschaften der stetigen Grösse im Raum, welche man die ausgedehnte Grösse nennt sind grade entgegengesezt die Eigenschaften der Zahl, Grösse womit sich die Arithmetik beschäftigt.

Anm. Zahl ist Vielheit der Einheiten, und kann nicht anders erzeugt werden, als indem wir uns in Gedanken die Einheit so oft wiederholen als die Aufgabe fodert. Hier ist die Einheit ein wahrer Theil, eine jede neue Wiederholung derselben gibt uns einen Abschnitt; hier denken wir das Ganze nur durch die Theile. Wenn wir z. B. 8 denken, so können wir nicht umhin, uns eine gewisse Menge Einheiten vorzustellen, welche die natürlichen Theile der Zahl sind, und wir können uns den Begriff von der ganzen 8 nicht anders machen, als indem wir von der eins anfangen und nach und nach durch alle folgenden Zahlen heraufsteigen. — Sie könnten mir hier den Einwurf machen, dass das auch bei den stetigen Grössen im Raum der Fall sei, die wir auch nicht anders übersehn können, als indem wir mit dem Auge nach und nach von einem Theil zum andern fortgehn. Das ist auch genau genommen richtig, allein es gibt doch noch zwei Verschiedenheiten und die sind es eben, worauf alles ankommt. 1., sagen wir dennoch nicht, dass die Grösse so entstanden ist, sondern nur unsere Anschauung derselben, welches wol unterschieden werden muss. Bei der Zahl hingegen kann unser Anschauen dieses Fortschreitens von einer Einheit zur andern wol am Ende entbehren, aber wir denken uns die Grösse selbst als so aus der Einheit entstanden, denn das ist ja der Begriff auf den wir alle Operationen des Verstandes mit Zahlen (d. h. alles Rechnen) reduciren. 2., gehen wir bei der geometrischen Anschauung durch jede unendlich kleine Grösse, die in der gegebenen enthalten ist, und können eben deswegen diese nicht als Theile ansehn durch deren Zusammensezung das Ganze entstanden wäre; bei der Zusammensezung der Zahl hingegen gehen wir nicht durch alle unendlich kleine Theile woraus jede Einheit besteht, sonst würden wir uns die Zahl als Linie, als stetige Grösse denken, sondern wir nehmen die Einheit selbst, und durch diese bekommen wir natürliche Abschnitte, d. h. Theile.

Ich glaube dass dies den wesentlichen Unterschied der Arithmetik von der Geometrie ausmacht und um ihn in der Erklärung der Arithmetik mit auszudrücken, müssen wir sie so abfassen:

„Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Verhältnissen der Zahlen".

Anm. 1. Sie sehn dass man eine jede Grösse in eine Zahl verwandeln kann wenn man eine Einheit zu ihrer Beurtheilung annimmt, d. h. wenn man sie misst (denn eine angenommene Einheit zur Beurtheilung einer Grösse die an sich nicht als Zahl erscheint, heisst ein Maass). Also können auch die geometrischen Grössen als Zahlen angesehen werden; das geschieht aber nicht in der reinen Geometrie (da wird nicht gemessen, und alle Zahlen sind nur zufällig) sondern nur in der sogenannten angewandten Geometrie und in der Trigonometrie.

Anm. 2. Man theilt aber die ganze Wissenschaft von den Verhältnissen der Zahlen noch ab in eigentliche Arithmetik und in Analysis, die Sie unter dem Namen Algebra kennen. Da wir es (vor der Hand) nur mit der ersten zu thun haben, so wäre es gut auch den Unterschied zwischen diesen beiden zu kennen. Den besinn ich mich aber nicht befriedigend gefunden zu haben. Doch bringt mich der Umstand, dass die Analysis überall in Gleichungen arbeitet auf folgende Angabe: Die eigentliche Arithmetik gibt uns überall Data um daraus Resultate zu finden; die Analysis gibt uns Resultate, um daraus gewisse Data die als unbestimt in ihnen enthalten waren zu finden.

2. Noch eine Vergleichung der Arithm. und Geometrie.

In der Geometrie giebt es noch Grössen von verschiedener Art und verschiedener Würde, deren eine nicht mit der andern verwechselt werden, eine nicht in die andere übergehn kann, nämlich Linien, Flächen und Körper. Das kommt von der Eigenschaft des Raumes her, welche man seine dreifache Ausmessung nennt. In der Arithmetik wo wir es mit dem Raum nicht zu thun haben ist auch nichts dergleichen zu bemerken; alle Zahlen sind von einerlei Art, da sie alle aus Wiederholungen der Einheit entstanden sind, und liegen alle in einer unendlichen Reihe, denn da es immer noch möglich ist zu einer Zahl eine andere hinzuzusezen, so ist keine Zahl an sich die lezte, und die Reihe derselben ist ins unendliche unvollendet. In dieser Reihe hat eine jede Zahl ihren festen Plaz

nach der Menge der Einheiten die in ihr enthalten sind, und alles was wir mit den Zahlen vornehmen, geht innerhalb dieser Reihe vor.

3. Von den allgemeinen Verhältnissen der Zahlen.

Dieses aber was wir mit den Zahlen vornehmen können, scheint auf den ersten Anblik nicht so recht viel zu seyn; denn wenn wir von dem Begriff der Zahl als Menge der Einheiten und des Zählens als Hervorbringen der Zahl durch Wiederholung der Einheiten ausgehn, so erscheint uns kein anderes Verhältniss der Zahlen, als dass eine grösser eine kleiner ist als die andre, eine aus mehrern andere aus wenigern Wiederholungen der Einheit besteht, und wir finden keinen andern Punkt aus dem wir sie vergleichen könnten, als zu sehn wie viel Einheiten ich zu einer kleineren hinzusezen, wie weit ich in der natürlichen Zahlenreihe vorwärts gehn muss, um eine grössere zu erlangen, und wie viel Einheiten ich von der grössern wegnehmen, wie weit ich in der natürlichen Zahlenreihe rückwärts gehn muss um zu der kleinen zu gelangen. Und so gäbe es keine andere Operation des Rechnens als 1. zu einer Zahl gewisse Wiederholungen der Einheit, das heisst eine gewisse andere Zahl hinzusezen und daraus eine dritte machen: Zahlen zusammenfügen, addiren 2. von einer Zahl gewisse Wiederholungen der Einheit, d. h. eine gewisse andere Zahl hinwegnehmen, und daraus eine dritte machen: Zahlen trennen subtrahiren.

4. Erweiterung.

Allein wenn dieses auch alles ist, so werden wir doch bald sehn, dass es wenigstens mehrere Arten giebt zu addiren und zu subtrahiren. Wenn man nemlich eine jede Grösse als Einheit betrachten kann, so kann man auch eine jede schon zusammengesezte Zahl als Einheit für andere ansehn. Das gibt nun einen neuen Gesichtspunkt indem ich also eine jede Zahl nicht als nur aus der natürlichen, sondern auch aus irgend einer angenommenen Einheit entsprungen ansehn kann. Diese Befugniss und die Reduktion ihrer Anwendung auf die natürliche Zahlenreihe ist der Grund aller übrigen Operationen des Rechnens; die einfachsten derselben sind multipliciren und dividiren. Ich kann nemlich fragen: Die wievielste Wiederholung der Einheit, d. h. welche Zahl bekomme ich wenn ich die 12 als Einheit ansehe und diese Einheit viermal seze: Das ist multi-

pliciren. Ich kann ferner fragen: Wie oft hätte ich die 12 wiederholen müssen indem ich die Eins 48 mal wiederholte? Das ist dividiren.

5. Von der mechanischen Einrichtung unseres Rechen-Systems.

Nachdem wir so die Begriffe der vier einfachsten Rechnungsarten erfunden haben aus denen alle übrige nur Zusammensezungen sind, so bitte ich Sie nun sich an das zu erinnern, was wir damals vom dekadischen System sagten; von der grossen Erfindung für die ganze unendliche Zahlenreihe sich mit 10 Zeichen zu begnügen und dafür die Zahlen nach ihren Fortschreitungen in gewisse Ordnungen zu theilen, welche bei den Ziffern durch die Stelle bezeichnet werden wo sie stehn. Daraus lässt sich sehr leicht unser Verfahren bei den arithmetischen Aufgaben deduciren; warum wir beim addiren und sub. die gegebenen Zahlen gleichsam trennen, und successiv nur die zusammengehörigen Ordnungen mit einander verbinden um zu rechter Zeit die kleinern in die grössern verwandeln zu können, warum wir beim multipliciren jede Ordnung des einen Faktors einzeln mit dem andern verbinden, aber beim dividiren umgekehrt die höhern Ordnungen zuerst eintheilen, weil wir sie oft wenn die Einheiten einer Ordnung nicht hinreichen einen Quotienten derselben Ordnung hervorzubringen in die niedrigere Ordnung verwandeln müssen. Dieses ganze dekadische System ist aber nicht notwendig sondern bloss willkührlich; die Alten rechneten nicht so und noch jetzt rechnen viele Völker anders. Leibniz erfand eine Diadik wo er nur immer bis 2 zählte und nur diese beiden Ziffern hatte: 0, 1.

6. Von den Reihen.

Wenn wir wieder von der Idee ausgehn, dass man nun eine jede Zahl als Einheit behandeln kann, die beim Zählen wiederholt, so entstehn aus einem solchen Zählen mit einer angenommenen Einheit andere Zahlenreihen als die natürliche (jedoch müssen sie immer in der natürlichen enthalten seyn) z. E. man fängt von der Eins an, nimmt aber die 3 zu der Einheit, welche immer wiederholt wird, so bekommt man folgende Reihe:

1^3). 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34

und so fort bis ins unendliche.

Man kann aber auch bei jeder andern Zahl anfangen und es eben so machen:

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32. 35 etc.

Unter einer Zahlen Reihe (Progression, wenn Sie sich vor dem fürchterlichen Wort nicht erschrecken) versteht man eine Menge von Zahlen (einerlei wo sie anfangen und aufhören) von denen immer die folgende aus der vorigen nach einerlei Gesez entstanden ist, wie z. E. in den obigen Reihen dadurch dass immer zu der vorigen Zahl, die 3, die als Einheit galt, hinzugesezt ward. Allein es können auch noch Reihen aus ganz andern Gesezen entstehn. Z. E. man kann bei einer Zahl anfangen diese selbst als Einheit ansehn und wiederholen; dann aber wieder die Zahl, welche daraus entstand als Einheit betrachten und eben so wiederholen. Ich meine auf diese Art:

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256 etc.

Die 2 ist hier als Einheit angesehn und wiederholt, daraus entstand die 4, nun wurde diese als Einheit angesehn und fortgezählt, daraus entstand die 8; nun wurde diese die Einheit, und so immer fort nach dem nemlichen Gesez. Es ist auch nicht nöthig, dass man die angenommene Einheit nur einmal wiederholt um die nächste Zahl der Reihe zu bekommen, man kann gleich ein vielfaches derselben nehmen, welches schon mehrere Wiederholungen derselben in sich fasst. Z. E. ich fange bei der 2 an, will aber nicht die 2 nur einmal wiederholen, sondern gleich dreimal: Daraus entsteht nun eine Zahl diese wird als Einheit angesehn und ebenfalls nicht einmal wiederholt, sondern dreimal.

2. 6. 18. 54. 162. 394. 1092. 3274.

Sie sehen ich behandle überall die Reihen als Arten zu zählen und suche die Einheiten auf nach denen man zählt.

Die obigen Beispiele geben aber 2 ganz verschiedene Arten von Reihen an die Hand.

Bei der einen wird eine Einheit gewählt und mit dieser so gezählt wie mit der wahren Einheit in der natürlichen Zahlenreihe; diese nennt man zählende Reihen (arithmetische Progressionen). Bei der andern wurde zwar auch die erste Zahl bei der man anfing

---

1) Muss heissen: 486. 1458. 4374.

zur Einheit gewählt und ein bestimtes vielfaches derselben genommen, aber dann eben diese nun erhaltene Zahl zur Einheit genommen und eben so behandelt; diese nennt man steigende Reihen (geometrische Progressionen).

Sie sehn dass ich jene erhalte wenn ich zu der lezten vorhandenen Zahl die angenommene Einheit addire, diese hingegen wenn ich die lezte Zahl die nun Einheit wird so oft nehme, als es das angefangene Gesez erfodert. Dieses so oft nehmen ist aber nach unserm oben gegebenen Begriff ein multipliciren. Auch bei den arithmetischen Reihen ist zwar ein multipliciren, aber nicht jedes Gliedes aus dem nächsten, sondern aller aus dem ersten. Ich frage nemlich: was entsteht für eine Zahl der natürlichen Zahlenreihe wenn ich die angenommene Einheit so oft wiederhole, wenn ich sie einmal mehr wiederhole u. s. w. so ist jedes Glied des einmal eins nur eine arithmetische Progression, worin die Zahl womit das Glied anfängt die Einheit ist z. E.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

aber es ist nicht das nächste Glied aus der Multiplikation mit dem vorigen entstanden, sondern alle aus einer successiven Multiplikation des ersten. Ich hoffe ich habe nun den Unterschied dieser beiden Arten von Reihen hinlänglich angegeben. Es gibt noch mehrere Arten derselben, die aber nicht von der Wichtigkeit als diese beiden und besonders die geometrische.

7. Einige Beobachtungen über diese Arten von Reihen?

Man kann leicht bemerken, dass, man mag eine arithmetische Reihe anfangen wo man will und abbrechen wo man will, sich dennoch immer folgendes dabei ereignet: wenn man die zwei äussersten Glieder zusammen addirt und so von beiden Seiten nach der Mitte zu fortfährt, so geben alle diese Paare die nemliche Summe. Z. E. in der Reihe

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23.

$$1 + 23 = 24. \quad 3 + 21 = 24. \quad 5 + 19 = 24.$$

$$7 + 17 = 24. \quad 9 + 15 = 24 \text{ etc.}$$

Ferner bei der geometrischen Reihe wenn man die äussersten

Glieder mit einander multiplicirt und eben so fortfährt, so geben alle diese Paare einerlei Produkte. Z. E.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

3 . 96 = 288 . 6 . 48 = 288 . 12 . 24 = 288

Wenn diese beiden Säze von allen arithmetischen und geometrischen Reihen gälten, so könnte man daraus verschiedene Folgerungen ziehen, und da die Eigenschaften der Reihen der Grund alles übrigen Rechnens sind, so würden wir auf diese Weise sehr weit kommen. Allein wie kommen wir zu der Ueberzeugung dass diese Resultate eine solche nothwendige Allgemeinheit haben, als sie als Lehrsäze haben müssen? Denn wenn wir das auch an hundert und tausend Reihen wiederholen, so kann uns immer der Zweifel kommen dass die individuellen Eigenschaften der Zahlen die wir gewählt haben uns täuschen, und dass es doch welche geben könne, wo es nicht eintreffen würde. Aus den Begriffen der Zahlen und der Reihen wir mögen sie drehn wie wir wollen können wir es auch nicht folgern. Wir müssen also ehe wir weiter gehn uns erst ein Mittel verschaffen zu beweisen und unsern Beispielen eben die Allgemeinheit geben, welche die Beweise aus der Construktion der Figuren uns in der Geometrie verschaffen, und dazu werden Sie mir erlauben Ihnen nächstens den Schlüssel zu geben.

Sehen Sie mein lieber Graf, da ist doch wieder ein kleines Fragment zur Fortsezung, aber es ist grösser als Sie denken, denn Sie werden nun leicht rathen können, woraus alles heraus will.

Inzwischen will ich Ihnen nicht bergen dass ich einen Streich gemacht habe den mir die Arithmetiker vielleicht nicht vergeben; ich habe von Progressionen gesprochen und bin noch nicht bei den Proportionen eingekehrt; aber mein Ideengang der vom Zählen ausging liess es nicht anders zu und die Proportionen sollen auch nicht leer ausgehen.

Wir haben gestern einen Königsbergischen Besuch gehabt, aber ich muss Ihnen gestehen, ich bin seitdem ich ihn gesehn nicht mehr ganz so empfindlich gegen das was dieser Besuch in Holland von Ihnen gesagt hat, ich bin ein närrischer Mensch aber ich stellte mir vor die Leute die Sie lobten müssten anders aussehn. Wie das

zugeht mögen Sie sich selbst enträthseln. Inzwischen wenn Sie nur a laudatis viris (die Damen nicht ausgeschlossen) gelobt werden — lassen Sie sich das lateinische Sprüchelchen von Graf Wilhelm erklären — was können Sie denn dafür, wenn es auch andere thun. Sie sehn mein Papier ist aus und meine Zeit leider ebenfalls also entschuldigen Sie

Ihren

Schleiermacher.

Schlobitten d. 16 Dec. 1791.

XVII.

Drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden.

Von

Eduard Salfner.

Kgl. Reallehrer in Nürnberg.

Drei Gerade können im Raume drei Hauptlagen haben. Bei paralleler Lage derselben geschah bisher der Schnitt mit vorgeschriebenen Winkeln nach einer von Gugler in seiner „darstellenden Geometrie“ angegebenen Weise oder aber nach der von Marx in seiner Inaugural-Dissertation [1]) mitgeteilten Construction. Während ersterer den rein geometrischen Weg wählt, erreicht letzterer vorerst das Ziel auf dem der Rechnung, löst aber nachgehends auch die Aufgabe allgemein constructiv für alle Lagen der Geraden mit Hilfe einer Fläche 4. Ordnung. Eine streng geometrische Lösung hält er für den Fall, dass die Geraden nicht parallel sind, „für nicht mehr durchführbar“. Gleichwol beschäftigte er sich auch in dieser Richtung mit der vorliegenden Aufgabe, ohne indes das Ziel zu erreichen; er schliesst seine Betrachtungen mit den Worten: „Praktisch ausführbar dürfte keine dieser Constructionen sein, doch wäre eine constructive Lösung auf diese Weise wenigstens denkbar“.

---

1) Marx, über eine Fläche 4. Ordnung etc. München, Kgl. Hof- u. Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf u. Sohn, 1880.

Der Verfasser glaubt nun gleichwol im Folgenden durch Construction und anschliessende Rechnung auf einem von Marx nicht angedeuteten, dazu für weitere Kreise gangbaren Wege für alle Fälle die Lösung der Aufgabe zu erreichen. Dieselben sollen in der nämlichen Reihenfolge wie sie gefunden wurden, vorgeführt werden.

I.

Die drei Geraden schneiden sich in einem Punkte, eine von ihnen (A) steht senkrecht auf den beiden andern (B und C). (Dreikant.)

Die Geraden B und C sind in die Tafel Fig. 1. eins gelegt[1]) und bilden den beliebigen Winkel α. Die auf ihnen senkrechte A gehört der Tafel zwei an. Ist nun bc eine Seite des gesuchten Schnittes bcd, der die Winkel β, γ und δ haben soll, so ist Dreieck bcd bestimmt. Dasselbe wurde nun um die Tafel eins gedreht, wodurch die zu bc gehörigen Höhen dieses und des Dreiecks abc, der Projection des ersteren, aufeinander fielen. Sobald eines dieser Dreiecke gegeben ist, kann das andere unter Benutzung des geometrischen Ortes der Scheitel gleicher Winkel über gegebener Seite bc gefunden werden. Sein Schnitt mit der gemeinschaftlichen Höhenrichtung ist der fehlende dritte Eckpunkt.

Nun ist de die Hypotenuse und ae die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zweite Kathete angibt, in welchem Abstand von a auf A der Punkt d genommen werden muss.

Construction. Man wird Strecke bc beliebig nehmen, darüber Dreieck abd_3 mit den vorgeschriebenen Winkeln β, γ, δ construiren, hierauf den Kreis, den geometrischen Ort für alle Scheitel mit dem Winkel α über bc, schlagen, wodurch der Schnittpunkt a desselben mit der Höhe über bc erhalten wird. (Der zweite Schnittpunkt beider bezieht sich auf den Winkel $180^0\,\alpha$). Ein zweiter Kreis um e mit dem Radius ed_3 gibt mit der senkrechten A den Schnittpunkt d über und unter der Ebene BC. (Spiegelbilder).

Der Punkt d auf der dritten Kante (A) entspricht der beliebig angenommenen Seitenlänge bc. Soll aber der Schnitt durch einen

---

1) Nach der Darstellungsmethode Klingenfelds, dessen Schüler und späterer Assistent am Kgl. Polytechnikum München ich war.

andern Punkt auf A gehen, so hat man lediglich durch ihn zwei Parallele zu den Seiten des Dreiecks bcd zu ziehen.

Für die Berechnung.

Im Anschluss an die Construction bezeichne ich bc mit a_1, die Strecke von e bis zur Sehnenmitte mit b_1, dann sind die Coordinaten des Kreismittelpunktes b_1 und $\frac{a_1 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$, daher die Kreisgleichung, weil der Radius gleich $\frac{a_1}{2 \sin \alpha}$,

$$\left(x - \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \alpha\right)^2 + (y - b_1)^2 = \left(\frac{a_1}{2 \sin \alpha}\right)^2$$

und die Gleichung der durch e gehenden Senkrechten

$$y = 0$$

also ist für den Schnitt

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \sin \alpha}\right)^2 - b_1^2} + \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

$$y = 0$$

Das untere Zeichen im Ausdruck für x gibt den 2. Schnittpunkt an, der jedoch nicht gelten kann als Scheitel eines Winkels $(180^0 - \alpha)^0$.

Die Strecke $ad = z$ ergibt sich aus dem bei x rechtwinkligen Dreieck ead:

$$z = \sqrt{\overline{ed_3}^2 - \overline{ed_1}^2} \quad \text{oder}$$

$$z = \pm \sqrt{\overline{ed_3}^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \sin \alpha}\right)^2 - b_1^2} + \frac{a_1}{2} \operatorname{cotg} \alpha\right)}$$

Das doppelte Vorzeichen entspricht den Spiegelbildern in Bezug auf Ebene BC.

II.

Die drei Geraden bilden ein Dreikant, in welchem keine Kante senkrecht auf der gegenüber liegenden Seite steht.

Fig. 2.

Bezeichnen wir wieder mit A, B, und C die Kanten der körperlichen Ecke, mit A_1 die Projection von A auf die Ebene BC, die

wir als Tafel eins nehmen! bc sei abermals die beliebig angenommene Seite des durch seine Winkel bestimmten Schnitts cbd. Das durch B, C und bc bestimmte vorderhand noch unbekannte Dreieck $a_1b_1c_1$ liege wieder in Tafel eins.

Nehmen wir nun an, dass beim Umklappen des Dreiecks bcd um die gemeinsame bc in die gemeinschaftliche Tafelebene die beiden zu bc gehörigen Dreieckshöhen nicht aufeinander fallen, dann ist durch Seite bc und den gegenüber liegenden Winkel α ein Kreis (in die Tafel eins gelegt) bestimmt, auf dessen Umfang der Scheitel des gesuchten Dreikants liegen muss. Sowol der der Seite bc gegenüber liegende Winkel α, als auch der Winkel (ε) der Projection A_1 mit B_1 sind constante Winkel, darum ist auch der Punkt f_1, in welchem der Kreis um Sehne bc von der Projection A_1 der dritten Kante geschnitten wird, ein fester Punkt; wandert auch a auf dem ganzen Bogen über bc dahin, so ist, wie b und c, f_1 bleibend. — Ebenso ist e, ein Höhenfusspunkt des Dreiecks bcd, auf bc ein fester Punkt, da entsprechende Höhen ähnlicher Dreiecke die zugehörigen Seiten in gleichem Verhältnisse teilen; gleichzeitig sind g_1 und h_1, die Schnittpunkte der Höhe mit dem vorhin genannten Kreise, feste Punkte.

Auf der um f_1 beweglichen Sehne des Kreises, der Projection der dritten Kante, muss natürlich stets auch der Fusspunkt d_1 des gesuchten dritten Punktes des Schnittes liegen. Ausserdem ist noch die Bedingung zu erfüllen, dass die Kante $ad(A)$ den vorgegebenen Winkel dad_1 mit der Ebene abc bilde, oder, dass

$$dd_1 : ad_1 = m : n$$

(ein gegebenes Verhältniss) sei. Der Fusspunkt d_1 muss aber auch auf der Projection ed_1 der Höhe des Dreiecks bcd liegen. Dreht sich also Sehne af_1 um f_1, so ist ihr Schnitt mit ed_3 stets der Fusspunkt d_1 einer Senkrechten, auf der

$$dd_1 = \frac{m \, . \, ad_1}{n}$$

abzutragen ist.

Die Punktreihe der d ist in der Tafel zwei Fig. 3. gezeichnet. Deren Schnittpunkt mit dem Kreise um e und dem Halbmesser ed liefert den gesuchten Punkt d, da d zugleich auf diesem Kreise liegen muss, damit der Schnittpunkt bcd die Höhe de habe.

Punkt f_1 kann im allgemeinen jeder Punkt der Kreislinie werden, a_1 wird aber stets auf der andern Seite von ed liegen müssen, da af die ed schneiden muss.

Fällt jedoch Punkt f_1 auf g_1 — was geschieht, wenn der zum Bogen $b_1 g_1$ gehörige Peripheriewinkel $= \xi$ wird — so ist $g_1 h_1$ die einzige in Betracht kommende Sehne des Kreises, und Punkt h_1 ist der gesuchte Punkt a_1 wie im Fall I. Während aber dort die Gerade A mit ed einen rechten Winkel einschloss, bildet sie jetzt mit ihr einen vorgeschriebenen Winkel dad_1.

Wir construiren demnach unter beliebiger Annahme der Strecke bc eine Pyramide, welche den gestellten Bedingungen genügt, in folgender Weise:

Eine Strecke bc wird beliebig lang in der Tafel eins angenommen, doch soll sie wieder senkrecht zur Tafelkante sein. Hierauf construirt man den der Sehne bc und dem ihr gegenüber liegenden Winkel α zukommenden Kreis und legt bei einem beliebigen Punkte a der Peripherie den Winkel

$$baf_1 = \varepsilon$$

an, den die Projection der dritten Kante A auf die gegenüber liegende Seitenfläche mit Kante B macht, wodurch man auf dem Kreisumfang den Punkt f_1 erhält, durch den alle Sehnen af gehen müssen. Nachdem man noch durch e, den Höhenfusspunkt des Dreiecks bcd, die Senkrechte zu bc gezogen, wodurch Sehne $h_1 g_1$ erhalten wird, kann man der Reihe nach die Punkte a des Bogens, der auf der andern Seite von f mit Bezug auf $h_1 g_1$ liegt, mit f verbinden und zur erhaltenen Schnittpunktreihe d_1 die zugehörige Punktreihe d mit Hilfe der gegebenen Projection

$$dd_1 : ad_1 = m : n$$

bestimmen. Die Höhe $e_1 d_3$ des mit bc und den vorgeschriebenen Winkeln gezeichneten Schnittdreiecks bcd nimmt man als Radius und zeichnet in Tafel zwei um e den Kreis. Der Schnitt desselben mit der Curve der d löst die Aufgabe.

Nicht alle Punkte des Kreises oder der Curve kommen in Betracht. Verbindet man f_1 mit c_1, so ist Schnittpunkt d'' Grenzpunkt, da die Punkte a auf Bogen $c_1 g_1 b_1$ genommen Winkel gleich $180^0 - \alpha$ geben. Fällt d_3 zwischen h_1 und e, so ist d_3 Grenzpunkt; fällt es auf h_1, oder darüber hinaus, so ist h_1 Grenze, weil sich darüber hinaus die beiden Secanten $g_1 h_1$ und $a_1 f_1$ schneiden.

Die Projection A_1 fällt zwischen B_1 und C_1, auf B_1 (oder C_1) oder über beide hinaus, je nachdem der Flächenwinkel bei B_1 (und C_1) spitz, recht oder stumpf ist; dem entsprechend fällt f_1 auf den Bogen $c_1 g_1 b_1$, auf b_1 (oder c_1), oder auf Bogen $d_3 b_1$ ($d_3 c_1$).

Der durch einen andern auf A angegebenen Punkt d gehende Schnitt ergibt sich nunmehr durch Ziehen von Parallelen.

Zur Berechnung.

Wir fällen vom Punkt f_1 auf die Projection der Höhe des Dreiecks bcd die Senkrechte f_1O, nehmen O als Mittelpunkt des Coordinatensystems in der Ebene h_1g_1d und setzen

$Od_1 = x$, $dd_1 = y$, $Of_1 = c$, $Og = p$, $hg = q$, $fd_1 = v$ und $ad_1 = w$

Die Gleichungen

$$(p+x)(q-p-x) = vw \quad \ldots 1.,$$
$$v^2 = c^2+x^2 \quad \ldots 2.,$$
$$y : w = m : n \quad \ldots 3.,$$

verhelfen auf die Gleichung der Curve:

$$(p+x)^2(q-p-x)^2 = (c^2+x^2)y^2\frac{n^2}{m^2}$$

Diese Curve ist also von der 4 Ordnung [1]).

Nimmt man dazu die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt e:

$$(x-\sigma)^2+y^2 = r^2$$

wo

$$\sigma = Oe \quad \text{und} \quad r = d_3e_1$$

so entsteht zur Berechnung der Schnittpunkts-Abscisse

$$x\frac{m^2+n^2}{m^2} - x^3\left[2(q-2p)+2\frac{n^2}{m^2}\sigma\right]$$
$$+x^2\left[(q-2p)^2-2p(q-p)-\frac{n^2}{m^2}(r^2-c^2-\sigma^2)\right]$$
$$+x\left[2p(q-p)(q-2p)-2\frac{n^2}{m^2}c^2\sigma\right]$$
$$+p^2(q-p)^2-\frac{n^2}{m^2}c^2(r^2-\sigma^2) = 0$$

---

1) Sie weist ein *max* auf, welches durch die Gleichung

$$x^3+[2c^2+(q-p)]x-c^2(q-2p) = 0$$

bestimmt ist. Diese Gleichung zeigt nur einen reellen Wert für x.

Tritt der schon erwähnte Fall ein, dass f_1 und damit O auf g_1 fällt, so wird

$$c = p = 0$$

und die Gleichung der Curve 4. Ordnung

$$q - x = y\frac{n}{m}$$

also zur Geraden durch h_1 (wo wir die Gerade im neg. Tafelraum vernachlässigen). Aus der Gleichung 4. Grades zur Berechnung von x wird

$$x^4\,\frac{n^2+m^2}{m^2} - x^3\left[2q+2\sigma\frac{n^2}{m^2}\right] + x^2\left[q^2 - \frac{n^2}{m^2}(r^2-\sigma^2)\right] = 0$$

Für $x^2 = 0$ erhält man den Punkt g_1, der mit b_1 und c_1 verbunden den Winkel $180^0 - \alpha$ gibt, und für unseren Fall unbrauchbar ist. Die beiden übrigen Werte sind

$$x = \frac{m^2q+n^2\sigma}{n^2+m^2} \pm \sqrt{\frac{1}{n^2+m^2}\left[n^2(r^2-\sigma^2) - m^2q^2\right] + \left(\frac{m^2q+n^2\sigma}{n^2+m^2}\right)^2}$$

Wird auch noch $n = 0$, d. h. steht A auf der Ebene BC senkrecht, so wird die Hauptgleichung

$$x^4 - 2qx^3 + x^2q^2 = 0 \quad \text{und}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0. \quad x_3 = \pm q$$

wovon die beiden ersten Werte für den spitzen Winkel α nicht genommen werden können, die beiden letzten den Punkt h_1 bezeichnen, wodurch sich I. als besonderer Fall von II. erweist.

III.

Die drei Geraden sind parallel und bestimmen ein Prisma.

Die drei parallelen Geraden sollen A, B und C heissen. Dreieck ahg ist ein senkrechter, Dreieck abc ein schiefer Schnitt derselben. B und C liegen in Tafel eins und sind zugleich parallel zur Tafelkante. Die Spur der durch A gelegten Lotebene eins schneidet die Dreiecksseite bc in gleichem Verhältniss wie gh, so dass also

$$a_1g_1 : a_1h_1 = f_1c_1 : f_1b_1$$

Ist somit das Verhältniss $a_1 g_1 : a_1 h_1$ constant, so ist dies auch von $f_1 c_1 : f_1 h_1$ zu sagen.

Zieht man durch den dem schiefen Schnitte angehörigen Punkt a zu bc die Höhe ae_1 und dreht das Dreieck um jenes in die Ebene BC, so ist $a_3 e_1$ die Projection von der Geraden ae_1.

Nehmen wir wieder eine Strecke bc beliebig als Seite eines schiefen Schnittes, und sind $\alpha\beta\gamma$ dessen Winkel, so ist damit Dreieck abc, mit ihm der Höhenfusspunkt e, aber auch der Punkt f mittels der eben angeführten Proportion bestimmt.

Zu diesem Dreiek suchen wir nun das Prisma, welches die gestellten Forderungen erfüllt! Hierzu bieten sich zwei Wege dar: Man kann sich die Festlegung des Punktes a oder auch des Punktes g_1 (oder auch h_1) zum Ziel setzen. Im Nachfolgenden ist der erstgenannte gewählt, weil er weitaus einfacher ist und sich den Betrachtungen in II. anschliesst.

Punkt a liegt vorerst auf dem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt e und dessen Radius ae ist, seine Projection eins ist die Senkrechte durch e zu bc; somit liegt auch die Projection des Punktes a stets auf dieser Senkrechten.

Die Verbindungslinie $f_1 a_1$, die Projection von A, gibt die Richtung der Prismenkanten an. Wird nun irgend ein Punkt a_1 auf $a_3 e_1$ herausgegriffen, so liegt auf der zu ihr durch a_1 gehenden zu $a_1 f_1$ Senkrechten Punkt g_1 und zugleich auf der Parallelen durch c_1 zu $f_1 a_1$. Punkt a aber ist bestimmt durch die so gefundene Strecke $a_1 g_1$ und die Winkel des vorgegebenen (schon genannten) Dreiecks $a h_1 g_1$. Es sei

$$\operatorname{tg} a g_1 a_1 = \frac{m}{n}$$

Lässt man so den Punkt a_1 die Gerade $a_1 e_1$ durchwandern und sucht dazu die Punktreihe der c, so erhält man eine Curve 4. Ordnung, deren Schnitt mit dem bereits bestimmten Kreise den gesuchten Punkt a liefert, wodurch dann auch das zur angenommenen Strecke bc gehörige Prisma bestimmt ist.

Construction. Fig. 5.

Ueber der beliebig angenommenen Strecke $b_1 c_1$ zeichnet man ein Dreieck $b_1 c_1 a_3$ mit den vorgeschriebenen Winkeln $\alpha\beta\gamma$, zieht die Höhe zu $b_1 c_1$ und hat den Punkt e_1.

Dann verschafft man sich einen Normalschnitt des gegebenen Prismas und findet mit Hilfe der Proportion

$$a_1 g_1 : a_1 h_1 = f_1 c_1 : f_1 b_1$$

den Punkt f_1 und

$$\operatorname{tg} a g_1 a_1 = \frac{m}{n}$$

Zur Verbindungslinie $a_1 f_1$ (wo a_1 ein beliebiger Punkt auf der Projection $a_1 e_1$ ist) zieht man hierauf durch c_1 die Parallele $c_1 g_1$ und durch a_1 die Senkrechte, so erscheint g_1 als Schnittpunkt. Construirt man

$$a a_1 : a_1 g_1 = m : n$$

so ist das hieher gehörige a bestimmt. Ebenso erhält man die übrigen Punkte der Reihe.

Discussion. Fig. 6.

Punkt e ist für $m = n$ Rückkehrpunkt; denn es fällt a mit g und e zusammen, also ist

$$a g_1 = 0$$

und damit auch die Ordinate zwei (y). Ist $\frac{m}{n}$ von 1 verschieden, so erhält man ähnliche Curven.

Von e aus wächst die Ordinate zwei (y) gleichzeitig mit $a_1 g_1$ auf beiden Seiten von bc. Da aber die Länge $g_1 l$ stets $= c_1 f_1$ ist, der Winkel ζ aber immer grösser wird, so wächst auch $a_1 g_1$, wie die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks $a_1 g_1 l$ ergibt, fortwährend, bis die Kathete

$$a_1 g_1 = f_1 c_1$$

geworden, was für den unendlich entfernten Punkt der Senkrechten $e_1 a_1$ zutrifft.

Auf der Seite rechts von $f_1 c_1$ bekommt man einen eben solchen Curventeil. Der negative Tafelraum weist die gleichen Curventeile auf wie der positive.

Man erhält stets 2 Schnittpunkte mit dem Halbkreis, denen 2 congruente Prismen entsprechen.

Punkt f_1 liegt (wie in II.) entweder zwischen B_1 und C_1, auf B_1 oder C_1, oder ausserhalb derselben, je nachdem die Flächenwinkel an B und C des vorgegebenen Prismas beide spitz, einer ein rechter

oder stumpfer Winkel ist. Als besonderer Fall ist das Zusammenfallen des Punktes f_1 mit e_1 zu erwähnen, da sich dann die Curve 4. Ordnung auf eine Gerade reducirt.

Zur Berechnung.

Bezeichnet man mit Bezug auf den Coordinatenmittelpunkt e_1 die Strecke

$$a_1e_1 = x,\ a_1a = y,\ f_1e_1 = c,\ a_1g_1 = w,\ f_1a_1 = v,\ f_1c_1 = p$$

so finden sich die Gleichungen

$$v^2 = x^2 + c^2$$

$$w : p = x : v$$

$$y : w = m : n$$

woraus man

$$n^2y^2x^2 + n^2c^2y^2 = p^2m^2x^2$$

erhält.

Nimmt man hiezu die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{wo } r = ae)$$

so erscheint

$$x^4 + \left(c^2 - r^2 + \frac{m^2}{n^2}p^2\right)x^2 = c^2r^2$$

also

$$x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}\left[c^2 - r^2 + \frac{m^2}{n^2}p^2\right] \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2r^2 + \left[c^2 - r^2 + \frac{m^2}{n^2}p^2\right]^2}}$$

Für den erwähnten besonderen Fall ist $c = 0$, also wird aus der Gleichung der Curve 4. Ordnung

$$ny = \pm pm$$

d. i. eine Gerade A parallel zur Ebene BC oberhalb und unterhalb derselben.

Für x erhält man

$$x = \pm\sqrt{r^2 - \frac{m^2}{n^2}p^2}$$

Für ein vorgelegtes ähnliches Prisma sind lediglich Parallellinien zu ziehen, um auch hiefür den verlangten Schnitt zu erhalten.

IV. Fig. 7.

Nunmehr unterliegt es keiner Schwierigkeit, drei zu einander windschiefe Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden.

Sind B und C zwei windschiefe Gerade und a ein Punkt der dritten (A), so legt man durch a und B eine Ebene, welche die C im Punkte d schneidet, D ist die Spur eins dieser Ebene und infolge der Tafelannahme parallel zu B. Durch Verbindung der Punkte a und d erhält man den Schnittpunkt e auf B.

Ist nun abc das Schnittdreieck für a, C und B, welches die vorgeschriebenen Winkel α, β, γ hat, so kann man weiter, weil

$$a_1 e_1 : a_1 d_1 = a_1 b_1 : a_1 b_1'$$

auch die Winkel des Dreiecks $ab'c$ bestimmen, nach denen Dreikant $\overset{C}{d_1 c}$, $d_1 a_1$ und $\overset{D}{d_1 b_1'}$ geschnitten wird.

Man verschafft sich also zunächst das Dreikant, bestimmt die Winkel, nach denen dasselbe zu schneiden ist, und teilt $a_1 b_1'$ nach dem Verhältniss $a_1 e_1 : a_1 d_1$. Für die vorgegebenen Stücke a, C und B ist dann durch Ziehen von Parallelen die Lösung zu erreichen; dieselbe ist auf II. zurückgeführt.

XVIII.

Die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centralkraft.

Von

Ulrich Bigler.

Ich halte es nicht für überflüssig, meiner Arbeit über die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centralkraft einige Bemerkungen vorauszuschicken. Der dem Aufsatze zu Grunde gelegte Gegenstand gehört zu denjenigen Problemen der Mathematik, welche schon zu wiederholten Malen behandelt worden sind, und ich bin mir auch bewusst, dass selbst ganz tüchtige Mathematiker denselben zum Objecte ihres Nachdenkens gewählt haben. Aber trotz dem sind die Studien über diesen Gegenstand noch zu keinem Abschlusse gelangt, sondern die grosse Mannigfaltigkeit in der Annahme der Kraftwirkung lassen ihn als unerschöpflich erscheinen. Als Ursprung der Kraft wird hier eine Masse M angenommen, deren Einwirkung auf den materiellen Punkt m durch $nMmf'(r)$ dargestellt wird, wo n ein proportionaler Factor ist, und $f'(r)$ den Differentialquotienten einer Function darstellt, die nur vom Leitstrahle r, als der Verbindungslinie der beiden Massen, abhängig ist. Ueber die Function $f'(r)$ werden nun verschiedene Annahmen gemacht, um daraus die resultirenden Bewegungsarten abzuleiten. Wie viele der hier behandelten Fälle schon untersucht worden sind, ist mir unbekannt; ich weiss daher nicht, wie viel Neues der Aufsatz enthalten wird. Doch glaube ich annehmen zu dürfen, dass der Leser die Ueberzeugung bekommen wird, der Verfasser habe

dabei einen selbständigen Weg eingeschlagen, und die befolgte Methode dürfte einiges Interesse darbieten. Ich empfehle meinen Collegen die im nachfolgenden Aufsatze enthaltenen Studien über die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centralkraft einer wolwollenden Beurteilung.

Die Masse M sei Ursprung einer Kraft, welche auf den materiellen Punkt m nach einem bestimmten Gesetze anziehend oder abstossend wirkt Die Kraftwirkung geschehe immer in der Richtung des Leitstrahles r, welcher die beiden Massenmittelpunkte verbindet. Die Masse M wird als unbeweglich angenommen, während sich der Massenpunkt m unter dem Einflusse der Kraft frei bewegen kann. Die Kraft selber wird definirt als eine Function der Massen M und m und des Leitstrahles r und zwar sei sie den Massen direct proportionirt, während die Abhängigkeit von r durch eine Function $f'(r)$ dargestellt werden soll. Es sei daher die wirkende Kraft analytisch durch den Ausdruck

$$K = nMmf'(r)$$

dargestellt, wo n ein proportionaler Factor und $f'(r)$ nur eine Function von r ist, die als Differentialquotient einer Function $f(r)$ aufgefasst wird. Ich setze ferner fest, dass eine positive Kraft abstossend auf den Punkt m wirken soll, während eine neg. Kraft anziehend wirkt. Der Ausgangspunkt der Kraft K werde nun als Ursprung eines räumlichen, rechtwinkligen Coordinatensystems mit den Axen (X, Y, Z) gewählt und dem Massenpunkte m die Coordinaten (x, y, z) gegeben. Wird nun die Kraft K in ihre Componenten nach den drei Axen zerlegt, und werden dieselben resp. mit P, Q und R bezeichnet, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$P = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad Q = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad R = \mathrm{m}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Wenn nun der Leitstrahl r mit den pos. Axenrichtungen resp. die Winkel α, β, γ bildet, so ist auch

$$P = K\cos\alpha; \quad Q = K\cos\beta; \quad R = K\cos\gamma$$

und wenn in diesen Gleichungen für die Kraft K und die Cosinuse die bekannten Werte eingesetzt werden, so hat man

$$P = nMmf'(\mathfrak{r}) \,.\, \frac{x}{r}; \quad P = nMmf'(\mathfrak{r}) \,.\, \frac{y}{r};$$

$$R = nMmf'(r) \,.\, \frac{z}{r}$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke mit den obigen führt nun auf das folgende System von Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = n M f'(r) \cdot \dfrac{x}{r} \\[2ex] 2) & \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = n M f'(r) \cdot \dfrac{y}{r} \\[2ex] 3) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = n M f'(r) \cdot \dfrac{z}{e} \end{array}\right\} \text{ I.}$$

Wird nun hier die erste Gleichung mit y multiplicirt und die zweite mit x und subtrahirt, so erhält man die Gleichung

$$y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Mittelst ähnlicher Operationen an System I. erhält man nebst dieser Gleichung noch 2 andere, so dass das System I. durch das folgende System ersetzt werden kann.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] 2) & z \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] 3) & x \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ I}'.$$

Wenn wir die Ableitung nach der Zeit von dem Ausdruck

$$y \frac{\partial x}{dt} - x \frac{\partial y}{dt}$$

untersuchen, so findet man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t} \right) = y \frac{\partial^2 x}{\partial t^3} - x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

und somit kann das System I'. durch das Folgende ersetzt werden:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \dfrac{\partial}{\partial t} \cdot \left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - c \dfrac{\partial y}{\partial t} \right) = 0 \\[2ex] 2) & \dfrac{\partial}{\partial x} \cdot \left(z \dfrac{\partial y}{\partial t} - y \dfrac{\partial z}{\partial t} \right) = 0 \\[2ex] 3) & \dfrac{\partial}{\partial t} \cdot \left(x \dfrac{\partial z}{\partial t} - z \dfrac{\partial x}{\partial t} \right) = 0 \end{array}\right\} \text{ I}''.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man nun, dass die Ausdrücke $\left(y\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ etc. von der Zeit t unabhängig sind, somit durch Constante dargestellt werden können, die mit A, B und C bezeichnet werden sollen. Die Integration des System I″. ergibt daher das folgende:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} 1) & y\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial y}{\partial t}=A \\ 2) & z\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial z}{\partial t}=B \\ 3) & x\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial x}{\partial t}=C \end{cases}$$

Nun stellen aber bekanntlich die Determinanten $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{d t}\,.\,x \\ \frac{\partial y}{\partial t}\,.\,y \end{vmatrix}$, etc. die Projectionen der doppelten Flächengeschwindigkeit auf die Coordinatenebenen dar. Wird diese mit F bezeichnet, so wird dieselbe durch die Gleichung

$$F=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

bestimmt. Da nun aber A, B und C constante Grössen und von der Zeit unabhängig sind, so gilt dasselbe auch für F.

Wir erhalten daher für einen materiellen Punkt, der sich unter dem Einflusse einer Centralkraft frei im Raume bewegen kann, folgenden Hauptsatz:

Bewegt sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer Centralkraft frei im Raume, so ist dessen Flächengeschwindigkeit eine Constante.

Wenn daher der Radius r in der Zeiteinheit die Fläche $\frac{1}{2}\,.\,F$ durchläuft, so ist die von ihm während der Zeit dt durchlaufene Fläche $\frac{1}{2}\,.\,F\,.\,dt$ und somit stellt $F\,.\,t$ den doppelten Inhalt des Sectors dar, der von r in der Zeit t durchlaufen wird. Der Anfang der Zeit ist so gewählt, dass mit $t=0$ auch der Sector null wird. Die Integrationsconstante, welche hier $F\,.\,t$ noch beigesetzt werden müsste, ist daher als null angenommen worden. Die Inhalte der Sectoren sind somit mit der Zeit direct proportional.

Dieser Satz gilt natürlich auch von den Projectionen der Sectoren; auch diese sind mit der Zeit proportional und können durch At, Bt und Ct dargestellt werden. Wenn nun die Gleichungen des Systems II. der Reihe nach mit z, x und y multiplicirt und addirt werden, so erhält man die bedeutungsvolle Gleichung

$$Bx + Cy + Az = 0$$

Das ist nun die Gleichung einer Ebene, welche durch den Ursprung der Kraft gelegt ist, und in welcher die Bewegung des materiellen Punktes erfolgt. Wir haben daher den ferneren Satz:

Die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher unter dem Einflusse einer Centralkraft steht, erfolgt in einer Ebene, welche durch den Ursprung der Kraft gelegt ist.

Da die in dieser Gleichung auftretenden Coefficienten A, B und C von der Zeit t unabhängig sind, so ist auch die Lage dieser Ebene von der Zeit unabhängig.

Ist z. B. die Constante $A = 0$, so erfolgt die Bewegung in einer Ebene, welche durch die z-axe geht; sind $A = 0$ und $B = 0$, so erfolgt die Bewegung in der Ebene $y = 0$ und sind alle drei Constanten gleich null, so erfolgt die Bewegung in einer Geraden, da ja in diesem Falle auch $F = 0$ ist. Der Einfachheit wegen wähle man nun die Ebene, in welcher die Bewegung des materiellen Punktes erfolgt, als xy-ebene eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems und gebe dem Punkte m die Coordinaten (x, y). Hier kann nun die doppelte Flächengeschwindigkeit durch $y\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial y}{\partial t}$ dargestellt werden, die in Zukunft mit A bezeichnet sein soll, wobei aber zu bemerken ist, dass dieses neue A im allg. nicht mit dem früher gebrauchten A identisch ist. Es gilt daher die Gleichung

$$1. \quad y\,dx - x\,dy = A\,dt$$

Wir suchen nun weiter einen Ausdruck für die Geschwindigkeit v des Punktes m in seiner Bahn. Bekanntlich sind die Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}$ die Componenten derselben nach den Axen, so dass v durch die Gleichung

$$v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

bestimmt wird, und unter v selber die positive Quadratwurzel aus der rechten Seite verstanden ist. Wird nun diese Gleichung nach t abgeleitet und durch 2 dividirt, so erhält man

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Werden nun hier die zweiten Abgeleiteten aus System I. ersetzt und zugleich in Berücksichtigung gezogen, dass aus

$$r^2=x^2+y^2$$

durch einmalige Ableitung nach t die Relation

$$r\,\frac{\partial r}{\partial t}=x\,\frac{\partial x}{\partial t}+y\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

folgt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial t}=nMf'(r)\,\frac{\partial r}{\partial t}$$

Soll nun v^2 aus dieser Gleichung als Function von r dargestellt werden können, so muss das unbestimmte Integral $\int f'(r)\,dr$ angebbar sein. Wir nehmen daher an, es sei $f'(r)$, wie schon im Anfang gesagt wurde, das vollständige Differential einer Function $f(r)$, so dasss man setzen kann

$$f'(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial r}$$

In diesem Falle ist nun

$$2.\quad v^2=2nMf(r)+B$$

wo B die Integrationsconstante bezeichnet, und unter v die pos. Wurzel zu verstehen ist. Damit nun eine reelle Bewegung des Punktes m statt finde ist absolut notwendig, dass der Ausdruck unter der Quadratwurzel positiv ausfalle, und es sind daher nur solche Werte von r zulässig, welche $(2nMf(r)+B)$ pos. machen. Für eine gegebene Function $f(r)$ ist aber auch B so zu wählen, dass die pos. Beschaffenheit des genannten Ausdruckes längs der Wegcurve erhalten bleibt. Ich suche ferner noch einen allgemeinen Ausdruck für dr. Der Leitstrahl r bilde mit der pos. Richtung der x-axe den Winkel w. Dann ist

$$x=r\cos w;\quad y=v\sin w$$

Da nun bekanntlich der Ausdruck $(y\,dx-x\,dy)$ den doppelten Inhalt des Dreiecks darstellt, das gebildet wird von dem Wegelement ds und den Leitstrahlen r und r_1 nach den Punkten (x, y) und $(x+dx, y+dy)$ und dieser Inhalt auch durch r^2dw dargestellt werden kann,

wenn dw den Winkel zwischen den Strahlen r und r_1 bezeichnet, so hat man die Beziehung

$$y\,dx - x\,dy = A\,dt = r^2\,dw$$

Für das Wegelement ds, welches vom Massenpunkte m während der Zeit dt mit der Geschwindigkeit v durchlaufen wird, hat man den Ausdruck

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,dw)^2$$

Da nun aber auch

$$ds = v\,dt$$

ist, so gilt die Gleichung

$$(v\,dt)^2 = (dr)^2 + (r\,dw)^2$$

Wird nun in dieser Gleichung für v^2 der oben gefundene Ausdruck substituirt und ebenfalls dw mittelst der Gleichung

$$r^2\,dw = A\,dt$$

ersetzt, so erhält man für dr nach einigen Umformungen den Wert

$$3. \quad (dr)^2 = \left((2n\,Mf(r) + B) - \frac{A^2}{r^2}\right) dt^2$$

wo unter dr die pos. Quadratwurzel aus der rechten Seite verstanden ist. Dass die Annahme $A = 0$ eine geradlinige Bewegung bedingt, ist sofort klar, da in diesem Falle die Flächengeschwindigkeit gleich null ist. Wenn aber $A = 0$ ist, so muss wegen

$$A\,dt = r^2\,dw \quad \text{auch} \quad dw = 0$$

sein, da ja nicht überall $r = 0$ sein kann. Ist aber

$$dw = 0$$

so muss $w =$ Constante sein, also die Bahn eine gerade Linie. Wenn die Bahn des materiellen Punktes ein Kreis sein soll, so muss längs der ganzen Wegcurve

$$dr = 0$$

also $r =$ Const. sein. Damit dieses der Fall ist, muss die Bedingung

$$2n\,Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2} = 0$$

erfüllt sein, das heisst, es muss

$$2n\,Mf(r) + B = \frac{A^2}{r^2}$$

stattfinden. Da nun aber

$$2u\,Mf(r) + B = v^2$$

ist, so kann die Bedingung für eine Kreisbewegung auch in der Form

$$v^2 = \frac{A^2}{r^2}$$

dargestellt werden; es muss also

$$A = rv$$

sein. Diese Bedingung ist nun aber sofort klar, wenn man sich daran erinnert, dass A die Flächengeschwindigkeit und v die Tangentialgeschwindigkeit des Punktes m ist. In diesem Falle ist dann auch

$$r\,dw = v\,dt = \frac{A}{r}\,dt$$

Aus der allgemeinen Gleichung 3. ergibt sich für das Zeitelement dt der Ausdruck

$$3'.\qquad dt = \frac{dr}{\sqrt{(2n\,Mf(r) + B) - \frac{A^2}{r^2}}}$$

Für eine Kreisbewegung, bei welcher sowol der Zähler als auch der Nenner in diesem Ausdrucke verschwindet, ist diese Formel nicht anwendbar. Ersetzt man hier das Zeitelement dt durch $\frac{r^2\,dw}{A}$ so erhält man

$$4.\qquad dw = \frac{A\,dr}{r^2\sqrt{(2n\,Mf(r) + B) - \frac{A^2}{r^2}}}$$

eine Gleichung die für eine parallellinige Bewegung nicht mehr anwendbar ist, da in diesem Falle sowol dw, als auch A gleich null st. Die Formeln 3) und 4) zeigen nun deutlich, dass für eine reelle Bewegung nicht nur $(2a\,Mf(r) + B)$ pos. sein muss, sondern auch $2n\,Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2}$. Es muss daher beständig $2n\,Mf(r) + B$ pos. und grösser als $\frac{A^2}{r^2}$ sein.

Ich bin nun mit den allgemeinen Betrachtungen beim Schlusse angelangt und gehe zu den speciellen Fällen über.

I. Die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

Bedingung: $A = 0$.

$$1) \quad f'(r = r; \quad 2n\,Mf(r) = n\,Mr$$

$$K = n\,Mmr; \quad g = n\,Mr$$

Bei dieser speciellen Annahme sind sowol die Kraft als auch die Beschleunigung pos.; die Kraft übt daher eine abstossende Wirkung aus. Wenn die Constante n noch durch n_1^2 ersetzt wird, so erhält man für die Geschwindigkeit v den Ausdruck

$$v = \sqrt{Mn_1^2 r^2 + B}$$

Setzt man nun fest, dass in $r = a$ die Geschwindigkeit null sei, so wird die Constante B durch die Gleichung

$$0 = \sqrt{Mn_1^2 a^2 + B}$$

bestimmt, woraus folgt, dass

$$B = -n_1^2 a^2 M$$

sein muss. Es ist daher

$$v = n \,.\, \sqrt{M} \,.\, \sqrt{r^2 - a^2}$$

und man erkennt, dass eine reelle Bewegung nur für $r > a$ statt hat. Wird hier

$$r = a + \varrho$$

gesetzt, wo ϱ neben der endlichen Strecke a verschwindend klein sein soll, so kann die Geschwindigkeit in diesem Punkte annähernd durch

$$v = n_1 \sqrt{2aM} \,.\, \sqrt{\varrho}$$

dargestellt werden. Dieselbe ist daher annähernd mit der Quadratwurzel aus dem Wege proportional, nur einer hat die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = \varrho : \varrho_1$$

Ist aber r sehr gross, so dass neben r die Grösse a vernachlässigt werden kann, so ist in tiefster Näherung

$$v = n\sqrt{M} \,.\, r$$

In grosser Ferne ist daher die Geschwindigkeit mit der Strecke r direct proportionirt und wird auf die gleiche Art unendlich, wie der zurückgelegte Weg.

Der Punkt P soll die Strecke a nach aussen begrenzen. Man trage nun vom Punkte P aus auf dem Leitstrahle die Strecke h nach aussen ab und untersuche die Geschwindigkeit auf dem Wege h. Wenn nun die Wege a und h noch so beschaffen sind, dass der Quotient $\frac{h}{a}$ verschwindend klein ist, so dass höhere Potenzen derselben vernachlässigt werden können, so lässt sich v annähernd durch die Gleichung

$$v = n_1 \,.\, \sqrt{2aM} \,.\, \sqrt{\varrho}$$

darstellen. Auf der Strecke h gilt daher für die Geschwindigkeit annähernd die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = \varrho : \varrho_1$$

Die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich wie die durchlaufenen Wege.

Das Zeitelement dt, welches der materielle Punkt m braucht, um das Wegelement dr zurückzulegen, wird nach Gleichung (3') durch

$$dt = \frac{dr}{v}$$

bestimmt, eine Relation, die für eine geradlinige Bewegung sofort einleuchtet. Setzt man nun in

$$v dt = dr$$

für v den oben gefundenen Wert ein, so folgt

$$dt = \frac{dr}{n_1 \sqrt{M} \,.\, \sqrt{r^2 - a^2}}$$

Um diese Gleichung zu integriren setze man

$$\frac{a}{r} = \sin\alpha$$

dann ist

$$dr = -\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \,.\, d\alpha$$

und somit

$$dt = -\frac{d\alpha}{n_1 \sqrt{M} \cdot \sin\alpha} = -\frac{d \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{n_1 \sqrt{M} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

daher ist

$$t = -\frac{1}{n_1 \sqrt{M}} \log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + C$$

Nun ist aber

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{a}{r+\sqrt{r^2-a^2}}$$

somit

$$t = \frac{1}{n_1\sqrt{M}} \cdot \log\left(\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right) + C$$

Soll nun für $r = a$ auch $t = 0$ sein, so muss $C = 0$ angenommen werden, und man erhält schliesslich für die Zeit den Wert

$$t = \frac{1}{n_1\sqrt{M}} \cdot \log\left(\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)$$

wenn dieselbe von dem Momente an gerechnet wird, wo der materielle Punkt m seine Bewegung beginnt. Um die Zeit in der Nähe des Ausgangspunktes der Bewegung zu beurteilen, setze man

$$r = a + \varrho$$

und nehme ϱ sehr klein an. Weil unter dieser Voraussetzung $\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}$ annähernd durch $1+\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$ dargestellt werden kann, also $\log\left(\frac{r+\sqrt{r^2-a_1^2}}{a}\right)$ durch $\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$, so lässt sich die Zeit in einem solchen Punkte annähernd durch

$$t = \frac{1}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{2}{aM}} \cdot \sqrt{\varrho}$$

darstellen. Dieselbe ist somit mit der Quadratwurzel aus der kleinen Wegstrecke ϱ proportional; hier gilt daher die Proportion

$$t^2 : t_1^2 = \varrho : \varrho_1$$

Ist r sehr gross, so dass a neben r vernachlässigt werden kann, so ist $\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}$ annähernd gleich $\frac{2r}{a}$ und man erkennt, dass die Zeit unendlich wird wie $\log r$. Man untersuche ferner die Zeit auf der früher definirten Wegstrecke h und setze

$$r = a + \varrho$$

wo der Quotient $\frac{\varrho}{a}$ für das Interwall $0 < \varrho < h$ als verschwindend klein betrachtet werden kann, Weil in diesem Falle $\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}$ durch $1+\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$ also $\log\left(\frac{r+\sqrt{r^2+a^2}}{a}\right)$ durch $\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$ ersetzt wer-

den kann, so kann auf der angegebenen Strecke h die Zeit annähernd durch

$$t=\sqrt{\frac{2aM}{an_1 M}}\cdot\sqrt{\varrho}$$

dargestellt werden. Dieselbe ist daher mit der Quadratwurzel aus dem durchlaufenen Wege proportional.

$$2)\quad f'(r)=-r$$

$$K=-nMmr;\quad g=-nMr;\quad 2nMf(r)=-nMr^2$$

Da in diesem Falle der analytische Ausdruck der Kraft neg. ist, so wirkt dieselbe anziehend auf die Masse m ein. Ersetzt man wie früher die Constante n durch n_1^2 und nimmt die Geschwindigkeit in $r=a$ wieder als null an, so erhält man für v den Ausdruck

$$v=n_1\sqrt{M}\,.\,\sqrt{(a^2-r^2)}$$

Diese Gleichung offenbart sofort, dass nur auf dem Wege $r<a$ eine reelle Bewegung stattfindet. Die Geschwindigkeit im Anfange des Weges ist null und der Massenpunkt kommt mit der Geschwindigkeit $n_1\sqrt{M}\,.\,a$ im Ursprunge der Kraft an. Die Endgeschwindigkeiten verhalten sich daher wie die durchlaufenen Wege. Ist ferner a sehr gross und r so beschaffen, dass $\frac{r}{a}$ verschwindend klein ist, so kann die Geschwindigkeit v für solche Punkte der Bahn durch $n_1\sqrt{M}\,.\,a$ dargestellt werden, ist daher auf der betreffenden Wegstrecke annähernd constant. Wenn daher der Massenpunkt m aus dem Unendlichen, wo seine Geschwindigkeit als null aufgefasst wird, durch die oben definirte anziehende Kraft in das endliche Gebiet gelangt, so kann hier die Geschwindigkeit als constant aufgefasst werden, welche auf dieselbe Weise unendlich wird, wie der durchlaufene Weg. Vom Punkte P aus, welcher die Wegstrecke a nach aussen begrenzt, werde nach innen die Strecke h abgetragen und es soll die Geschwindigkeit v auf diesem Wegstücke untersucht werden. Man setze daher

$$a=R+h,\quad r=R+r_1$$

wo der Quotient $\frac{r_1}{R}$ für das Intervall $0<r_1<h$ verschwindend klein ist. Setzt man dann noch $r_1+\mathfrak{r}=h$, so ist in tiefster Näherung

$$\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{2R\mathfrak{r}}$$

und daher

$$v=n_1\sqrt{2RM}\,.\,\sqrt{\mathfrak{r}}$$

Auf dem Wegstücke h gilt daher annähernd die Proportion

$$v_1^2 : v^2 = \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}$$

Um einen allgemein gültigen Ausdruck für die Zeit t zu erhalten, setze man wieder

$$v\,dt = dr$$

und führe in diese Gleichung für v den oben gefundenen Wert ein, dann hat man

$$dt = \frac{dr}{n_1 \sqrt{M} \,.\, \sqrt{(a^2 - r^2)}}$$

Um diese Gleichung integriren zu können, setze man

$$r = a \sin\alpha, \quad \text{also} \quad dr = a \cos\alpha\, d\alpha$$

Durch diese Substitution geht nun der obige Ausdruck in den andern

$$dt = \frac{d\alpha}{n_1 \sqrt{M}}$$

über, so dass

$$t = \frac{\alpha}{n_1 \sqrt{M}} + C$$

gesetzt werden kann.

In $r = a$ ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wird nun der Anfangspunkt der Zeit so gewählt, dass mit

$$v = 0 \quad \text{auch} \quad t = 0$$

ist, so muss die Constante C den Wert $\frac{-\pi}{2n_1 \sqrt{M}}$ haben. Weil nun auch

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{a}$$

ist, so hat man schliesslich, wenn noch die Zeit pos. aufgefasst wird, für t den Wert

$$t = \frac{1}{2n_1 \sqrt{M}} \left(\pi - 2 \arcsin \frac{r}{a}\right)$$

Die ganze Zeit T, welche der Massenpunkt braucht, um den Weg a zurückzulegen, ist daher von a unabhängig, also eine Constante, die durch $\frac{\pi}{2n_1 \sqrt{M}}$ dargestellt wird. Somit erreichen verschieden Massenpunkte, die in verschiedenen Entfernungen zu gleicher Zei ihre Bewegungen nach dem Kraftmittelpunkte beginnen, in demselbe

Momente den Ursprung der Kraft. Ist a unendlich gross, so ist für alle endliche r die Zeit t annähernd gleich $\frac{1}{2n_1\sqrt{M}}\cdot\left(\pi-\frac{2r}{a}\right)$. In unmittelbarer Nähe des Ausgangspunktes der Bewegung, wo

$$r = a - \varrho$$

und ϱ sehr klein ist und $2\arcsin\frac{r}{a}$ annähernd durch $\left(\pi - 2\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}\right)$ dargestellt werden kann, ist die Zeit t mit der Quadratwurzel aus der Wegstrecke proportionirt, das heisst, es ist in tiefster Näherung

$$t = \frac{1}{n_1\sqrt{M}}\cdot\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$$

Um nun auch hier die Zeit t auf der früher bezeichneten Wegstrecke h untersuchen zu können, setze man wieder

$$a = R + h;\quad r = R + r_1$$

Wenn nun noch

$$r_1 + \mathfrak{r} = h$$

gesetzt und angenommen wird, dass der Quotient $\frac{\mathfrak{r}}{R}$ im ganzen Intervalle $0 < \mathfrak{r} < h$ verschwindend klein sei, so gelten näherungsweise die Gleichung

$$\sin\alpha = 1 - \frac{\mathfrak{r}}{R} + \text{etc.};\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{2\mathfrak{r}}{R}} + \text{etc.};$$

$$2\alpha = \pi - 2\sqrt{\frac{2\mathfrak{r}}{R}} + \text{etc.}$$

und daher kann t auf der Strecke h in tiefster Näherung durch

$$t = \frac{1}{n_1\sqrt{M}}\cdot\sqrt{\frac{2\mathfrak{r}}{R}}$$

dargestellt werden. Weil in diesem Falle die Beschleunigung g annähernd durch $n_1{}^2 MR$ und die Geschwindigkeit durch $n_1\sqrt{2RM}\sqrt{\mathfrak{r}}$ dargestellt werden kann, so ergeben sich aus der Gleichung für die Zeit t auch die nachfolgenden Näherungswerte

$$\mathfrak{r} = \frac{n_1{}^2 MR}{2}\cdot t^2;\quad \mathfrak{r} = \frac{g}{2}\cdot t^2;\quad \mathfrak{r} = \frac{v}{2}\cdot t$$

Um die Arbeit über die geradlinige Bewegung nicht übermässig auszudehnen, behandle ich bloss noch den Fall, wo die gegebenen Massen nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einander

wirken, und setze $f'(r) = -\frac{1}{r^3}$. Man könnte selbstredend für $f'(r)$ noch andere Functionen von r wählen und namentlich auch solche, wo höhere Potenzen von r vorkommen. Da aber die Bestimmung der dabei auftretenden Integrale mehr als elementare Hülfsmittel erfordert, so sehe ich hier von diesen Fällen ab und gehe über zur Behandlung von

$$3)\quad f'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

$$K = -\frac{nMm}{r^2};\quad g = -\frac{nM}{r^2};\quad 2nMf(r) = \frac{2nM}{r}$$

Wenn auch hier die im allgemeinen Ausdrucke für die Geschwindigkeit v auftretende Constante B so bestimmt wird, dass im Punkte $r = a$ die Bewegung beginnt, also dort $v = 0$ annimmt, so ist

$$v = \sqrt{2nM}\,.\,\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{2nM}{a}}\,.\,\sqrt{\left(\frac{a-r}{r}\right)}$$

und wir haben nur auf der Wegstrecke, wo $r < a$ ist, eine reelle Bewegung. Wenn der Massenpunkt im Unendlichen seine Bewegung nach dem Kraftmittelpunkt beginnt, so kann die Geschwindigkeit im endlichen Gebiete annähernd durch $\sqrt{2nM}\sqrt{\frac{1}{r}}$ dargestellt werden, wo r jeweilen seine Entfernung vom Ursprunge angibt. Somit ist bei dieser Annahme der Kraftwirkung das Product $v^2 r$ annähernd constant und es gilt die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r$$

Untersuchen wir auch hier die Geschwindigkeit v auf der Strecke h und machen dabei die gleiche Voraussetzung wie früher, so ist annähernd

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+r_1} = \frac{1}{R} - \frac{r_1}{R^2} + \text{etc.};\qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} + \text{etc.}$$

also

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a} = \frac{h - r_1}{R^2} + \text{etc.}$$

Somit kann v auf der Strecke h in tiefster Näherung durch

$$v = \frac{\sqrt{2nM}}{R}\cdot\sqrt{\text{r}}$$

dargestellt werden. Dieselbe ist somit mit der Quadratwurzel aus der durchlaufenen Wegstrecke proportional. Wird diese Gleichung nach $\mathfrak{r}$ aufgelöst und beachtet, dass annähernd der absolute Wert von der Beschleunigung durch $\frac{nM}{R^2}$ dargestellt werden kann, so findet man

$$\mathfrak{r} = \frac{v^2}{2g}$$

Zur Bestimmung der Zeit dient in diesem Falle die Gleichung

$$dt = \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{2nM}\,.\,\sqrt{\left(1-\frac{r}{a}\right)}}$$

Um dieselbe integriren zu können, setze man

$$r = a\sin^2\alpha$$

also

$$dr = 2a\sin\alpha\cos\alpha d\alpha,$$

dann ist

$$dt = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2nM}}\,.\,2\sin^2\alpha d\alpha$$

Weil ferner

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

ist, so erhält man für die Zeit t den allgemeinen Ausdruck

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2nM}}\,.\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha) + C$$

Die Zeit t soll nun von dem Momente an gezählt werden, wo der Massenpunkt seine Bewegung beginnt, also im Punkte P. Für denselben ist aber

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

und die Constante C muss somit den Wert $\frac{-a\sqrt{a}\,\pi}{2\sqrt{2nM}}$ haben. Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \sqrt{\frac{r}{a}}\,.\,\sqrt{1-\frac{r}{a}}$$

und

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{r}{a}}$$

demnach ist der pos. Wert von t gleich dem Ausdrucke

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2nM}}\,.\,\left(\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r}{a}}\right) + \frac{1}{a}\,.\,\sqrt{r(a-r)}\right)$$

Die Zeit, welche der Massenpunkt m braucht, um die Strecke a zu durchlaufen, wird gefunden, indem in der obigen Gleichung $r = 0$ gesetzt wird. Wird dieselbe, wie früher, mit T bezeichnet, so erhält man dafür den Wert

$$T = \frac{a\sqrt{a}\,.\,\pi}{2\sqrt{2n\,M}}$$

Für verschiedene Wegeslängen a gilt daher die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

Die Quadrate der Gesamtzeiten verhalten sich daher wie die Kuben der durchlaufenen Wege. Ist a sehr gross und stellt r eine endliche Zahl dar, so kann die Zeit t in tiefster Näherung durch $\frac{a\sqrt{a}\,.\,\pi}{2\sqrt{2n\,M}}$ dargestellt werden, wird daher unendlich von der Form $a^{\frac{3}{2}}$.
Zum Schlusse will ich noch die Zeit auf der Strecke h untersuchen. Der Quotient $\frac{\mathfrak{r}}{R}$ sei längs des Intervalls $0 < \mathfrak{r} < h$ verschwindend klein. Weil in diesem Falle $\sqrt{\frac{r}{a}\left(1 - \frac{r}{a}\right)}$ und α annähernd durch

$$\sqrt{\frac{r}{a}\cdot\left(1 - \frac{r}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{R}} + \text{etc.}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{R}} + \text{etc.}$$

dargestellt werden können, so kann auf der Strecke h die Zeit in tiefster Näherung durch

$$t = \frac{2R}{\sqrt{2n\,M}}\cdot\sqrt{\mathfrak{r}}$$

dargestellt werden. Hier gilt daher die Proportion

$$t^2 : t_1^2 = \mathfrak{r} : \mathfrak{r}_1$$

das heisst: die Quadrate der Zeiten verhalten sich wie die durchlaufenen Wege.

II. Die kreisförmige Bewegung eines materiellen Punktes.

Die Bedingung für eine kreisförmige Bewegung ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

das heisst, der Leitstrahl r muss von der Zeit unabhängig sein. Damit nun aber längs des ganzen Weges

$$dr = 0$$

ist, muss offenbar

$$2n\,Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2} = 0$$

sein, wobei aber angenommen wird, dass A von null verschieden sei, weil sonst keine reelle Bewegung vorhanden wäre. Weil nun aber

$$2n\,Mf(r) + B = v^2$$

ist, so lässt sich die obige Bedingung durch die andere

$$A = rv$$

wiedergeben, was für eine Kreisbewegung sofort einleuchtet, da ja A die doppelte Flächengeschwindigkeit darstellt. Aus der Bedingung

$$dr = 0$$

folgt aus den früher angegebenen Formeln, dass auch

$$ds = r\,dw = v\,dt$$

sein muss. Bei der Kreisbewegung ist daher einerseits

$$v = \sqrt{2n\,Mf(r) + B}$$

und andererseits

$$v = \frac{A}{r}$$

und da

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

ist, so muss auch überall $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, somit $v =$ Constante sein. Der Massenpunkt M durchläuft daher unter dem Einflusse einer Centralkraft mit constanter Geschwindigkeit die Kreisbahn und eine Beschleunigung findet nur in der Richtung der Normalen statt, welche ihrem absoluten Werte nach durch

$$g = n\,Mf'(r)$$

dargestellt werden kann. Wir suchen nun zuerst nach einem andern Ausdrucke für die Beschleunigung g. Die beiden Punkte P und P_1 mögen das Curvenelement ds abgrenzen; in beiden ist die Geschwindigkeit v dieselbe und unterscheidet sich nur durch ihre Richtungen. Wird nun dieser Richtungsunterschied mit dw bezeichnet, so ist

$$v\,dw = g\,dt$$

Nun ist aber bekanntlich auch

$$r\,dw = ds = v\,dt$$

somit

$$r\frac{\partial w}{\partial t} = v, \quad \text{also} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{v}{r}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$r\frac{\partial w}{\partial t} = g$$

ein, so erhält man für die Normalbeschleunigung g schliesslich den Ausdruck

$$g = \frac{v^2}{r}$$

Nun sollen bestimmte Annahmen über die Kraftwirkung gemacht werden.

$$1) \quad f'(r) = -r$$

$$K = -nMmr; \quad g = -nMr; \quad 2nMf(r) = -nMr^2$$

Die Geschwindigkeit v wird mittelst der Gleichung

$$v^2 = rg$$

gefunden, wo unter g der absolute Wert der Beschleunigung verstanden ist. Setzt man hier für g obigen Wert ein, so folgt

$$v = r\,.\,\sqrt{nM}, \quad \text{also} \quad \frac{v}{r} = \sqrt{nM}$$

Für verschiedene Massenpunkte m, welche unter dem Einflusse derselben Masse M in verschiedenen Abständen r den Kraftursprung umkreisen, ist daher der Quotient $\frac{v}{r}$ eine Constante; daher gilt hier die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Radien der Kreisbahnen.

Zur Bestimmung der Flächengeschwindigkeit A wende man die Formel

$$A = rv$$

an und setze für v den oben gefundenen Wert ein; dann findet man

$$A = r^2\sqrt{nM}; \qquad \frac{A}{r^2} = \sqrt{nM}$$

Somit ist auch $\frac{A}{r^2}$ für alle materiellen Punkte der verschiedenen Bahnen eine Constante und es gilt daher die Proportion

$$A : A_1 = r^2 : r_1^2$$

Die Flächengeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

Wenn der Leitstrahl r mit der pos. Richtung der x-axe den Winkel w bildet, so ist

$$r\,dw = v\,dt$$

also

$$dw = \sqrt{nM}\,dt$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt sofort

$$w = \sqrt{nM}\,.\,t$$

wenn die Zeit von dem Momente an gerechnet wird, wo der materielle Punkt m die x-axe passirt.

Die Radien der verschiedenen Bahnen durchlaufen daher in gleichen Zeiträumen gleiche Winkel. Wenn die Umlaufszeit mit T bezeichnet wird, so findet man für dieselbe den Wert

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{nM}}$$

Da dieser Ausdruck vom Radius der Bahn unabhängig ist, so durchlaufen die verschiedenen Massenpunkte in gleichen Zeiten ihre Bahnen. Dass für eine solche Kraftwirkung nur pos. Werte von der im Ausdrucke für v auftretenden Constanten B in Betracht kommen können, ergibt sich schon aus der Gleichung

$$v^2 = B - nMr^2$$

Ist einmal ein pos. Wert von B gewählt, so gibt die Gleichung

$$nMr^2 = B - nMr^2$$

den Wert von r. Nach derselben ist

$$r = \sqrt{\frac{B}{2nM}}$$

und es gilt daher die Proportion

$$r^2 : r_1^2 = B : B_1$$

Setzt man diesen Wert von r in den Ausdruck $B - nMr^2$ ein, so geht dieser in $\frac{B}{2}$ über, ist daher pos., sobald B pos. ist. Die Constante B darf daher alle positiven Werte durchlaufen.

$$2)\quad f'(r) = -r^2$$

Ersetzt man das frühere n durch $\frac{3n_1^3}{2}$, so hat man hier

$$K = -\tfrac{3}{2}n_1^3 Mmr^2;\quad g = -\tfrac{3}{2}n_1^3 Mr^2;\quad 2nMf(r) = -n_1^3 Mr^3$$

Nach der bekannten Formel

$$\frac{v^2}{r} = g$$

erhält man für die Geschwindigkeit v den Wert

$$v^2 = \tfrac{3}{2}Mn_1^3r^3,\qquad \text{also}\qquad v = n_1 r \,.\, \sqrt{\frac{3n_1 Mr}{2}}$$

Dividirt man daher v^2 durch r^3, so ergibt sich, dass dieser Quotient für alle materiellen Punkte, welche in concentrischen Bahnen den Kraftursprung umkreisen, constant ist, dass somit für dieses Bewegungssystem die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r^3 : r_1^3$$

gilt.

Die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich daher wie die Kuben der Radien.

Um einen Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit A zu erhalten, setze man wieder $A = rv$ und führe für v den oben erhaltenen Wert ein. Dann erhält man

$$A^2 = \tfrac{3}{2}n_1^3 Mr^5;\qquad A = n_1 r^2 \,.\, \sqrt{\frac{3n_1 Mr}{2}}$$

Der Ausdruck für A^2 zeigt nun sofort, dass der Quotient $\frac{A^2}{r^5}$ für ein solches Bewegungssystem materieller Punkte eine Constante ist, und dass daher die Proportion

$$A^2 : A_1^2 = r^5 : r_1^5$$

stattfindet.

Die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten verhalten sich wie die fünften Potenzen der Entfernungen.

Auch hier ist

$$dw = \frac{v}{r}\,dt$$

und wenn man für $\frac{v}{r}$ den obigen Wert einsetzt, so erhält man für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{dw}{dt}$ den Wert

$$\frac{dw}{dt} = n_1 \sqrt{\frac{3n\,Mr}{2}}$$

Dieselbe ist somit der Quadratwurzel aus der Entfernung proportional. Für den Centriwinkel w erhält man hieraus

$$w = n_1 \sqrt{\frac{3\,n_1\,Mr}{2}}\,.\,t$$

Derselbe ist daher für dasselbe Massenteilchen der Zeit proportional, nur für verschiedene Massenpunkte, deren Bahnen concentrische Kreise sind, gilt für gleiche Zeiten die Proportion

$$w^2 : w_1^{\,2} = r : r_1$$

Für die Umlaufszeit T erhält man aus der Gleichung für w den Wert

$$T = \frac{2\pi}{n_1 \sqrt{\frac{3n_1\,Mr}{2}}}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass rT^2 eine Constante ist und zwar gleich $\frac{8\pi^2}{3n_1^{\,3}M}$. Daher gilt für ein solches Bewegungssystem die Proportion

$$T^2 : T_1^{\,2} = r_1 : r$$

Bewegen sich daher verschiedene Massenpunkte in concentrischen Kreisen unter dem Einflusse einer Centralkraft, welche im direkten, quadratischen Verhältniss der Entfernung wirkt, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie umgekehrt die Radien ihrer Bahnen.

Weil hier

$$v^2 = B - n_1^{\,3} Mr^3$$

ist, so können für eine reelle Bewegung nur pos. Werte von B in Betracht kommen. Weil ferner

$$v^2 = \frac{A^2}{r^2} = \frac{3\,n_1^{\,3}\,Mr^3}{2}$$

so erhält man zur Bestimmung von r die Gleichung

$$\frac{3\,n_1^{\,3}Mr^3}{2} = B - n_1^{\,3}\,Mr^3$$

also

$$r = \sqrt[3]{\frac{2B}{5\,n_1^{\,3}M}}$$

Zwischen den B und den zugehörigen Radien gilt daher die Proportion

$$r^3 : r_1^3 = B : B_1$$

$$3) \quad f'(r) = -r^3$$

Man ersetze n durch $2n_1^4$; dann gelten die Gleichungen

$$K = -2n_p^4 Mmr^3; \quad g = -2n_1^4 Mr^3; \quad 2n Mf(r) = -n_1^4 Mr^4$$

Die Tangentialgeschwindigkeit v wird durch die Gleichung $v^2 = rg$ bestimmt. Nach derselben ist

$$v^2 = 2n_1^4 Mr^4; \qquad v = n_1^2 r^2 \sqrt{2M}$$

und $\frac{v}{r^2}$ ist für das ganze Bewegungssystem eine Constante, daher gilt die Proportion

$$v : v_1 = r^2 : r_1^2$$

Die Tangentialgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

Ferner ist

$$A = rv = n_1^2 r^3 \sqrt{2M}$$

und somit ist auch die Flächengeschwindigkeit dividirt durch den Kubus der Entfernung eine Constante, die durch $n_1^2 \sqrt{2M}$ dargestellt werden kann. Es gilt daher die Proportion

$$A : A_1 = r^3 : r_1^3$$

Die Flächengeschwindigkeiten der Massenpunkte verhalten sich wie die Kuben der Entfernungen.

Um die Umlaufszeit T zu erhalten, setze man wieder

$$\frac{dw}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{A}{r^2}$$

und führe hier für $\frac{v}{r}$ oder $\frac{A}{r^2}$ den oben gefundenen Wert ein. Dann erhält man als Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{dw}{dt} = n_1^2 r \sqrt{2M}$$

Dieselbe ist von der Zeit unabhängig, also für dieselbe Bahn constant, variirt aber von Massenteilchen zu Massenteilchen und zwar nimmt dieselbe nach aussen in Verhältniss der Radien zu.

Wird die Winkelgeschwindigkeit mit α bezeichnet, so gilt daher die Proportion

$$\alpha : \alpha_1 = r : r_1$$

Ferner ist hier der Centriwinkel w gleich dem Ausdrucke

$$w = n_1^2 r \sqrt{2M} \, . \, t$$

somit für dasselbe Massenteilchen mit der Zeit proportional. Setzt man nun in diesem Ausdrucke für w den Wert 2π, so erhalten wir zur Bestimmung von T die Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{n_1^2 r \sqrt{2M}}$$

und es gilt hier die Proportion

$$T : T_1 = r_1 : r$$

Die Umlaufszeiten der Massenpunkte verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Da die Flächengeschwindigkeit $\frac{A}{2}$ für dieselbe Bahn eine Constante ist, so lässt sich die Umlaufszeit auch finden, indem man den doppelten Inhalt des Kreises durch A dividirt, also durch die Gleichung

$$T = \frac{2 r^2 \pi}{A}$$

Setzt man hier für A den gefundenen Wert ein, so erhält man für T den obigen Ausdruck wieder. Die Gleichung zur Bestimmung von r lautet hier:

$$2 n_1^4 M r^4 = B - n_1^4 M r^4$$

und somit ist

$$r = \sqrt[4]{\frac{B}{3 n_1^4 M}}$$

daher die Proportion

$$r^4 : r_1^4 = B : B_1$$

Wird z. B. für B der Wert $3M$ gesetzt, so ist $r = \frac{1}{n_1}$, und somit

$$K = -2 n_1 M m; \qquad g = -2 n_1 M, \qquad v = \sqrt{2M},$$

$$A = \frac{1}{n_1} \sqrt{2M}; \qquad T = \frac{2\pi}{n_1 \sqrt{2M}}$$

4) $f'(r) = -r\mu$, wo μ eine ganze Zahl sein soll.

Wird in diesem allgemeinen Falle der proportionale Factor n durch $\frac{\mu+1}{2} \, . \, n_1^{\mu+1}$ ersetzt, so findet man

$$K = -\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1} M m r^{\alpha}; \quad g = -\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1} M r^{\mu};$$

$$2n M f(r) = - n_1^{\mu+1} r^{\mu+1} M$$

und daher ist die Geschwindigkeit v gleich dem Ausdrucke

$$v = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} r^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu+1}{2} M}$$

Somit ist der Quotient $\frac{v^2}{r^{\mu+1}}$ für alle materiellen Punkte, welche unter der oben angegebenen Kraftwirkung stehen, eine Constante, und daher gilt hier die Proposition

$$v^2 : v_1^2 = r^{\mu+1} : r_1^{\mu+1}$$

Ist daher $(\mu+1)$ eine ungerade Zahl, also μ eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien. Ist aber $(\mu+1)$ eine gerade Zahl, somit μ eine ungerade, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Zur Bestimmung der Flächengeschwindigkeit A benutze man wieder die Gleichung $A = rv$ und setze für v den obigen Wert ein. Man erhält so

$$A = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot r^{\frac{\mu+3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu+1}{2} \cdot M}$$

und daher ist auch $\frac{A}{r^{\frac{\mu+3}{2}}}$ für das ganze Bewegungssystem eine Constante, so dass hier die Proportion

$$A^2 : A_1^2 = r^{\mu+3} : r_1^{\mu+3}$$

gilt. Ist daher $(\mu+1)$ eine ungerade Zahl, also μ eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien. Ist aber $(\mu+1)$ eine gerade Zahl, also μ eine ungerade, so verhalten sich die Flächengeschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Ferner ist die Winkelgeschwindigkeit α gleich dem Ausdrucke

$$\alpha = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\frac{\mu+1}{2} \cdot M}$$

und für dieselbe gilt die Proportion

$$\alpha^2 : \alpha_1^2 = r^{\mu-1} : r_1^{\mu-1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist nur für den Fall $\mu = 1$ für das ganze System eine Constante; im allgemeinen verhalten sich die Quadrate derselben wie die ganzzahligen Potenzen der Radien. Wird die Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit integrirt und soll mit $t = 0$ auch der Centriwinkel null werden, so erhält man

$$w = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\frac{\mu+1}{2} M} \cdot t$$

und hieraus ergibt sich als Wert für die Umlaufszeit T

$$T = \frac{2\pi}{n_1^{\frac{\mu+2}{2}} \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu+1}{2} M}}$$

Wird nun auf beiden Seiten mit $r^{\frac{\mu-1}{2}}$ multiplicirt, so erkennt man, dass das Product $T^2 . r^{\mu-1}$ für alle Kreisbahnen eine Constante ist, und dass daher die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = r_1^{\mu-1} : r^{\mu-1}$$

gilt.

Ist $(\mu - 1)$ eine ungerade Zahl, also μ eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie umgekehrt die ungeradzahligen Potenzen der Radien. Ist aber $(\mu - 1)$ eine gerade Zahl, und daher μ eine ungerade, so verhalten sich die Umlaufszeiten umgekehrt wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Zur Bestimmung der Radien r aus der anziehenden Masse M und der Constanten B dient die Gleichung

$$\frac{A^2}{r^2} = 2n\, M f(r) + B$$

Setzt man hier für A und $f(r)$ die bekannten Werte ein, so folgt

$$\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1} M r^{\mu+1} = B - n_1^{\mu+1} M r^{\mu+1}$$

also

$$r = \sqrt[\mu+1]{\frac{2B}{(\mu+3)\, n_1^{\mu+1} M}}$$

Auch hier darf die Constante B alle pos. Werte durchlaufen und der Zusammenhang zwischen ihr und den Radien der Bahnen wird durch die Proportion

$$r^{\mu+1} : r_1^{\mu+1} = B : B_1$$

ausgedrückt.

$$5)\quad f'(r) = -\frac{1}{r}$$

$$K = -\frac{nMm}{r};\qquad g = -\frac{nM}{r};\qquad 2nMf(r) = -2nM\log r$$

Weil in diesem Falle die Geschwindigkeit v durch

$$v = \sqrt{nM}$$

dargestellt werden kann und somit vom Radius der Bahn unabhängig ist, so bewegen sich alle Massenpunkte mit derselben Geschwindigkeit in ihren Bahnen.

Die Flächengeschwindigkeit ist hier

$$A = r\sqrt{nM}$$

und mit dem Radius der Bahn direct proportionirt, also

$$A : A_1 = r : r_1$$

Für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha$ erhalten wir den Wert

$$\alpha = \frac{\sqrt{nM}}{r}$$

Dieselbe ist daher mit dem Radius r umgekehrt proportionirt, nimmt somit im Bewegungssysteme nach aussen im gleichen Verhältniss ab, wie die Radien der Bahnen zunehmen.

$$\alpha : \alpha_1 = r_1 : r$$

Wird die Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit integrirt, so folgt

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r} \cdot t$$

und somit ist hier

$$T = \frac{2r\pi}{\sqrt{nM}}$$

Der Quotient $\frac{T}{r}$ ist daher für dieses System eine Constante und man hat die Proportion

$$T : T_1 = r : r_1$$

Die Umlaufszeiten verhalten sich wie die Radien der Bahnen.

Um aus B und der Masse den Radius zu finden, beachte man, dass

$$v^2 = -2nM\log r + B = \frac{A^2}{r^2} = nM$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt nun, dass

$$\log r = \frac{B - nM}{2nM} = \frac{B}{2nM} - \frac{1}{2}$$

also

$$r = e^{\left(\frac{B}{2nM} - \frac{1}{2}\right)} \text{ ist.}$$

$$6) \quad f'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

$$K = -\frac{nMm}{r^2}; \qquad g = -\frac{nM}{r^2}; \qquad 2nMf(r) = \frac{2nM}{r}$$

Bei dieser Kraftwirkung, die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt, ist

$$v^2 = gr = \frac{nM}{r}$$

und man erkennt sofort, dass hier das Product aus dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem Radius der Bahn eine constante Grösse darstellt und gleich nM ist. Zwischen der Geschwindigkeit und dem Radius r existirt daher die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r$$

Die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Radien der Bahnen.

Die Flächengeschwindigkeit A ist auch hier gleich rv, also

$$A = \sqrt{nMr}$$

und somit ist der Quotient $\frac{A^2}{r}$ für das ganze Bewegungssystem eine Constante; mithin gilt die Proportion

$$A^2 : A_1^2 = r : r_1$$

Die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten verhalten sich wie die Entfernungen.

Ferner ist

$$dw = \frac{v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{nM}}{r\sqrt{r}}\,dt$$

also

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r\sqrt{r}} \cdot t$$

und für gleiche Zeitabschnitte gilt die Proportion

$$w^2 : w_1^2 = r_1^3 : r^3$$

Die Quadrate der Centriwinkel verhalten sich umgekehrt wie die Kuben der Entfernungen.

Die Umlaufszeit T wird durch die Gleichung

$$T = \frac{2r\pi\sqrt{r}}{\sqrt{nM}}$$

bestimmt. Aus derselben erkennt man, dass für alle Massenpunkte des Systems der Quotient $\frac{T^2}{r^3}$ eine Constante ist und zwar gleich $\frac{4\pi^2}{nM}$. Daher die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = r^3 : r_1^3$$

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der Radien.

Wir haben oben die Geschwindigkeit v durch $\sqrt{gr}$ ausgedrückt. Nach der bekannten Formel ist aber auch

$$v^2 = \frac{2nM}{r} + B$$

und man könnte meinen, dass für eine reelle Bewegung sowol pos. wie neg. Werte von B zulässig wären. Da nun aber

$$\frac{2nM}{r} + B = \frac{nM}{r}$$

sein muss, so ist

$$r = -\frac{nM}{B}$$

Da aber für einen solchen Wert von r bei positivem B der Ausdruck $\left(\frac{2nM}{r} + B\right)$ neg. würde, was unzulässig ist, so können nur neg. Werte von B in Betracht kommen, und da das Product $r \cdot B$ für das ganze System eine Constante ist, so gilt die Proportion

$$r : r_1 = B_1 : B$$

$$7) \quad f'(r) = -\frac{1}{r^3}$$

$$K = -\frac{nMm}{r^3}; \quad g = -\frac{nM}{r^3}; \quad 2nMf(r) = \frac{nM}{r^2}$$

In diesem Falle ist

$$v^2 = \frac{nM}{r^2}, \text{ also } v = \frac{\sqrt{nM}}{r}$$

und das Product vr daher eine Constante, die durch $\sqrt{nM}$ dargestellt wird. Bei dieser Art der Bewegung gilt daher die Proportion

$$v : v_1 = r_1 : r$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Die Flächengeschwindigkeit A ist hier eine Constante und gleich $\sqrt{nM}$ und daher durchlaufen die Radien der verschiedenen Bahnen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. Ferner ist

$$dw = \frac{v}{r}\, dt = \frac{\sqrt{nM}}{r^2}\, dt$$

und die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Radien, das heisst, es gilt die Proportion

$$\alpha : \alpha_1 = r_1^2 : r^2$$

Für die Centriwinkel erhalten wir durch Integration obiger Gleichung den Ausdruck

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r^2} \cdot t$$

Dieselben sind somit der Zeit direct und dem Quadrat der Radien umgekehrt proportional. Setzt man in der letzten Gleichung für w den Wert 2π, so erhält man für die Umlaufszeit T den Wert

$$T = \frac{2r^2\pi}{\sqrt{nM}}$$

aus welchem sich die Proportion

$$T : T_1 = r^2 : r_1^2$$

ergibt.

Die Umlaufszeiten verhalten sich wie die Quadrate der Radien

$$8) \quad f'(r) = -\frac{1}{r^{\mu}}$$

Hier soll μ eine pos., ganze Zahl sein, welche ich mir grösser als 3 denke, da die Fälle $\mu = 1, 2, 3$ speciell behandelt worden sind. Man hat

$$K = -\frac{nMm}{r^{\mu}}; \quad g = -\frac{nM}{r^{\mu}}; \quad 2nMf(r) = \frac{2}{\mu-1} \cdot \frac{nM}{r^{\mu-1}}$$

Weil $v^2 = gr$ ist, so folgt

$$v = \frac{\sqrt{nM}}{r^{\frac{\mu-1}{2}}}$$

Es ist daher das Product $v \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}}$ eine Constante und zwar gleich der Quadratwurzel aus nM. Für dieses Bewegungssystem gilt daher die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r_1^{\mu-1} : r^{\mu-1}$$

Ist nun $(\mu-1)$ eine ungerade Zahl, also μ eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten wie umgekehrt die ungeradzahligen Potenzen der Radien. Ist aber $(\mu-1)$ eine gerade Zahl, somit μ eine ungerade, so verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Die Flächengeschwindigkeit A ist hier

$$A = \frac{\sqrt{nM}}{r^{\frac{\mu-3}{2}}}$$

und demnach ist $A^2 r^{\mu-3}$ für das ganze Bewegungssystem eine Constante und gleich nM. Wenn nun $(\mu-3)$ eine ungerade Zahl ist, somit μ eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten umgekehrt wie die ungeradzahligen Potenzen der Radien. Ist aber $(\mu-3)$ eine gerade Zahl, also μ eine ungerade, so verhalten sich die Flächengeschwindigkeiten umgekehrt wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Ferner ist

$$dw = \frac{v}{r}\, dt$$

und aus dieser Gleichung folgt sofort

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r^{\frac{\mu+1}{2}}} \cdot t$$

und daher ist

$$T = \frac{2\pi \cdot r^{\frac{\mu+1}{2}}}{\sqrt{nM}}$$

und folglich gilt die Proportion

$$T^2 : T_1{}^2 = r^{\mu+1} : r_1{}^{\mu+1}$$

Ist $(\mu+1)$ eine ungerade Zahl, also μ eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die ungeradzahligen Potenzen der Radien. Ist aber μ eine ungerade Zahl, so verhalten sich die Umlaufszeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Um schliesslich einen allgemeinen Ausdruck für r zu erhalten, setze man

$$v^2 = \frac{2}{\mu-1} \cdot \frac{nM}{r^{\mu-1}} + B = \frac{nM}{r^{\mu-1}}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nun, dass

$$B \,.\, r^{\mu-1} = \frac{\mu-3}{\mu-1} \,.\, nM$$

also

$$r = \sqrt[\mu-1]{\frac{\mu-3}{\mu-1} \cdot \frac{nM}{B}}$$

ist. Das Product $B' r^{\mu-1}$ ist für das ganze Bewegungssystem eine Constante, und man hat hier die Proportion

$$r^{\mu-1} : r_1{}^{\mu-1} = B_1 : B$$

Der für r gefundene Ausdruck gilt für $\mu = 1$ nicht mehr. Für $\mu = 2$ würde der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ; da aber $r^{\mu-1}$ pos. verstanden wird, so sind in diesem Falle nur neg. B anwendbar. Für $\mu = 3$ wird die rechte Seite null, und erst für $\mu > 3$ erhält man für r einen pos. Ausdruck, sobald auch B pos. ist. Damit überhaupt eine reelle Bewegung statt finde, muss bekanntlich der Ausdruck $(2nMf(r)+B)$ einen pos. Wert haben; es sind daher keine Werte von r zulässig, welche denselben neg. machen würden. Setzen wir daher in $\left(\frac{2}{\mu-1} \cdot \frac{nM}{r^{\mu-1}} + B\right)$ den oben für $r^{\mu-1}$ erhaltenen Wert ein, so geht derselbe in den andern $\frac{2}{\mu-3} \cdot B$ über, und man erkennt auch hieraus, dass für $\mu > 3$ nur pos. Werte von B zulässig sind.

In den bekannten Bewegungsgleichungen des allgemeinen Teiles meines Aufsatzes spielte die Constante A, welche die doppelte Flächengeschwindigkeit darstellt, eine Hauptrolle. Ihrer Natur nach ist dieselbe eine reelle, pos. Zahl und kann jeden beliebigen Wert auf der pos. Hälfte der Realitätslinie, null nicht ausgeschlossen, darstellen. Dass der Fall $A = 0$ längs des ganzen Weges die geradlinige Be-

wegung zur Falle hat, ist im ersten Abschnitte speciell gezeigt worden. Was dr anbetrifft, so kann dieses Differential sowol pos. wie neg. sein und die Bedingung, dass fortwährend $dr = 0$ sein soll, bringt die kreisförmige Bewegung hervor. Da nun in den nachfolgenden Untersuchungen die Bedingungen, dass sowol A wie dr längs des ganzen Weges verschwinden sollen, fallen gelassen werden, so habe ich diesen Fällen einen allgemeineren Charakter zugeschrieben und sie unter dem Titel „Allgemeine Fälle der Centralbewegung" zusammengefasst.

III. Allgemeine Fälle der Centralbewegung.

1) Die wirkende Kraft sei der Entfernung der Massen direct proportional.

a) $K = -nmMr; \qquad f'(r) = -r; \qquad f(r) = -\frac{1}{2} \cdot r^2$

$$g = -nMr$$

Setzt man abkürzend $\mu^2 = nM$ und versteht unter μ die pos. Wurzel aus nM, so lässt sich die Geschwindigkeit v des Massenpunktes m in einem beliebigen Punkte der Bahn durch die Gleichung

$$v^2 = -\mu^2 r^2 + B$$

darstellen, wo B die Integrationsconstante bezeichnet. Damit nun v für pos. Werte von r reell ausfalle, ist absolutes Erforderniss, dass B einen pos. Wert habe. Ist dieser einmal gewählt, so ist der Leitstrahl r an die Bedingung

$$\mu^2 r^2 < B$$

gebunden, und es muss somit $(B - \mu^2 r^2)$ längs des ganzen Weges einen pos. Wert haben. $B = 0$ anzunehmen ist unstatthaft. Nach der im allg. Teile meiner Arbeit aufgestellten Formel für den Differentialquotienten $\frac{dr}{dt}$ erhält man hier

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{-\mu^2 r^4 + Br^2 - A^2}$$

und die Realität der Bewegung erfordert, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen längs des ganzen Weges pos. bleibt. Allerdings sind auch solche Werte von r zulässig, welche denselben zu null machen, und in diesen Punkten erreicht r ein Maximum oder ein Minimum. Im allgemeinen aber muss r die Bedingung

$$-\mu^2 r^4 + Br^2 - A^2 > 0$$

erfüllen. Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$r^4 - \frac{B}{\mu^2} r^2 + \frac{A^2}{\mu^2} = 0$$

mit a^2 und b^2 bezeichnet werden, so muss die Bedingung

$$\mu^2 (a^2 - r^2)(r^2 - b^2) > 0$$

erfüllt sein, d. h. es muss

$$b^2 < r^2 < a^2$$

statt finden. Die beiden Wurzeln a^2 und b^2 müssen für eine reelle Bewegung reell sein. Denn wären sie imaginär, so müssten sie conjugirt sein; dann aber wäre $(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)$ beständig pos. und es liessen sich keine reellen, positiven Werte von r finden, welche $\mu^2(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)$ pos. machen würden. Die Realität der Bewegung erfordert daher auch die Realität der beiden Wurzeln a^2 und b^2. Nun ist

$$a^2 = \frac{B}{2\mu^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}}\right)$$

$$b^2 = \frac{B}{2\mu^2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}}\right)$$

und da $\sqrt{1 - \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}}$ reell ist, so muss $B^2 > 4\mu^2 A^2$ sein, also $\frac{B}{A} > 2\mu$. Für den Fall $B^2 = 4\mu^2 A^2$ würden die beiden Wurzeln a^2 und b^2 zusammenfallen und der Ausdruck für $\frac{\partial r}{\partial t}$ wäre in diesem Falle

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{-(\mu^2 r^4 - 2\mu A r^2 + A^2)} = +\frac{1}{r} \sqrt{-(\mu r^2 - A)^2}$$

was aber eine reelle Bewegung ausschliesst. Die Annahme $B = 2\mu A$ ist daher unstatthaft. Für die beiden Wurzeln a^2 und b^2 gelten die Gleichungen

$$\mu^2 a^2 b^2 = A^2; \qquad \mu^2(a^2 + b^2) = B$$

und da A und B pos. sind, so müssen es auch a^2 und b^2 sein. Es steht nun frei, $a^2 > b^2$ anzunehmen. Da nun r^2 alle zwischen a^2 und b^2 liegenden Werte annehmen kann, so lässt sich der Leitstrahl r auf folgende Weise als Function der neuen Variabeln φ darstellen:

$$r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = a^2(1 - k^2 \sin^2\varphi); \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Da nun r^2 bei a^2 beginnt und von hier an bis b^2 beständig abnimmt, so beginnt die neue Variable bei 0 und wächst von hier an bis 2π. Weil

$$a^2 - r^2 = a^2k^2\sin^2\varphi; \qquad r^2 - b^2 = a^2k^2\cos^2\varphi$$

so ist auch

$$r\,.\,\frac{\partial r}{\partial t} = \mu a^2k^2\sin\varphi\cos\varphi$$

und man erkennt, dass $\frac{\partial r}{\partial t}$ nur da verschwindet, wo $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ verschwinden, also in $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ und in diesen Punkten erreicht somit r seine grössten und kleinsten Werte und zwar existirt sowol für $\varphi = 0$ als auch für $\varphi = \pi$ ein Maximum, während in $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ Minimum vorhanden sind. Wird nun im ferneren die Gleichung

$$r^2 = a^2(1 - k^2\sin^2\varphi)$$

nach t abgeleitet, so findet man

$$r\frac{\partial r}{\partial t} = -\,a^2k^2\sin\varphi\cos\varphi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

und die Vergleichung mit dem oben gefundenen Ausdrucke ergibt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\,\mu$$

Die Ableitung der Variabeln φ nach t ist eine Constante und daher φ selber eine lineare Function der Zeit. Die Integration ergibt

$$\varphi = -\,\mu t + \nu$$

ersetzt man hier t durch $-t$ und nimmt die Integrationsconstante gleich null an, so hat man

$$\varphi = \mu t$$

Es ist daher erlaubt, den Winkel φ direct mit der Zeit proportional anzunehmen.

Wir denken uns ferner den Kraftmittelpunkt als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. x-axe durch das Aphelium der Bahn geht; ist ferner w die wahre Anomalie des Massenpunktes m mit den Coordinaten (x, y), so hat man

$$x = r\cos w; \qquad y = r\sin w$$

Da nun einerseits die doppelte Flächengeschwindigkeit des

Massenpunktes gleich A ist, dieselbe aber auch durch $r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$ dargestellt werden kann, so hat man die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Massenpunktes ist dem Quadrate des Radius umgekehrt proportional. Da nun

$$A = \mu ab \quad \text{und} \quad \mu dt = d\varphi$$

ist, so hat man auch

$$dw = ab \frac{d\varphi}{r^2} = \frac{d.\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\right)}{1 + \left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\right)^2} .$$

und man darf

$$w = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} w = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$$

annehmen. Bezeichnet nun d einen proportionalen Factor, so gelten daher folgende Gleichungen:

$$d.\sin w = b\sin\varphi; \qquad d.\cos w = a\cos\varphi$$

Werden nun diese beiden Gleichungen quadrirt und addirt, so findet man $d = r$. Für die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Massenpunktes erhält man daher die Werte

$$x = r\cos w = a\cos\varphi$$
$$y = r\sin w = b\sin\varphi$$

und die Elimination von φ aus dieser Gleichung führt auf die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligén Coordinaten in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Bahn des materiellen Punktes ist daher eine Ellipse, in deren Mittelpunkte die anziehende Kraft liegt. Der Winkel φ heisst die excentrische Anomalie und da dieselbe mit der Zeit proportional ist, so durchläuft der entsprechende Kreispunkt seine Bahn mit constanter Geschwindigkeit.

Wenn die Umlaufszeit mit T bezeichnet wird, so erhalten wir für dieselbe aus der Gleichung $\varphi = \mu t$ den Wert

$$T = \frac{2\pi}{\mu}$$

Dieselbe ist daher von den Halbaxen der Ellipse, also auch von den Constanten A und B unabhängig. Bewegen sich daher verschiedene materielle Punkte unter dem Einflusse derselben Centralkraft in Ellipsen um den Kraftmittelpunkt, so ist die Umlaufszeit für alle eine constante Grösse, die durch $\frac{2\pi}{\sqrt{nM}}$ dargestellt werden kann.

Für die doppelte Flächengeschwindigkeit A hatten wir oben den Ausdruck

$$A = \mu ab$$

erhalten. Da nun πab den Inhalt J der Ellipse darstellt, so ist für das ganze Bewegungssystem der Quotient $\frac{A}{J}$ eine constante Grösse und gleich $\frac{\mu}{\pi}$ und es besteht daher die Proportion

$$A : A_1 = J : J_1$$

Die Flächengeschwindigkeiten der verschiedenen materiellen Punkte verhalten sich daher wie die Inhalte der entsprechenden Ellipsen.

Wenn der Inhalt des Sectors, der vom radius vector in der Zeit dt durchlaufen wird, mit dS bezeichnet wird, so ist

$$dS = \frac{A}{2}\,dt = \frac{\mu}{2}\,ab\,dt$$

also

$$S = \frac{\mu}{2}\,ab\,t$$

Diesen Ausdruck erhält man auch auf folgende Weise: die Länge des Weges, welchen der entsprechende Kreispunkt in der Zeit t durchläuft, kann durch

$$a\varphi = a\mu t$$

ausgedrückt werden; somit ist der Inhalt des Kreissectors gleich $\frac{a^2\mu t}{2}$. Wird dieser Ausdruck noch mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt, so erhält man den Inhalt des entsprechenden Ellipsensectors in der Form $\frac{\mu ab}{2} \times t$.

Dasselbe Resultat erhält man auch wie folgt:

$$A = x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = \begin{vmatrix} x & . & y \\ \frac{\partial x}{\partial t_{,}} & . & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & . & b\sin\varphi \\ -\mu a\sin\varphi & . & \mu b\cos\varphi \end{vmatrix} = \mu ab$$

Wird nun dieser Wert für A mit dt multiplicirt und von 0 bis t integrirt, so erhält man wieder den bekannten Ausdruck für den doppelten Inhalt des Ellipsensectors. Für die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes m in seiner Bahn hatten wir den Ausdruck

$$v^2 = -\mu^2 r^2 + B$$

erhalten. Um dieselbe als Function der Variabeln φ darzustellen, ersetze man r^2 und B durch die bekannten Ausdrücke $a^2(1-k^2\sin^2\varphi)$ und $\mu^2(a^2+b^2)$. Dann ist

$$v = \mu a \,.\, \sqrt{(1-k^2\cos^2\varphi)}$$

Dieser Ausdruck kann direct aus den rechtwinkligen Coordinaten (x, y) des Massenpunktes abgeleitet werden. Bekanntlich ist

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

und da

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a\sin\varphi \,.\, \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu a \sin\varphi = -\mu\frac{a}{b}\cdot y$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = b\cos\varphi \,.\, \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu b\cos\varphi = \mu\frac{b}{a}\cdot x$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \mu^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = \mu^2 a^2 . (1-k^2\cos^2\varphi)$$

also wieder

$$v = \mu a \,.\, \sqrt{(1-k^2\cos^2\varphi}$$

Die Beschleunigung g des Massenteilchens ist im allgemeinen gleich dem Quotienten aus Kraft und Masse und in unserem Falle gleich $-\mu^2 r$, wenn die Richtung mit in Berücksichtigung gezogen wird. Denselben Wert von g erhält man aber auch mittelst der allgem. Formel

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2}$$

Denn es ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\mu^2 a\cos\varphi = -\mu^2 r \,.\, \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\mu^2 b\sin\varphi = -\mu^2 r \,.\, \frac{y}{r}$$

also wieder

$$g = -\mu^2 r$$

Zugleich erkennt man aus dem Werte für die 2. Abgeleiteten, dass die Beschleunigung nach dem Centrum gerichtet ist. Zum

Schlusse dieses Abschnittes will ich noch den Winkel α bestimmen, den die Bewegungsrichtung mit der x-axe bildet. Wenn v_x und v_y die Geschwindigkeiten nach den Axen sind, so hat man

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x = v \cos\alpha$$

also

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{v} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-k^2\cos^2\varphi)}}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_y = v \sin\alpha$$

also

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{v} = \frac{b\cos\varphi}{a.\sqrt{(1-k^2\cos^2\varphi)}}$$

$$\text{b)}\quad K = nmMr; \qquad f'(r) = r; \qquad f(r) = \frac{r^2}{2}$$

$$g = nMr$$

Da die Kraft pos. angenommen ist, so wirkt sie abstossend auf den materiellen Punkt m ein. Setzt man auch hier abkürzend

$$nM = \mu^2$$

so ist die Geschwindigkeit v durch die Formel

$$v^2 = \mu^2 r^2 + B$$

dargestellt. Während im vorhergehenden Abschnitte der Constanten B nur die pos. Hälfte der Realitätslinie eingeräumt werden könnte, so kann sich hier dieselbe auf der ganzen Realitätslinie frei bewegen, ohne einem Punkte derselben ausweichen zu müssen. Ist einmal ein bestimmter Wert von B gewählt, so ist r längs des ganzen Weges an die Bedingung

$$\mu^2 r^2 + B > 0$$

gebunden. Ich behandle zuerst den Fall, wo B eine neg. Zahl ist, und ersetze daher B durch $-B'$, wo fortan B' pos. zu verstehen ist. Lässt man in der Folge bei B' den Accent wieder fallen, so ist

$$v^2 = \mu^2 r^2 - B$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\mu}{r} \cdot \sqrt{\left(r^4 - \frac{B}{\mu^2}r^2 - \frac{A^2}{\mu^2}\right)}$$

es sind nur solche Werte von r zulässig, welche den Ausdruck

$$(\mu^2 r^4 - B r^2 - A^2)$$

pos. oder null machen. Werden die Wurzeln der Gleichung

$$r^4 - \frac{B}{\mu^2} r^2 - \frac{A^2}{\mu^2} = 0$$

mit a^2 und b^2 bezeichnet, so hat man

$$a^2 = \frac{B}{2\mu^2} \cdot \left(\sqrt{\left(1 + \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}\right)} + 1\right)$$

$$b^2 = -\frac{B}{2\mu^2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}} - 1\right)$$

und

$$B = \mu^2(a^2 + b^2); \qquad A^2 = -\mu^2 a^2 b^2$$

Man erkennt aus diesen Formeln, dass die beiden Wurzeln a^2 und b^2 reelle Werte haben, und dass die eine positiv ist, während die andere neg. sein muss. Ist a^2 die pos. Wurzel, so ist auch $a^2 >$ mod. b^2. Ersetzt man b^2 durch $-b_1^2$, so hat man

$$b_1^2 = \frac{B}{2\mu^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4\mu^2 A^4}{B^2}} - 1\right); \quad B = \mu^2(a^2 - b_1^2); \quad A^2 = \mu^2 a^2 b_1^2$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\mu}{r} \cdot \sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 + b_1^2)}$$

Der Radius r ist nur an die Bedingung

$$r^2 > a^2$$

gebunden, kann somit von a an alle pos. Werte durchlaufen. Setzt man nun

$$r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b_1^2 \sin^2\varphi = a^2(1 + k^2 \sin^2\varphi), \qquad k^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

so ist

$$r^2 - a^2 = a^2 k^2 \sin^2\varphi; \qquad r^2 + b_1^2 = a^2 k^2 \cos^2\varphi$$

und daher auch

$$r\frac{\partial r}{\partial t} = \mu a^2 k^2 \cos\varphi \sin\varphi$$

Wird nun auch die Gleichung für r^2 nach t abgeleitet, so erhält man

$$r\frac{\partial r}{\partial t} = a^2 k^2 \sin\varphi . \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

und die Vergleichung mit dem vorhergehenden Werte ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu$$

also

$$\varphi = \mu t$$

Die Variabele φ ist somit mit der Zeit direct proportional. Wählt man nun wieder den Kraftmittelpunkt als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen pos. Richtung der x-axe durch das Perihel der Wegcurven, also durch den Punkt $r = a$ geht, ist ferner w die Anomalie des Massenteilchens mit den Coordinaten (x, y), so hat man

$$x = r \cos w; \qquad y = r \sin w$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2} = \frac{\mu a b_1}{r^2}$$

Die Ableitung von w nach t verschwindet nur in $r = \infty$, und hier hat somit w sein Maximum erreicht. Die Curve hat somit eine Asymptote, die durch den Ursprung geht und der Leitstrahl r fällt für unendlich entfernte Punkte mit derselben zusammen. Ganz analog wie früher erhält man auch hier

$$dw = \frac{d\left(\frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi\right)}{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tang}\right)^2}$$

also

$$w = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi\right)$$

somit

$$tg w = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi$$

Für $\varphi = \infty$ ist auch $r = \infty$ und hier erreicht w sein Maximum. Weil tangφ für $\infty = \varphi$ den Wert 1 hat, so wird dieses Maximum durch die Gleichung

$$tg\, w = \frac{b}{a}$$

bestimmt, und dieser Ausdruck ist somit die Gleichung der Asymptote.

Für die rechtwinkligen Coordinaten des Massenpunktes erhält man die Werte

$$x = r\cos w = a\cos\varphi$$

$$y = r\sin w = b\sin\varphi$$

und die Elimination von φ führt auf die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Wegcurve ist somit eine Hyperbel, in deren Mittelpunkte die wirkende Kraft liegt, und deren Halbaxenquadrate die Wurzeln a^2 und b^2 sind.

Die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes wurde oben als Function des Leitstrahles r dargestellt. Hier soll dieselbe noch als Function von φ ausgedrückt werden. Ersetzt man in dem bekannten Ausdrucke für v^2 die Constante B durch $\mu^2(a^2-b^2)$ und r^2 durch $a^2(1+k^2\sin^2\varphi)$, so erhält man nach einigen Umformungen für v den Wert

$$v = \mu a \sqrt{(k^2\cos^2\varphi - 1)}$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes will ich noch mit einigen Worten der beiden Fälle erwähnen, wo die Constante B eine pos. Zahl oder gleich 0 ist. Ist z. B. die Constante B gleich null, so fallen die beiden Wurzeln a^2 und b^2 zusammen und die Wegcurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Halbaxenquadrat durch die Gleichung

$$a^2 = \frac{A}{\mu}$$

bestimmt wird. Die Geschwindigkeit kann durch μr dargestellt werden und ist dem radius vector direct proportional. Die Flächengeschwindigkeit ist gleich μa^2 und da k^2 den Wert 2 hat, so ist

$$r = a \,.\, \sqrt{(1+2\sin^2\varphi)}$$

Ist die Constante B eine pos. Zahl, so muss infolge der Gleichung

$$\mu^2(a^2+b^2) = -B$$

der absolute Wert der neg. Wurzel b^2 grösser sein als die pos. Wurzel a^2. Die Wegcurve ist wieder eine Hyperbel von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo aber $b^2 > a^2$.

2) Die wirkende Kraft sei dem Quadrate der Entfernung der Massen umgekehrt proportional.

(Gesetz v. Newton.)

$$\text{a)}\quad K = -\frac{nmM}{r^2};\qquad f'(r) = -\frac{1}{r^2};\qquad f(r) = \frac{1}{r}$$

$$g = -\frac{nM}{r^2}$$

Wenn abkürzend $\mu = nM$ gesetzt wird, so lässt sich nach der allgemeinen Formel das Quadrat der Geschwindigkeit des Massenpunktes m durch die Gleichung

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + B$$

ausdrücken. Die Realität der Bewegung erfordert die Unterscheidung folgender drei Fälle, wobei aber für B das Unendliche auszuschliessen ist

$$\begin{aligned} &1)\quad B > 0 \\ &2)\quad B = 0 \\ &3)\quad B < 0 \end{aligned}$$

Ersetzt man nun B durch $-\frac{\mu}{a}$, wo a die neue Integrationsconstante bezeichnet, so ist

$$v^2 = 2\mu \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$$

Mit Ausnahme von 0 ist die ganze Realitätslinie für a zugänglich Wir unterscheiden daher folgende drei Hauptfälle

$$\begin{aligned} &1)\quad a > 0 \\ &2)\quad a < 0 \\ &3)\quad a = \infty \end{aligned}$$

Zuerst kommt nun der Fall zur Behandlung, wo a gleich einer pos., endlichen Zahl ist

$$1)\quad a > 0.$$

Nach der Gleichung für v^2 ist klar, dass v nur dann reell ausfallen kann, wenn beständig $2a$ grösser als r ist, wenn also längs des Weges die Bedingung

$$r < 2a$$

erfüllt bleibt. Um die Grenzen von r noch näher bestimmen zu können, beachte man, dass

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\sqrt{-\frac{\mu}{a}r^2 + 2\mu r - A^2}$$

nur dann reell ausfallen kann, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen pos. Wert hat. Es sind somit nur solche Werte von r zulässig, welche $\left(r^2 - 2ar + \frac{aA^2}{\mu}\right)$ neg. machen. Wenn wir nun die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 - 2ar + \frac{aA^2}{\mu} = 0$$

mit α und β bezeichnen, so sind dieselben für eine reelle Bewegung entschieden reell aufzufassen. Denn wären sie imaginär, so müssten sie conjugirt sein; dann aber wäre das Product $(r-\alpha)(r-\beta)$ für reelle r beständig pos. und es liessen sich somit keine reellen Werte von r finden, welche $\left(r^2 - 2ar + \frac{aA^2}{\mu}\right)$ neg. machen würden. Aus den Relationen

$$\alpha\,.\,\beta = \frac{aA^2}{\mu}; \qquad \alpha + \beta = 2a$$

erkennt man aber auch, dass beide Wurzeln α und β pos. sein müssen. Es steht nun frei, $\alpha > \beta$ anzunehmen. Dann ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\,.\,\sqrt{\frac{\mu}{a}(\alpha - r)(r - \beta)}$$

und r muss nun längs des ganzen Weges die Bedingung

$$\beta < r < \alpha$$

erfüllen. Schon aus der Gleichung

$$\alpha + \beta = 2a$$

erkennt man, dass für $\alpha > a$ die andere Wurzel $\beta < a$ sein muss. Nur wenn $\alpha = a$ ist, muss auch $\beta = a$ sein. In diesem Falle wäre aber

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\,.\,\sqrt{-\frac{\mu}{a}(r-a)^2}$$

für reelle r beständig imaginär, somit die Bewegung selbst imaginär. Dieser Fall ist daher auszuschliessen. Im allgemeinen ist

$$\alpha = a\,.\left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{a\mu}\right)}\right)$$

$$\beta = a\,.\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{a\mu}\right)}\right)$$

und es muss daher $\frac{A^2}{a\mu} < 1$ sein. Auch der Fall $A^2 = a\mu$ ist auszuschliessen. Setzt man abkürzend

$$k^2 = 1 - \frac{A^2}{a\mu}$$

also

$$A^2 = a\mu\,(1 - k^2)$$

so lassen sich die Wurzeln α und β auf folgende Weise darstellen:

$$\alpha = a(1 + k)$$
$$\beta = a(1 - k)$$

Auch ist nach den festgesetzten Bedingungen k reell und pos. und kleiner als 1. Der Leitstrahl r muss daher zwischen den Werten $a(1-k)$ und $a(1+k)$ liegen; es ist daher angezeigt

$$r = a(1 - k\cos\varphi)$$

zu setzen. Ich will aber diese Substitution noch deutlicher herleiten. Ersetzt man in dem Ausdrucke für $\frac{\partial r}{\partial t}$ die Constante A^2 durch $\mu a(1-k^2)$, so erhält man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\cdot\left(\frac{a^2k^2}{r^2} - \left(\frac{a}{r} - 1\right)^2\right)}$$

und es muss daher $\left(\frac{a^2k^2}{r^2} - \left(\frac{a}{r} - 1\right)^2\right)$ beständig pos. sein. Hier kann man nun $\frac{ak}{r}$ als Hypotenuse und $\left(\frac{a}{r} - 1\right)$ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks auffassen, die den Winkel φ einschliessen. Dann ist

$$\frac{a}{r} - 1 = \frac{ak}{r}\,.\cos\varphi, \quad \text{also} \quad r = a(1 - k\cos\varphi)$$

und $\sqrt{\frac{a^2k^2}{r} - \left(\frac{a}{r} - 1\right)^2}$ ist die Länge der anderen Kathete, kann daher durch $\frac{ak}{r}\sin\varphi$ ersetzt werden. Daher ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\mu a}\,.\,\frac{k\sin\varphi}{r}$$

Der grösste Wert, den r annehmen kann, wird für $\varphi = \pi$ in der Form

$$r_1 = a(1 + k) = \alpha$$

erhalten, während der kleinste Wert durch

$$r_{11} = a(1-k) = \beta$$

dargestellt werden kann. Es ist daher

$$\frac{r_1 + r_{11}}{2} = a$$

und somit ist die Constante a gleich dem arithmetischen Mittel aus der grössten und kleinsten Entfernung des Massenpunktes m von der wirkenden Kraft und ist als mittlere Entfernung bekannt. In $r = \alpha$ befindet sich der Punkt m im Aphelium und in $r = \beta$ im Perihelium seiner Bahn. Wir beabsichtigen nun, die Differentialgleichung für $\frac{\partial r}{\partial t}$ zu integriren. Nun ist wol r eine bekannte Function von φ; aber φ ist eine noch unbekannte Function von t. Man leite daher die Gleichung

$$r = a(1 - k\cos\varphi)$$

nach t ab; dann ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ak\sin\varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

und somit muss

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

sein. Man erkennt aus dieser Darstellung von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, dass dieser Differentialquotient mit dem Radius der Bahn umgekehrt proportional ist und längs des ganzen Weges nirgends verschwinden kann. Löst man die Gleichung nach dt auf, so ist

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (1 - k\cos\varphi)\,d\varphi$$

und die Integration dieser Gleichung ergibt die Zeit in Function der Variabele φ. Man erhält

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (\varphi - k\sin\varphi)$$

Aus der Gleichung

$$r = a(1 - k\cos\varphi)$$

ist einleuchtend, dass der materielle Punkt m seine Bahn einmal durchlaufen hat, wenn der Winkel φ von 0 an den Wert 2π erreicht hat. Wird daher die Umlaufszeit mit T bezeichnet, so erhält man dafür aus der Darstellung für die Zeit t im allgemeinen durch Substitution von $\varphi = 2\pi$ den Wert

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot 2\pi$$

Dieselbe ist daher von der Masse des materiellen Punktes m unabhängig und der Quotient $\frac{T^2}{a^3}$ für ein System beweglicher Massenpunkte, die sich unter dem Einflusse derselben Kraft bewegen, eine Constante. Daher gilt hier die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen.

Für die doppelte Flächengeschwindigkeit A hatten wir oben gefunden

$$A = \sqrt{\mu a(1-k^2)}$$

Wie nun der doppelte Inhalt des Flächenstückes, welcher vom radius vector in der kleinen Zeit dt durchlaufen wird, mit dS bezeichnet, so ist

$$dS = \sqrt{\mu a(1-k^2)} \,.\, dt$$

und daher

$$S = \sqrt{\mu a(1-k^2)} \,.\, t$$

Die Inhalte der Sectoren, welche vom radius vector durchlaufen werden, sind somit mit der Zeit direct proportional. Ersetzt man noch t durch die bekannte Function φ, so hat man auch

$$S = a^2 \sqrt{1-k^2} \,.\, (\varphi - k \sin\varphi)$$

und setzt man hier $\varphi = 2\pi$, so ist

$$J = a^2 \sqrt{1-k^2} \,.\, \pi$$

der Inhalt der von der Wegcurve eingeschlossenen Fläche.

Der Kraftmittelpunkt werde als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. Richtung der x-Axe durch das Perihel der Wegcurve geht.

Bezeichnet w die wahre Anomalie und sind x und y die Coordinaten des Massenpunktes m, so hat man

$$x = r\cos w; \quad y = r\sin w$$

und es ist ganz allgemein

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2}$$

Der Differentialquotient der wahren Anomalie nach der Zeit t ist mit dem Quadrat des Radius umgekehrt proportional. Ersetzt man nun r und dt durch die bekannten Functionen in φ, und setzt abkürzend

$$u = \frac{1+k}{1-k} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

so ist

$$dw = 2 \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

also

$$w = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$$

und daher auch

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

Bezeichnet daher d einen constanten Factor, so hat man

$$d \cdot \sin \frac{w}{2} = \sqrt{1+k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$d \cdot \cos \frac{w}{2} = \sqrt{1-k} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

werden nun diese Gleichungen quadrirt, so findet man den Wert des proportionalen Factors d in der Form

$$d^2 = 1 - k \cos \varphi$$

Es ist daher

$$\sin \frac{w}{2} = \sqrt{1+k} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k \cos \varphi}}$$

$$\cos \frac{w}{2} = \sqrt{1-k} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k \cos \varphi}}$$

Durch Anwendung der Relationen

$$\sin w = 2 \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2} \quad \text{und} \quad \cos w = \cos^2 \frac{w}{2} - \sin^2 \frac{w}{2}$$

erhält man hieraus für $\sin w$ und $\cos w$ drei Werte

$$\sin w = \sqrt{1-k^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 - k \cos \varphi}; \qquad \cos w = \frac{\cos \varphi - k}{1 - k \cos \varphi}$$

Die rechtwinkligen Coordinaten (x, y) des Massenpunktes m lassen sich daher auf folgende Weise in Functionen von φ darstellen:

$$x = r\cos w = a(\cos\varphi - k)$$
$$y = r\sin w = a\,.\sqrt{1-k^2}\,.\sin\varphi$$

Die Elimination der Variabeln φ aus diessen Gleichungen führt nun schliesslich auf die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten. Man hat

$$\frac{(x+ak)^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\sqrt{1-k^2})^2} = 1$$

Der materielle Punkt bewegt sich somit in einer Ellipse, in deren Brennpunkte die anziehende Kraft liegt. Die Halbaxenquadrate werden durch a^2 und $a^2(1-k^2)$ ausgedrückt und die numerische Excentricität wird durch die Gleichung

$$k^2 = 1 - \frac{A^2}{\mu a}$$

bestimmt. Der Winkel φ bildet die excentrische Anomalie.

Ich will noch die Geschwindigkeit v durch die excentrische Anomalie φ ausdrücken. Bekanntlich ist

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$$

ersetzt man hier r durch $a(1 - k\cos\varphi)$, so erhält man nach einigen Umformungen

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}\,.\,\frac{1+k\cos\varphi}{1-k\cos\varphi}}$$

Im Perihel ist

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}\,.\,\frac{1+k}{1-k}}$$

und im Aphelium

$$v_{11} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\,.\,\frac{1-k}{1+k}}$$

und daher

$$\frac{v_1}{v_1} = \frac{1+k}{1-k}$$

Den oben angegebenen Ausdruck für die Geschwindigkeit v in Function von φ erhält man auch auf folgende Weise:

Es ist

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

weil

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$$

Aus den Werten für die rechtwinkligen Coordinaten (x, y) ergibt sich aber

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\, a \,.\, \sin \varphi\,; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = a \sqrt{1 - k^2} \,.\, \cos \varphi$$

somit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2 (1 - k^2 \cos^2 \varphi)$$

ersetzt man noch $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$ durch $\left(\frac{\mu}{a^3} \cdot \frac{(1 - k \cos \varphi)^2}{1}\right)$, so erhält man wieder

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + k \cos \varphi}{1 - k \cos \varphi}}$$

Für die Flächengeschwindigkeit A hatten wir den Wert $\sqrt{\mu a.(1 - k^2)}$ erhalten. Nun ist aber auch

$$A = x \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial x}{\partial t} = \begin{vmatrix} x \,.\, & y \\ \frac{\partial y}{\partial t} \,.\, & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \varphi & - k \,.\, \sin \varphi \\ - \sin \varphi \,.\, & \cos \varphi \end{vmatrix} a^2 \,.\, \sqrt{1 - k^2} \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

somit

$$A = a^2 \sqrt{1 - k^2} \,.\, (1 - k \cos \varphi) \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \,.\, \sqrt{1 - k^2}$$

und der bekannte Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit kehrt wieder.

Wir haben uns im Vorhergehenden die Aufgabe gestellt, die Bahn eines Massenpunktes aufzufinden, der sich unter dem Einflusse einer Kraft frei bewegen kann, welche im directen Verhältniss der Massen und im umgekehrten Verhältniss der Entfernung auf ihn einwirkt, und haben als speciellen Fall eine Ellipse gefunden, mit der anziehenden Kraft im Mittelpunkte. Ich will nun die Aufgabe umkehren und sagen: Die Bahn eines Massenpunktes, welcher sich unter dem Einflusse einer centralen Kraft frei bewegen kann, ist eine Ellipse mit den Halbaxen a und b; die Bewegung findet ferner

in der Weise statt, dass der radius vector in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchläuft. Die Lage des Kraftmittelpunktes und die Art und Weise ihrer Einwirkung auf den materiellen Punkt soll gesucht werden. Der Vollständigkeit wegen will ich die Lösung dieser Aufgabe hier folgen lassen.

Der Brennpunkt F der Ellipse mit den Halbaxen a und b werden als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen Axen mit denen der Ellipse zusammenfallen sollen. Bezeichnet nun wie früher w die wahre und φ die excentrische Anomalie des beweglichen Massenpunktes (x, y), so ist

$$k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

die numerische Excentricität, und man hat

$$x = a(\cos\varphi - k); \quad y = b\sin\varphi$$

Ebenso kann der Inhalt eines Sectors, der vom radius vector in der Zeit t durchlaufen wird, durch $\frac{ab}{2}(\varphi - k\sin\varphi)$ dargestellt werden. Nach Voraussetzung ist derselbe nun mit der Zeit proportional. Bezeichnet daher n einen proportionalen Factor, so hat man

$$nt = \frac{ab}{2}(\varphi - k\sin\varphi)$$

Für $\varphi = 2\pi$ hat der Massenpunkt m die Ellipse einmal durchlaufen. Wird die Umlaufszeit mit T bezeichnet, so hat man

$$aT = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi$$

also

$$n = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Setzt man nun abkürzend

$$\mu = \frac{2\pi}{T}$$

so ist

$$\mu t = (\varphi - k\sin\varphi)$$

und die Ableitung (dieser Gleichung nach φ) von t nach φ ergibt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{1 - k\cos\varphi}$$

Da nun

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - k\cos\varphi)$$

ist, so hat man auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu a}{r}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des entsprechenden Kreispunktes ist somit mit dem radius vector umgekehrt proportional.

Bezeichnet auch wieder A die doppelte Flächengeschwindigkeit, so kann dieselbe aus den rechtwinkligen Coordinaten nach der Formel

$$A = x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}$$

berechnet werden. Da dasselbe in der vorher gehenden Aufgabe geschehen ist, so will ich hier einen andern Weg einschlagen und setze

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

wo nun $\frac{\partial w}{\partial t}$ zu berechnen ist. Aus

$$x = r\cos w = a(\cos\varphi - k)$$

folgt einerseits

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \cos w \cdot \frac{\partial r}{\partial t} - r\sin w \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a(\cos\varphi - k)}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} - b\sin\varphi\frac{\partial w}{\partial t}$$

und andererseits ist auch

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a\sin\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Ersetzt man nun hier $\frac{\partial r}{dt}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ resp. durch $\frac{a^2\mu k\sin\varphi}{r}$ und $\frac{a\mu}{r}$, so erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2\mu}{r^2} \cdot \sqrt{1-k^2}$$

Wird nun diese Gleichung mit r^2 multiplicirt, so folgt

$$A = a^2\mu \cdot \sqrt{(1-k^2)}$$

Die Geschwindigkeit wird nach der Formel

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

berechnet. Nun ist

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a\sin\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a^2\mu\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b\cos\varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{ab\,\mu\cos\varphi}{r}$$

und daher

$$v = \mu a\sqrt{\frac{1+k\cos\varphi}{1-k\sin\varphi}}$$

Bezeichnet wieder g die Beschleunigung, und sind g_x und g_y deren Componenten, so hat man

$$g_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{a^3\mu^2}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{a^3\mu^2}{r^2}\cdot\cos w$$

$$g_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{a^3\mu^2}{r^2}\cdot\frac{y}{r} = -\frac{a^3\mu^2}{r^2}\cdot\sin w$$

weil nun

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

so erhält man für die Beschleunigung den Wert

$$g = -\frac{a^3\mu^2}{r^2}$$

Aus den für g_x und g_y erhaltenen Ausdrücken erkennt man, dass die Beschleunigung des Massenpunktes m längs des ganzen Weges nach dem Brennpunkte gerichtet ist. Da nun aber die Beschleunigung auch die Richtung der Kraft angibt, so ist klar, dass der Brennpunkt F auch als Sitz der Kraft betrachtet werden muss. Der absolute Wert derselben ist daher

$$K = \frac{m\,\mu^2 a^3}{r^2}$$

Bezeichnet ferner M die Masse des anziehenden Körpers und ist d ein proportionaler Factor, so hat man auch

$$d\,.\,M = a^3\mu^2 = (2\pi)^2\cdot\frac{a^3}{T^2}$$

und man erkennt, dass der Quotient $\frac{a^3}{T^2}$ für ein System beweglicher Massenpunkte eine constante Grösse ist. Daher gilt hier die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_3^3$$

2) $a < 0$.

Da hier die willkürliche Constante a einen neg. Wert hat, so ersetze man a durch $(-a')$, wo a' pos. aufzufassen ist. Lässt man bei a' den Accent wieder fallen, so ist

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a}\right)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(r^2 + 2ar - \frac{aA^2}{\mu}\right)}$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 + 2ar - \frac{aA^2}{\mu} = 0$$

seien wie früher mit α und β bezeichnet. Für dieselben ergeben sich die Werte

$$\alpha = \quad a \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{\mu a}} - 1\right)$$

$$\beta = - a \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{\mu a}} + 1\right)$$

Beide Wurzeln sind reell; α ist pos. und β neg. und zugleich ist mod. $\beta > \alpha$. Dasselbe zeigen auch die Relationen

$$\alpha + \beta = - 2a; \quad \alpha \cdot \beta = - \frac{aA^2}{\mu}$$

Man ersetze nun die neg. Wurzel β durch $(-\beta')$; zugleich sei

$$k^2 = 1 + \frac{A^2}{\mu a}$$

Lässt man bei β' den Accent wieder weg, so hat man

$$\alpha = a(k-1); \quad \beta = a(k+1)$$

$$\alpha\beta = \frac{aA^2}{\mu}; \qquad \beta - \alpha = 2a$$

$$A^2 = \mu a \cdot (k^2 - - 1)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}\,(r - \alpha(\,(r + \beta)}$$

und daher muss beständig $r > \alpha$ sein. Um auch hier zu einer passenden Substitution für die Variable r zu gelangen, ersetze man im Ausdrucke für $\frac{\partial r}{\partial t}$ die Constante A^2 durch $\mu a(k^2 - 1)$. Weil dann

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 - \frac{a^2 k^2}{r^2}}$$

so ist es angezeigt, $\left(1+\frac{a}{r}\right)$ durch $\frac{ak \operatorname{cof} \varphi}{r}$ zu ersetzen. Dann ist

$$r = a(k \operatorname{cof} \varphi - 1)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \cdot \frac{k \operatorname{fin} \varphi}{r}$$

Da der tiefste Wert von r gleich α, oder gleich $a(k-1)$ ist, so beginnt die neue Variable φ bei null und durchläuft von hier an alle pos. Werte. Aus der Gleichung

$$r = a(k \operatorname{cof} \varphi - 1)$$

folgt aber auch, dass

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ak \operatorname{fin} \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ist und daher

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ist daher mit dem Leitstrahl umgekehrt proportional. Für das Differential der Zeit erhält man nun den Wert

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (k \cos \varphi - 1)\, d\varphi$$

und die Integration ergibt sofort

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (k \sin \varphi - \varphi)$$

Der Mittelpunkt der Kraft werde als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen positive Richtung der x-Axe durch den Punkt

$$(\varphi = 0, \quad r = (k - 1)a$$

geht. Für die rechtwinkligen Coordinaten (x, y) des Massenpunktes hat man wieder

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

Aus dem bekannten Ausdrucke für die doppelte Flächengeschwindigkeit

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\sqrt{\mu a (k^2 - 1)}}{r^2}$$

Ersetzt man hier dt und r^2 resp. durch $\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (k \cos\varphi - 1)\, d\varphi$ und $a^2(k \cos\varphi - 1)^2$, so erhält man

$$dw = \sqrt{1 - k^2} \cdot \frac{d\varphi}{k \cos\varphi - 1}$$

und die Integration dieser Gleichung führt auf

$$w = 2 \operatorname{arctg} \cdot \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}\right)$$

also

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$$

Bezeichnet auch hier d einen constanten Factor, so gelten die Gleichungen

$$d \cdot \sin \frac{w}{2} = \sqrt{1+k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$d \cdot \cos \frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

Erhebt man beide Gleichungen in's Quadrat und addirt, so folgt

$$d = \sqrt{k \cos\varphi - 1}$$

daher ist

$$\sin \frac{w}{2} = \sqrt{k+1} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k \cos\varphi - 1)}}$$

$$\cos \frac{w}{2} - \sqrt{k-1} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k \cos\varphi - 1)}}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun mit Hülfe der bekannten Relationen

$$\frac{1 - \cos w}{2} = \sin^2 \frac{w}{2}; \quad \frac{1 + \cos w}{2} = \cos^2 \frac{w}{2}$$

$$\frac{\cos\varphi - 1}{2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}; \quad \frac{\cos\varphi + 1}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

für $\sin w$ und $\cos \varphi$ schliesslich die Werte

$$\cos w = \frac{\cos\varphi - k}{k \cos\varphi - 1}; \quad \sin w = \frac{\sqrt{k^2 - 1} \cdot \sin\varphi}{k \cos\varphi - 1}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke lassen sich nun die Coordinaten des Massenpunktes auf folgende Weise darstellen:

$$x = r\cos w = a(\cos\varphi - k)$$

$$y = r\sin w = a\sqrt{k^2 - 1}\,.\,\sin\varphi$$

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen die Variable φ, so erhält man die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten in der Form

$$\frac{(x + ak)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a\sqrt{k^2 - 1})^2} = 1$$

Wenn daher die ursprüngliche Constante a einen endlichen, negativen Wert hat, so ist die Bahn des materiellen Punktes eine Hyperbel, in deren pos. Brennpunkte der Mittelpunkt der anziehenden Kraft liegt. Die Hauptaxe derselben ist gleich dem absoluten Werte von a, während die Nebenaxe b durch $a\sqrt{k^2 - 1}$ bestimmt wird. Die numerische Excentricität ist gleich der positiven Quadratwurzel aus $\left(1 + \frac{A^2}{\mu a}\right)$ und ist beständig grösser als 1. Für $1 < k^2 < 2$ ist auch $b < a$; ist aber $k^2 = 2$, so ist $b = a$ und die Hyperbel geht in eine gleichseitige über. Ist endlich $k^2 > 2$, so ist auch $b > a$.

3) $a = \infty$.

Weil in diesem Falle $\frac{1}{2a}$ als verschwindend klein betrachtet werden kann, so nimmt der Ausdruck für v^2 die Form

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

an. Die Geschwindigkeit ist daher mit der Quadratwurzel aus der Entfernung r umgekehrt proportional. Ebenso erhält man für $\frac{\partial r}{\partial t}$, wenn dort $a = \infty$ gesetzt wird, den Wert

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\,.\,\sqrt{2\mu r - A^2}$$

und es muss daher beständig $r > \frac{A^2}{2\mu}$ angenommen werden, wenn eine reelle Bewegung entstehen soll. Der tiefste Wert, den r annehmen kann, ist $\frac{A^2}{2\mu}$. Man setze nun

$$r = \frac{A^2}{2\mu} \cdot \cos^2\varphi$$

Die neue Variable φ wächst nun von 0 bis zum pos. Unendlichen. Die Substitution ergibt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = A \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$

Die Ableitung von r nach t ergibt aber auch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{A^2}{\mu} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

und diese beiden Ausdrücke für $\frac{\partial r}{\partial t}$ führen auf den Wert von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Man erhält

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2\mu^2}{A^2\cos^3\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{2r^3}}$$

Die Ableitung von φ nach t ist somit mit der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional. Für dt erhält man aus obiger Gleichung den Wert

$$dt = \frac{A^3}{2\mu^2} \cdot \cos\varphi^3 d\varphi$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

also ist auch

$$\cos^3\varphi = \frac{1}{2^3}\Big((e^{3\varphi} + e^{-3\varphi}) + 3(e^{\varphi} + e^{-\varphi})\Big)$$

$$= \frac{1}{2^3}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi),$$

und somit

$$dt = \frac{A^3}{2^3\mu^2} \cdot (\cos 3\varphi + 3\cos\varphi)\, d\varphi$$

Die Integration dieser Gleichung führt nun auf den Wert von t in der Form

$$t = \frac{A^3}{2^3 \cdot \mu^2} \cdot (\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)$$

Der Kraftmittelpunkt werde nun als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen x-Axe durch das Perihel der Wegcurve, also durch den Punkt

$$r = \frac{A^2}{2\mu}$$

geht. Wenn der Winkel, den der Leitstrahl r mit der pos. x-Axe bildet, mit w bezeichnet wird, so hat man

$$x = r\cos w; \quad y = r\sin w$$

und

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{also} \quad dw = \frac{A}{r^2}\, dt$$

Ersetzt man wieder dt und r^2 durch die oben dargestellten Functionen in φ, so folgt

$$dw = \frac{2\, d\varphi}{\mathfrak{Cos}\ \varphi}$$

oder

$$dw = 4 \cdot \frac{d \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

also

$$w = 4 \operatorname{arc tg} \left(\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}\right)$$

Ist d wieder ein proportionaler Factor, so gelten die Gleichungen

$$d \cdot \sin \frac{w}{4} = \mathfrak{Sin} \frac{\varphi}{2}; \quad d \cdot \cos \frac{w}{4} = \mathfrak{Cos} \frac{\varphi}{2}$$

und die Elimination von w aus diesen Gleichungen führt auf den Wert von d in der Form

$$d = \sqrt{\mathfrak{Cos}\ \varphi}$$

Daher ist

$$\sin \frac{w}{4} = \frac{\mathfrak{Sin} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}\ \varphi}}; \quad \frac{w}{4} = \frac{\mathfrak{Cos} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}\ \varphi}}$$

Aus diesen Werten findet man ferner

$$\sin \frac{w}{2} = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\varphi}{\mathfrak{Cos}\ \varphi}; \quad \cos \frac{w}{2} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\ \varphi}$$

$$\sin w = \frac{\mathfrak{Sin}\ \varphi}{\mathfrak{Cos}^2\varphi}; \quad \cos w = \frac{1 - \mathfrak{Sin}^2\varphi}{\mathfrak{Cos}^2\varphi}$$

und daher ist auch

$$x = r\cos w = \frac{A^2}{2\mu} \cdot (1 - \mathfrak{Sin}^2\varphi)$$

$$y = r\sin w = \frac{A^2}{\mu}\, \mathfrak{Sin}\ \varphi$$

Die Elimination von φ aus diesen 2 Gleichungen führt nun auf die Gleichung der Wegcurve in der Form

$$y^2 = \frac{2A^2}{\mu} \cdot \left(\frac{A^2}{2\mu} - x\right)$$

Die Bahn des materiellen Punktes ist somit eine Parabel, in deren Brennpunkte die anziehende Kraft liegt. Der Parameter ist gleich $\frac{2A^2}{\mu}$, also mit dem Quadrate der doppelten Flächengeschwindigkeit proportional und der Brennpunkt wird durch $\frac{A^2}{2\mu}$ bestimmt.

Wir sind am Schlusse dieses Abschnittes angelangt, und es bleibt jetzt noch der Fall zu behandeln übrig, wo die wirkende Kraft nach dem Newton'schen Gesetze abstossend auf den beweglichen Massenpunkt einwirkt.

$$\text{b)} \quad K = \frac{nmM}{r^2}; \qquad f'(r) = \frac{1}{r^2}; \quad f(r) = -\frac{1}{r}; \quad g = \frac{nM}{r^2}$$

Setzt man auch hier abkürzend

$$\mu = nM$$

so erhält man nach der allgemeinen Formel für die Geschwindigkeit v den Ausdruck

$$v^2 = -\frac{2\mu}{r} + B$$

und man erkennt, dass nur pos. Werte von B in Betracht kommen können. Wenn

$$B = \frac{\mu}{a}$$

gesetzt wird, und für die Constante a das pos. Unendliche ausgeschlossen wird, so hat man

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{r}\right)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}\left(r^2 - 2ar - \frac{aA^2}{\mu}\right)}$$

Sind nun α und β die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 - 2ar - \frac{aA^2}{\mu} = 0$$

so hat man

$$\alpha = a\,.\left(1 + \sqrt{\left(1+\frac{A^2}{\mu a}\right)}\right)$$

$$\beta = a\,.\left(1 - \sqrt{\left(1+\frac{A^2}{\mu a}\right)}\right)$$

und

$$\alpha\,.\,\beta = -\frac{aA^2}{\mu};\quad \alpha+\beta = 2a$$

Beide Wurzeln sind reell; α ist pos. und β ist neg. und mod. $\beta < \alpha$. Ersetzt man auch β durch $(-\beta')$, wo β' pos. zu verstehen ist und lässt bei β' den Accent wieder fallen, so erhält man, wenn noch abkürzend

$$k^2 = 1 + \frac{A^2}{a\mu}$$

gesetzt wird

$$\alpha = a(1+k);\quad \beta = a(k-1)$$

$$\alpha\beta = \frac{aA^2}{\mu};\qquad \alpha - \beta = 2a$$

Für die doppelte Flächengeschwindigkeit A erhält man hier den Wert

$$A^2 = \mu a(k^2 - 1)$$

Weil jetzt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\,.\,\sqrt{\frac{\mu}{a}\,(r-\alpha)\,(r+\beta)}$$

ist, so muss r längs des ganzen Weges die Bedingung

$$r > \alpha$$

erfüllen. Ersetzt man A^2 durch $\mu a(k^2-1)$, so hat man auch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{a^2k^2}{r^2}\right)}$$

und es scheint auch hier angezeigt, $\left(1-\frac{a}{r}\right)$ durch $\frac{ak}{r}\operatorname{coj}\varphi$ zu ersetzen, also

$$r = a(1 + k\operatorname{coj}\varphi)$$

anzunehmen. Der tiefste Wert von r liegt bei

$$\alpha = a(k+1)$$

Die neue Variable φ beginnt daher bei null und durchläuft von hier an die ganze pos. Hälfte der Realitätslinie. Mittelst dieser Substitution geht nun $\frac{\partial r}{\partial t}$ in

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \,.\, \frac{k \sin \varphi}{r}$$

über. Wird ferner die Gleichung

$$(r = a(1 + k \cos \varphi)$$

nach t abgeleitet, so erhält man auch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ak \sin \varphi \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und die Elimination von $\frac{\partial r}{\partial t}$ aus diesen beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \,.\, \frac{1}{r}$$

Die Ableitung von φ nach der Zeit t ist somit mit dem Radius umgekehrt proportional. Weil nun auch

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \,.\, (1 + k \cos \varphi)\, d\varphi$$

so führt die Integration dieser Gleichung auf die Zeit t in Function der Variabeln φ. Man hat

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \,.\, (\varphi + k \sin \varphi)$$

Der Mittelpunkt der wirkenden Kraft werde wieder als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. Richtung der x-Axe durch das Perihel der Wegcurve geht, wo also

$$r = a(1 + k) \quad \text{ist.}$$

Sind (x, y) die rechtwinkligen Coordinaten des Massenpunktes m und ist w der Winkel, den der Leitstrahl mit der x-Axe bildet, so hat man

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w; \quad dw = \frac{A}{r^2}\, dt$$

Setzt man auch hier wieder für r und dt die oben gefundenen Werte in φ ein, so folgt

$$dw = \sqrt{k^2 - 1} \,.\, \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi}$$

Weil

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

ist, und 1 durch $\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{6}$ ersetzt werden kann, so hat man auch, wenn abkürzend

$$u = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cdot \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

gesetzt wird,

$$dw = 2 \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

also

$$w = 2 \cdot \operatorname{arctg} u$$

und somit ist

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

Bezeichnet d einen proportionalen Factor, so gelten die Gleichungen

$$d \cdot \sin\frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}; \quad d \cdot \cos\frac{w}{2} = \sqrt{k+1} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

und die Elimination von w aus diesen Gleichungen führt auf den Wert von d in der Form

$$d = \sqrt{(k \cos\varphi + 1)}$$

Daher hat man

$$\sin\frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k\cos\varphi + 1)}}$$

$$\cos\frac{w}{2} = \sqrt{k+1} \cdot \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k\cos\varphi + 1)}}$$

folglich auch

$$\sin w = \sqrt{k^2-1}\,\frac{\sin\varphi}{k\cos\varphi + 1}; \quad \cos w = \frac{k + \cos\varphi}{k\cos\varphi + 1}$$

Die rechtwinkligen Coordinaten des Massenpunktes lassen sich daher auf folgende Weise als Functionen von φ darstellen:

$$x = a(\cos\varphi + k); \quad y = a\sqrt{k^2-1} \cdot \sin\varphi$$

die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten ist daher

$$\frac{(x-ak)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a\sqrt{k^2-1})^2} = 1$$

Die Bahn des materiellen Punktes ist also eine (Ellipse) Hyperbel mit den Halbaxen a nnd $a\sqrt{k^2-1}$, in deren neg. Brennpunkte die wirkende Kraft liegt. Die numerische Excentricität k ist gleich der pos. Quadratwurzel aus $\left(1+\frac{A^2}{\mu a}\right)$ und hat den Wert $\sqrt{2}$, wenn $A = \sqrt{\mu a}$ ist. In diesem Falle ist die Bahn eine gleichseitige Hyperbel mit den Halbaxen a.

3) Die Kraft ist dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional.

$$\text{a)} \quad K = -\frac{nmM}{r^3}; \quad f'(r) = -\frac{1}{r^3}; \quad f(r) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$g = -\frac{nM}{r^3}$$

Wenn auch hier abkürzend

$$\mu^2 = nM$$

gesetzt wird, so lässt sich das Quadrat der Geschwindigkeit durch die Formel ausdrücken

$$v^2 = \frac{\mu^2}{r^2} + B$$

Die Constante B darf mit Ausschluss des Unendlichen die ganze Realitätslinie durchlaufen. Es sind demnach folgende drei Hauptfälle zu unterscheiden:

1) $B > 0$
2) $B = 0$
3) $B < 0$

Wir betrachten zuerst den Fall, wo B einen pos. Wert hat.

1) $B > 0$

Ist B eine pos. Zahl, so existirt v für alle reellen Werte von r, $r = 0$ und $r = \infty$ nicht ausgeschlossen. Ist $r = \infty$, so darf man in tiefster Näherung $v^2 = B$ setzen und die Constante B stellt somit das Quadrat der Geschwindigkeit in unendlicher Ferne dar. Für die Ableitung von r nach t erhält man den Ausdruck

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}\cdot\sqrt{\mu^2 - A^2 + r^2 B}$$

Da nun B pos. ist, so hängt die Realität von $\frac{\partial r}{\partial t}$ von dem Werte von $(\mu^2 - A^2)$ ab. Es ist daher angezeigt, hier drei Unterabteilungen zu unterscheiden, je nachdem der Ausdruck $(\mu^2 - A^2)$ positiv, negativ oder null ist.

$$\alpha) \quad \mu^2 - A^2 > 0; \quad A < \mu$$

Da in diesem Falle auch $\frac{\partial r}{\partial t}$ für alle pos. Werte von r reell ausfällt, so muss die Wegcurve in's Unendliche reichen und weil für ein pos. dt auch dr pos. ausfällt, so nimmt mit wachsender Zeit auch die Entfernung vom Kraftmittelpunkte zu. Im Unendlichen bekommt $\frac{\partial r}{\partial t}$ annähernd den Wert $\sqrt{B}$, stimmt also hier mit der Geschwindigkeit v überein. Man führe nun folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{\mu^2 - A^2}{A^2} = a^2; \quad \frac{A^2}{B} = b^2; \quad B = c^2$$

dann ist

$$A = bc; \quad \mu^2 - A^2 = a^2 b^2 c^2$$

Da im allgemeinen $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ durch $\left(2nMf(r) + B - \frac{A^2}{r^2}\right)$ ausgedrückt wird, so steht es frei, $\frac{\partial r}{\partial t}$ durch die negative Quadratwurzel aus diesem Ausdrucke darzustellen und also

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu^2 - A^2}{r^2} + B}$$

anzunehmen. Ersetzt man nun hier $(\mu^2 - A^2)$ und B durch die oben angegebenen Ausdrücke, so hat man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{r^2} + c^2} = -c \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^2}{r^2} + 1}$$

Wenn dt einen pos. Wert hat, so ergibt diese Formel für dr einen neg. Wert; daher ist mit zunehmender Zeit der Leitstrahl im Abnehmen begriffen. Man führe nun mittelst der Gleichung

$$r = \frac{ab}{\sin \varphi}$$

die neue Variable φ in die Rechnung ein. Weil dann $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{r^2} + 1}$ in $\cos \varphi$ übergeht, so folgt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = - c \cos\varphi$$

also

$$dt = - \frac{dr}{c \cos\varphi}$$

Aus dem Ausdrucke für r folgt aber auch

$$dr = - ab \cdot \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Setzt man nun diesen Wert für dr in die Gleichung für dt ein, so folgt

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

und man erkennt aus dieser Gleichung, dass mit wachsender Zeit auch die Variabele φ im Zunehmen begriffen ist. Wenn φ von 0 an bis zum pos. Unendlichen ansteigt, sinkt die Variabele r vom pos. Unendlichen fortwährend bis auf null herab. Nun ist aber

$$d \cdot \operatorname{cotang}\varphi = - \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

und somit

$$dt = - \frac{ab}{c} d \cdot \operatorname{cotang}\varphi$$

folglich

$$t = - \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{cotang}\varphi + C$$

wo C die Integrationsconstante bezeichnet. Nimmt man nun an, dass mit $\varphi = \infty$ die Zeit t gleich null sein soll, so muss die Constante C den Wert $\frac{ab}{c}$ haben; in diesem Falle ist dann

$$t = \frac{ab}{c}(1 - \operatorname{cotang}\varphi)$$

Nun ist aber

$$\sin\varphi = \frac{ab}{r}, \quad \cos\varphi = \sqrt{1 + \frac{a^4 b^2}{r^2}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{cotang}\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{a^2 b^2} + 1}$$

somit hat man auch

$$t = \frac{ab}{c}\left(1 - \sqrt{\frac{r^2}{a^2 b^2} + 1}\right.$$

Für $r = 0$ ist auch $t = 0$ und der Zeitanfang liegt somit im Ursprunge. Für $r = N$ ist annähernd auch $t = - \frac{N}{e}$, wird somit auf

dieselbe Art unendlich wie der Leitstrahl r. Da der obige Ausdruck für t für $r > 0$ beständig neg. ausfällt, so gibt diese Gleichung den neg. Wert der Zeit an, welche der Körper m braucht, um vom Punkte r seiner Bahn nach dem Kraftmittelpunkte als dem Ende der Wegcurve zu gelangen. Nehmen wir diese Zeit pos. an, so ist

$$t = \frac{ab}{c} \cdot \left(\sqrt{\frac{r^2}{a^2 b^2}+1} - 1\right)$$

Ferner ist

$$r^2 \frac{dw}{dt} = A = bc$$

also

$$dw = bc \cdot \frac{dt}{r^2}$$

Ersetzt man wieder dt und r^2 durch die bekannten Functionen in φ, so folgt

$$a\,dw = d\varphi$$

also

$$\varphi = aw$$

Die Variable φ ist somit mit dem Winkel w direct proportional. Um die Wegcurve in unendlicher Ferne beurteilen zu können, beachte man, dass

$$dt = -\frac{1}{c} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1+\frac{a^2 b^2}{r^2}}}$$

ist. Setzt man nun diesen Wert von dt in die Gl. für dw ein, so folgt

$$dw = -b \cdot \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\left(1+\frac{a^2 b^2}{r^2}\right)}}$$

und diese Gleichung geht für $r = \infty$ in die andere

$$dw = -b \cdot \frac{dr}{r^2}$$

über, aus welcher

$$w = \frac{b}{r}$$

folgt. Die bei dieser Integration auftretende Constante muss den Wert null haben, weil für $r = \infty$ der Winkel w annähernd gleich null sein muss. Für ein sehr grosses r ist es daher erlaubt, w durch $\sin w$ zu ersetzen und da bekanntlich $r \sin w$ den Abstand des Massenpunktes von der x-Axe angibt, so hat man für die Wegcurve in unendlicher Ferne die Gleichung

$$r \sin w = b$$

Dieselbe läuft daher in der Entfernung b mit der x-Axe parallel und $y = b$ ist die Gleichung der Asymptote. In unmittelbarer Nähe von $r = 0$ sind sowol φ wie w unendlich gross; weil dann $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ annähernd durch $\frac{1}{2} e^{\varphi}$ dargestellt werden kann, so nimmt hier die Gleichung der Wegcurve die Form

$$r = 2ab\,e^{-aw}$$

an, hat daher Aehnlichkeit mit einer log. Spirale. Im allgemeinen aber hat die Gleichung der Wegcurve die Form

$$r = \frac{\sin aw}{ab}$$

Setzt man hier der Reihe nach $w = \pi$, 2π, 3π, 4π, so erhält man die Durchschnittspunkte der Curve mit der x-Axe in der Form $\frac{ab}{\sin a\pi}$, $\frac{ab}{\sin 2a\pi}$, $\frac{ab}{\sin 3a\pi}$, $\frac{ab}{\sin 4a\pi}$ etc.; setzt man aber $w = \frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{2}$, etc., so geben die Werte von $\frac{ab}{\sin\frac{a\pi}{2}}$. $\frac{ab}{\sin\frac{3a\pi}{2}}$, $\frac{ab}{\sin\frac{5a\pi}{2}}$. $\frac{ab}{\sin\frac{7a\pi}{2}}$ etc die Durchschnittspunkte auf der y-Axe an. Ersetzt man ferner in der Gleichung für v^2 die Grössen μ^2, r^2 und B resp. durch $b^2c^2(1+a^2)$ $\frac{a^2b^2}{\sin^2\varphi}$ und c^2, so erhält man auch

$$v = \frac{c}{a}\sqrt{(1+a^2)\cos a^2 w - 1}$$

Für einen sehr kleinen Wert von w, also in sehr grosser Ferne, kann daher die Geschwindigkeit durch c dargestellt werden. Ist dagegen w pos. sehr gross, und der Massenpunkt in der Nähe des Kraftmittelpunktes, so ist annähernd

$$v = \frac{c\sqrt{(1+a^2)}}{2a} \cdot e^{aw}$$

wird somit unendlich von der Form e^{aw}. Die Zeit, welche der Körper m braucht, um vom Punkte (r, w) seiner Bahn nach dem Ursprunge zu gelangen, kann nach Früherem durch

$$t = \frac{ab}{c} \cdot (\operatorname{cotang} aw - 1)$$

dargestellt werden. Wenn man hier unter einem Umlaufe die Zeit versteht, welche der Körper m braucht, um von einem Durch-

gangspunkte durch die x-Axe bis zum entsprechenden nachfolgenden zu gelangen und die Umlaufszeit mit T bezeichnet, so erhält man dafür den Ausdruck

$$T = \frac{ab}{c} \cdot (\text{cotang}\, n a\pi - \text{cotang}\, (n+1) a\varphi)$$

Wenn ds ein Element der Wegcurve bezeichnet, so hat man

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,dw)^2$$

nun ist

$$r\,dw = \frac{r}{a} d\varphi = \frac{b}{\sin\varphi} \cdot d\psi, \quad dr = -ab \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

und somit

$$(ds)^2 = \frac{(a^2+1)b^2 \cos^2\varphi}{\sin^4\varphi} \cdot \left(1 - \frac{1}{(a^2+1)\cos^2\varphi}\right)(d\varphi)^2$$

Setzt man nun abkürzend

$$k^2 = \frac{1}{a^2+1}$$

und führt mittelst der Substitution

$$S(u) = \frac{1}{\cos\varphi}$$

die neue Variable in die Rechnung ein, so ist

$$1 - \frac{1}{(a^2+1)\cos^2\varphi} = D^2 u; \quad \cos\varphi = \frac{1}{S(u)}$$

$$\cos^2\varphi - 1 = \frac{1}{S^2 u} - 1 = \frac{C^2(u)}{S^2(u)}$$

und daher

$$\frac{(a^2+1)b^2 \cdot \cos^2\varphi}{\sin^4\varphi} = (a^2+1)b^2 \cdot \frac{S^2(u)}{C^4(u)}$$

Ferner ist

$$\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{CD\,du}{S^2(u)}, \quad \text{also} \quad d\varphi = -\frac{D\,du}{S}$$

und daher

$$ds = -\frac{b}{k} \cdot \frac{D^2(w)}{C^2(w)} du$$

Wenn φ den Wert 0 hat, so ist $u = K$ und für $\varphi = \infty$ ist $u = 0$. Wenn daher die Variable φ die Werte von 0 bis zum pos. Unendlichen durchläuft, sinkt u fortwährend von K auf null herab. Zu φ_1 gehöre u_1; dann lässt sich die Länge des Bogens vom Ursprunge bis zum Punkte φ_1 durch das Integral

$$s = \frac{b}{k} \cdot \int_0^{u_1} \frac{D^2(u)}{C^2(u)} du$$

darstellen, Bekanntlich ist nun aber

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{SD}{C}\right) = \frac{D^2}{C^2} + D^2 - 1$$

folglich auch

$$s = \frac{b}{h} \int_0^{u_1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{SD}{C}\right) - D^2 + 1\right) du$$

also

$$s = \frac{b}{k}\left(\frac{S(u_1)\, D(u_1)}{C(u_1)} - E \operatorname{am} u_1 + u_1\right)$$

Der Inhalt der infinitesimalen Fläche, welche der radius vector in der Zeit dt durchläuft, kann durch

$$dS = \frac{r^2\, dw}{2}$$

dargestellt werden. Ersetzt man hier r^2 und dw durch die bekannte Functionen in φ, so erhält man

$$dS = \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Wird nun $\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$ durch $-d \,.\, \operatorname{cotang} \varphi$ ersetzt, so folgt

$$dS = -\frac{ab^2}{2} \,.\, d^2 \,.\, \operatorname{cotang} \varphi$$

und daher ist

$$S = -\frac{ab^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\infty} d \,.\, \operatorname{cotang} \varphi$$

$$= \frac{ab^2}{2} (\operatorname{cotang} \varphi_1 = 1)$$

Wird aber von φ_1 bis φ_{11} integrirt, wo $\varphi_{11} > \varphi_1$ ist, so hat man

$$S = \frac{ab^2}{2} (\operatorname{cotang} \varphi_1 - \operatorname{cotang} \varphi_{11})$$

$$\beta) \quad \mu^2 - A^2 = 0; \quad A = \mu$$

In diesem Falle ist

$$v^2 = \frac{A^2}{r^2} + B$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\sqrt{B}$$

Fassen wir hier dt pos. auf, so muss dr neg. sein, und man erkennt schon hieraus, dass sich der materielle Punkt m mit wachsender Zeit dem Kraftmittelpunkte nähert. Die Integration obiger Differentialgleichung ergibt

$$r = -\sqrt{B} \, . \, t + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten setze man fest, dass mit $r = 0$ auch $t = 0$ sein soll; da unter dieser Annahme die Constante den Wert null haben muss, so ist

$$r = -\sqrt{B} \, . \, t$$

Die Zeit, welche somit der materielle Punkt m braucht, um vom Punkte (r, w) seiner Bahn nach dem Kraftmittelpunkte zu gelangen, ist dem radius vector direct proportional und lässt sich durch $\frac{r}{\sqrt{B}}$ darstellen. Für einen unendlich fernen Punkt der Bahn wird daher die Zeit auf gleiche Weise unendlich wie der Leitstrahl.

Die doppelte Flächengeschwindigkeit A ist auch hier $r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$. Da aber $A = \mu$ ist, so hat man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu}{r^2}$$

und weil $dt = -\frac{dr}{\sqrt{B}}$ ist, so ist auch

$$dw = -\frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

Wenn dr pos. ist, so muss dw neg. sein. Mit abnehmendem r ist daher der Winkel w im Wachsen begriffen. Aus obiger Gleichung folgt, dass allgemein

$$w = \frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{r} + C$$

ist. Wenn aber für $r = \infty$ der Winkel w verschwinden soll, so muss die Constante C als null angenommen werden, und es ist daher

$$w = \frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{r}$$

Der Winkel w ist daher mit dem reciproken Werte des Radius direct proportional. Weil auch

$$r = \frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{w}$$

ist, so erkennt man, dass die Wegcurve vom Unendlichen herkommend spiralförmig den Kraftmittelpunkt umgibt und sich demselben in immer enger werdenden Windungen stetig nähert. Ersetzt man in dem Ausdrucke für die Zeit den Radius durch die gefundene Function in w, so hat man auch

$$t = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{w}$$

Wenn r sehr gross gewählt wird, so muss w sehr klein sein und kann daher annähernd durch $\sin w$ dargestellt werden. Da nun aber $r \sin w$ den Abstand des materiellen Punktes von der x-Axe darstellt, welche mit y bezeichnet werden soll, so lässt sich die Wegcurve in unendlicher Ferne durch die Gleichung

$$y = \frac{A}{\sqrt{B}}$$

darstellen. Dieselbe läuft daher im Unendlichen in der Entfernung $\frac{A}{\sqrt{B}}$ mit der x-Axe parallel. Wenn nun der materielle Punkt vom Unendlichen herkommend sich spiralförmig dem Mittelpunkte nähert, so findet der erste Durchgang durch die x-Axe für $w = \pi$ statt, und hier ist

$$r_1 = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{\pi}$$

und

$$t_1 = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Um den neg. Durchgangspunkt durch die x-Achse zu erhalten, hat man in der allgemeinen Formel w durch $n \cdot \pi$ zu ersetzen. Für diesen Punkt hat man

$$r_n = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{n \cdot \pi}$$

$$t_n = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{n\pi}$$

und aus diesen Werten folgt, dass

$$r_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot r_n$$

$$t_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot t_n$$

ist. Wenn ferner

$$D_n = r_n + r_{n+1} \quad \text{und} \quad T_n = t_n - t_{n+2}$$

bezeichnen, so hat man

$$D_n = \frac{A}{\pi \sqrt{B}} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

und

$$T_n = \frac{A}{2\pi \sqrt{B}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

folglich auch

$$D_{n+1} = \frac{n(2n+3)}{(n+2)(2n+1)} \cdot D_n$$

$$T_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot T_n$$

Das Wegelement ds wird bekanntlich durch die Gleichung

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r\,dw)^2}$$

bestimmt. Ersetzt man hier dr und r durch die bekannten Functionen in w, so erhält man

$$ds = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{1+w^2} \cdot \frac{dw}{w^2}$$

und wenn ferner $w = \sin\varphi$ gesetzt wird, so ist

$$ds = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \operatorname{cotang}^2\varphi \, d\varphi \mp \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\right) d\varphi$$

und daher

$$ds = \frac{A}{\sqrt{B}} d \,.\, (\varphi - \operatorname{cotang}\varphi)$$

Die Länge der Wegcurve vom Punkte φ_1 bis zum Punkte φ_{11} lässt sich daher durch die Formel

$$s = \frac{A}{\sqrt{B}}\Big((\varphi_{11} - \varphi_1) + (\operatorname{cotang}\varphi_1 - \operatorname{cotang}\varphi_{11})\Big)$$

ausdrücken. Führt man hier die ursprüngliche Variable w wieder in die Rechnung ein, indem man φ durch $\log(\sqrt{1+w^2}+w)$ und cotang φ durch $\frac{\sqrt{1+w^2}}{w}$ ersetzt, so hat man

$$s = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \left(\log\frac{\sqrt{1+w_{11}{}^2}+w_{11}}{\sqrt{1+w_1{}^2}+w_1} + \frac{\sqrt{1+w_1{}^2}}{w_1} - \frac{\sqrt{1+w_{11}{}^2}}{w_{11}}\right)$$

Der Inhalt des kleinen Sectors, welcher vom radius vector in der Zeit dt durchlaufen wird, ist bekanntlich $\frac{r^2 dw}{2}$. Wird nun hier dw durch $-\frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{dr}{r^2}$, so erhält man dafür den Ausdruck

$$S = \frac{\mu}{2\sqrt{B}} \cdot \int_0^r dr = \frac{\mu}{2\sqrt{B}} \cdot r$$

Die Inhalte der Sectoren sind somit mit dem Leitstrahl direct proportional. Ersetzt man r durch $\sqrt{B} \cdot t$, so hat man auch

$$S = \frac{\mu}{2} \cdot t = \frac{A^2}{2B} \cdot \frac{1}{w}$$

Wenn nun hier w zuerst durch $n \cdot 2\pi$ und dann durch $(n+1) \cdot 2\pi$ ersetzt wird, so hat man

$$S_n = \frac{A^2}{2B} \cdot \frac{1}{n \cdot 2\pi}$$

und

$$S_{n+1} = \frac{A^2}{2B} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2\pi}$$

und daher gilt hier die Relation

$$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot S_n$$

Bezeichnet man ferner die Differenz $(S_n - S_{n+1})$ mit J_n, so folgt

$$J_n = \frac{A^2}{4\pi B} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

und wir erhalten zwischen J_n und J_{n+1} die Beziehung

$$J_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot J_n$$

$$\gamma) \quad \mu^2 - A^2 < 0, \quad A > \mu$$

Weil

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{r^2 B - (A^2 - \mu^2)}$$

so hängt die reelle oder imaginäre Beschaffenheit der Bewegung von dem pos. Werte von $A^2 - \mu^2$ ab, und es ist einleuchtend, dass die Realität der Bewegung $r^2 > \frac{A^2 - \mu^2}{B}$ verlangt. Führt man auch hier die Abkürzungen

$$\frac{A^2 - \mu^2}{A^2} = a^2, \quad \frac{A^2}{B} = b^2; \quad B = c^2$$

ein, so folgt, da

$$A^2 - \mu^2 = a^2 b^2 c^2; \quad A^2 = b^2 c^2$$

ist, dass

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{r^2}}$$

ist. Der tiefste Wert, den r annehmen kann, ist ab, und weil hier $\frac{\partial r}{\partial t}$ verschwindet, so zeigt derselbe die Minimumseigenschaft an. Von diesem Minimum an darf nun r fortwährend wachsen bis zum pos. Unendlichen, wo $\frac{\partial r}{\partial t}$ den Wert c erreicht hat. Wenn dt pos. aufgefasst wird, so muss auch dr pos. sein und man erkennt, dass mit wachsender Zeit auch r im Wachsen begriffen ist. Im Unendlichen ist r mit der Zeit direct proportional. Da der Quotient $\frac{ab}{r}$ längs des ganzen Weges beständig kleiner als 1 sein muss, so erscheint es angezeigt, denselben durch $\cos\varphi$ zu ersetzen, also

$$r = \frac{ab}{\cos\varphi}$$

anzunehmen. Da r von ab an alle pos. Werte bis zum pos. Unendlichen durchlaufen kann, so wächst die neue Variable φ von $-\frac{\pi}{2}$ fortwährend bis $\frac{\pi}{2}$; in $\varphi = 0$ ist für r ein Minimum vorhanden. Diese Substitution ergibt nun

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \sin\varphi$$

Weil nun auch

$$dr = \frac{ab \sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

ist, so folgt

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

und weil

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$$

ist, so hat man schliesslich

$$dt = \frac{ab}{c}\, d \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$$

und daher ist allgemein

$$t = \frac{ab}{c} \quad \mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{Const.}$$

Setzt man nun fest, dass mit $\varphi = 0$ auch $t = 0$ sein soll, der Anfangspunkt der Zeit also in $r = ab$ liege, so muss die Integrationsconstante gleich 0 sein und man hat

$$t = \frac{ab}{c} \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$$

Diese Formel drückt somit die Zeit aus, welche der Massenpunkt m braucht, um vom Punkte (r, φ) der Bahn nach dem Punkte $(r = ab, \varphi = 0)$ zu gelangen. Da nun

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{ab} \cdot \sqrt{(r^2 - a^2b^2)}$$

ist, so hat man auch

$$t = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(r^2 - a^2b^2)}$$

für einen unendlich fernen Punkt der Bahn wird daher die Zeit auf dieselbe Weise unendlich wie r. Nun soll auch hier eine Relation zwischen φ und w aufgestellt werden. Bekanntlich ist

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{ab} \cos^2\varphi$$

und weil

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{c}{ac} \cos^2\varphi$$

so hat man

$$a\,dw = d\varphi$$

und es ist daher erlaubt

$$a\,w = \varphi$$

anzunehmen. Setzt man diesen Wert von φ in die Gl. für r und t ein, so hat man

$$r = \frac{ab}{\cos aw}, \qquad t = \frac{ab}{c} \,.\, \mathrm{tg}\, a\,w$$

Da nun φ alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ durchlaufen kann, so durchläuft der Winkel w von $-\frac{\pi}{2a}$ an alle reellen Werte bis $\frac{\pi}{2a}$; somit bildet der Leitstrahl r, welcher die unendlich fernen Punkte der Bahn mit dem Ursprunge verbindet, mit der pos. Richtung der x-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2a}$. Da nun

$$a^2 = \frac{A^2 - \mu^2}{A^2} = 1 - \frac{\mu^2}{A^2}$$

ist, und $A > \mu$ angenommen wurde, so ist beständig a kleiner als 1 und somit ist $\frac{\pi}{2a}$ grösser als $\frac{\pi}{2}$. Ist z.B. $a = \frac{1}{2}$, also $1 - \frac{\mu^2}{A^2} = \frac{1}{4}$, somit $\frac{\mu^2}{A^2} = \frac{1}{2} \,.\, \sqrt{3}$, so ist

$$r = \frac{ab}{\cos\frac{w}{2}}; \qquad t = \frac{ab}{c} \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{w}{2}$$

und der radius vector, welcher die unendlich fernen Punkte der Bahn mit dem Ursprunge verbindet, bildet mit der x-Axe den Winkel π. Die Curve läuft somit im Unendlichen mit der x-Axe parallel. Ersetzt man oben in dem Ausdrucke für u den Winkel w durch $(\pi - \alpha)$, wo α sehr klein ist, so lässt sich $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$ durch $\frac{1}{2}\sin\alpha$ ersetzen, und daher ist für solche Curvenpunkte

$$r = \frac{2ab}{\sin\alpha}$$

und weil $r\sin\alpha$ den Abstand von der x-Axe angibt, so läuft die Wegcurve im Unendlichen in der Entfernung $2ab$ mit der x-Axe parallel. Für den Fall $a = \frac{1}{2}$ will ich noch die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten darstellen. Bekanntlich ist

$$x = r\cos w = ab \,.\, \frac{\cos w}{\cos\frac{w}{2}}, \quad y = r\sin w = ab \,.\, \frac{\sin w}{\cos\frac{w}{2}}$$

und es handelt sich darum, aus diesen 2 Gleichungen den Winkel w zu eliminiren. Zu diesem Zwecke ersetze man $\sin w$ durch $2\sin\frac{w}{2}\cdot\cos\frac{w}{2}$ und $\cos w$ durch $\left(1-2\sin^2\frac{w}{2}\right)$ und findet so

$$\sin\frac{w}{2}=\frac{y}{2ab}$$

$$\cos\frac{w}{2}=\frac{ab}{x}\cdot\left(1-\frac{y^2}{2a^2b^2}\right)$$

quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$(x^2+y^2)(4a^2b^2-y^2)=4a^4b^4$$

Um die Wegcurve zu rectificiren, setze man wieder

$$ds^2=dr^2+(r\,dw)^2$$

und ersetze r, dr und dw resp. durch $\frac{ab}{\cos\varphi}$, $\frac{ab\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$ und $\frac{d\varphi}{a}$, um die Länge des Curvenelementes durch die Variable φ auszudrücken. Nach einigen Reductionen findet man

$$ds=b\cdot\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\psi}{\cos^2\varphi}$$

Wenn nun

$$\sin\varphi=S(u)$$

gesetzt, so durchäuft die neue Variable u die Werte von 0 bis K während φ von 0 bis auf $\frac{\pi}{2}$ ansteigt: Da der Punkt $u=K$ für die Integration unzugänglich ist, so setze man

$$s=b\cdot\int_0^u\frac{D^2(u)}{C^2(u)}\,du$$

und dieses Integral ist nach Seite 426

$$s=b\cdot\left(\frac{S(u)\cdot D(u)}{C(u)}-E\,\mathrm{am}\,u+u\right)$$

Der Inhalt des Flächenelementes, welches vom radius vector dt durchlaufen wird, ist bekanntlich gleich $A\,\partial t$, und da

$$A=r^2\frac{\partial w}{\partial t}$$

ist, so lässt sich der Inhalt auch durch $\frac{r^2dw}{2}$ wiedergeben. Ersetzt

man hier r^2 und dw durch die bekannten Functionen in φ, so hat man für den Inhalt des Flächenelementes dS den Ausdruck

$$dS = \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{ab^2}{2} d \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

somit ist

$$S = \frac{ab^2}{2} \cdot \int_0^\varphi d \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab^2}{2} \cdot \operatorname{tg} aw$$

Ersetzt man hier $ab \operatorname{tg} aw$ durch ct, so hat man auch

$$S = \frac{bc}{2} \cdot t$$

Dieses letzte Resultat hätte man auch sofort aus dem Ausdrucke $\frac{A\,dt}{2}$ erhalten, wenn man hier A durch bc ersetzt und von $t = 0$ an integrirt hätte. Ist z. B $a = \frac{1}{2}$, so ist der Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches östlich der y-Axe liegt, gleich $\frac{b^2}{a}$.

2) $B = 0$.

Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes lässt sich hier durch

$$v = \frac{\mu}{r}$$

darstellen. Dieselbe ist daher mit dem Radius umgekehrt proportional und nimmt im Unendlichen den Wert null an. Weil ferner

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{(\mu^2 - A^2)}$$

ist, so scheint es angezeigt, hier die beiden Fälle zu unterscheiden, wo $(\mu^2 - A^2)$ entweder grösser oder gleich null ist.

α) $\mu^2 - A^2 > 0$; $\mu > A$

Setzt man abkürzend

$$\mu^2 - A^2 = a^2$$

so ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{a}{r}, \quad \text{also} \quad dt = \frac{1}{a} \cdot r\,dr$$

Ist dt pos., so muss auch dr pos. sein und mit wachsender Zeit ist somit auch der Radius im Wachsen begriffen. Die Ableitung von

r nach der Zeit verschwindet nur für $r = \infty$ und hier hat somit r sein Maximum erreicht. Da der Mittelpunkt für die Bewegung zugänglich ist, so verlege man auch den Anfangspunkt der Zeit dorthin und setze

$$t = \frac{1}{2a} \cdot r^2$$

Die Zeit, welche der materielle Punkt m braucht, um vom Punkte (r, w) der Bahn nach dem Kraftmittelpunkte zu gelangen, ist somit dem Quadrat des Radius direct proportional. Ferner ist

$$dw = \frac{A}{v^2}\, dt = \frac{A}{a} \cdot \frac{dr}{r}$$

und man erkennt, dass mit wachsendem r auch w im Wachsen begriffen ist. Die Integration obiger Differentialgeichung ergibt nun

$$aw = \log r + \text{Const.}$$

Bezeichnet man hier die willkürliche Constante mit $(-\log p)$, so erhält man

$$r = p \cdot e^{aw}$$

als Gleichung der Wegcurve: Die Bahn ist somit eine log. Spirale. Irgend eine durch den Kraftursprung gezogene Gerade schneide die Windungen der Spirale in den Punkten a_n, a_{n+1}, a_{n+2} etc. etc., deren Radien mit r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, etc. bezeichnet werden sollen. Der Gegenpunkt von a_n sei mit $\mathfrak{a}_n$ bezeichnet und der zugehörige Radius mit $\mathfrak{r}_n$. Wird der zu r_n gehörige Winkel mit $(\pi \cdot 2\pi + \alpha)$ bezeichnet, so entsprechen den Radien r_{n+1}, r_{n+2}, etc. und $\mathfrak{r}_n$, $\mathfrak{r}_{n+1}$, $\mathfrak{r}_{n+2}$, etc. Die Winkel $((n+1) \cdot 2\pi + \alpha)$, $((n+2) \cdot 2\pi + \alpha)$, etc., $((2n+1)\pi + \alpha)$, $((2n+3)\pi + \alpha)$, etc.

Nun ist

$$r_n = p \cdot e^{a(n \cdot 2\pi + \alpha)}$$

$$r_{n+1} = p \cdot e^{a((n+1)2\pi + \alpha)}$$

$$r_{n+2} = p \cdot e^{a((n+2) \cdot 2\pi + \alpha)}$$

und aus diesen Gleichungen ergeben sich sofort die Relationen

$$r_{n+1} = e^{a \cdot 2\pi} \cdot r_n$$

und

$$r_n \cdot r_{n+2} = r_{n+1}^2.$$

Es zeigt sich somit, dass das Verhältniss zweier Radien r_n und r_{n+1} von n und α unabhängig ist und durch eine Constante darge-

$$\beta) \quad \mu^2 - A^2 = 0, \quad \mu = A$$

Da bei dieser Wahl der willkürlichen Elemente der Differentialquotient $\frac{\partial r}{\partial t}$ längs des ganzen Weges verschwindet, und daher r eine von der Zeit unabhängige Constante bezeichnet, so ist die Bahn ein Kreis. Die nähere Betrachtung dieser Bewegung findet sich im ersten Teile meiner Arbeit.

3) $B < 0$

Weil hier B eine negative, reelle Zahl darstellt, so ersetze man B durch $-B_1$, wo dann B_1 pos. aufzufassen ist. Lässt man in der Folge den Accent wieder fallen, so hat man

$$v^2 = \frac{\mu^2}{r^2} - B$$

Sobald nun B einen von 0 verschiedenen pos. Wert hat, so können nach diesem Ausdrucke für die Geschwindigkeit keine unendlich grossen Werte von r in Betracht kommen, und die Wegcurve kann n diesem Falle das Unendliche nicht erreichen. Da im allgemeinen $\frac{\partial r}{\partial t}$ durch eine Quadratwurzel ausgedrückt wird, so ist es erlaubt, dieselbe hier neg. aufzufassen und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{1}{r} \cdot \sqrt{(\mu^2 - A^2) - r^2 B}$$

zu setzen. Die Realität der Bewegung erfordert nun, dass $(\mu^2 - A^2)$ einen pos. Wert habe. Setzt man wieder abkürzend

$$\frac{\mu^2 - A^2}{A^2} = a^2; \quad \frac{B}{A^2} = b^2, \quad B = c^2$$

so folgt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -c \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{r^2} - 1\right)}$$

es ist daher absolut notwendig, dass $\frac{ab}{r}$ längs des ganzen Weges grösser als 1 sei, und diese Bedingung wird nur dann erfüllt, wenn r kleiner als ab ist. Der grösste Wert, den r annehmen kann, ist $\sqrt{\frac{\mu^2 - A^2}{B}}$, und da für diesen Wert die Geschwindigkeit durch $A\sqrt{B}$ dargestellt werden kann, so ist durch die aufgestellte Bedingung für

r auch die Realität von v gesichert. Es ist daher angezeigt, $\frac{ab}{r}$ durch $\cos\varphi$ zu ersetzen und

$$r = \frac{ab}{\cos\varphi}$$

anzunehmen. Zu $r = ab$ gehört $\varphi = 0$ und zu $r = 0$ gehört $\varphi = \infty$. Die neue Variable φ läuft daher von 0 bis ∞. Mittelst dieser Substitution lässt sich nun die Ableitung von r nach der Zeit durch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -c \sin\varphi$$

darstellen und verschwindet nur in $\varphi = 0$, wo also für r ein Minimum vorhanden ist. Im übrigen behält $c \sin\varphi$ längs des ganzen Weges für pos. Werte von φ seinen pos. Wert bei, und daher ist bei wachsender Zeit der radius vector im Abnehmen begriffen.

Daher ist es angezeigt, den Anfang der Zeit in den Punkt $r = ab$ zu verlegen. Ersetzt man in der Gleichung

$$dt = -\frac{dr}{c \sin\varphi}$$

dr durch $\left(-\frac{ab \sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi\right)$, so folgt

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{ab}{c} \cdot d \operatorname{tang}\varphi$$

Wird nun diese Differentialgleichung von $\varphi = 0$ an integrirt, so erhält man

$$t = \frac{ab}{c} \operatorname{tang}\varphi$$

als Ausdruck für die Zeit, welche der Massenpunkt m nötig hat, um vom Punkte (r, φ) der Bahn nach dem Punkte $(r = ab, \varphi = 0)$ zu gelangen. Ferner ist $\frac{ab}{c}$ die Zeit, welche der Körper m braucht, um vom Punkte $r = ab$ an den ganzen spiralfärmigen Weg bis zum Kraftmittelpunkte zu durchlaufen. Wir suchen auch hier eine Relation zwischen der Variabeln φ und dem Winkel w aufzustellen. Bekanntlich ist die doppelte Flächengeschwindigkeit

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

und weil $A = bc$ ist, so hat man

$$dw = bc \cdot \frac{dt}{r^2}$$

Wenn hier dt pos. aufgefasst wird, so muss auch dw pos. sein, und mit wachsender Zeit ist daher auch w im Wachsen begriffen. Ersetzt man dt und r^2 durch die Functionen in φ, so folgt

$$a\,dw = d\varphi$$

also

$$aw = \varphi$$

wenn mit $\varphi = 0$ auch $w = 0$ sein soll. Die Bahn des materiellen Punktes wird daher durch die Gleichung

$$r = \frac{ab}{\operatorname{cos} aw}$$

bestimmt, wo w der Winkel ist, den der Leitstrahl mit der x-Axe bildet. Dieselbe ist daher eine Spirale, welche im Punkte ab der x-Axe beginnt und den Kraftmittelpunkt in immer enger werdenden pos. Windungen umgibt, um in demselben selbst zu endigen. Wenn w pos. sehr gross ist, so darf man $\operatorname{cos} aw$ durch $\frac{1}{2}e^{aw}$ ersetzen und in unmittelbarer Nähe des Ursprunges lässt sich daher die Spirale durch

$$r = 2ab\,e^{-aw}$$

darstellen. Dieselbe hat hier Aehnlichkeit mit einer log. Spirale. Da in unserer Rechnung auch negative Werte von w zulässig sind, so kann der Weg auch durch eine Spirale dargestellt werden, welche vom Punkte ab an den Kraftmittelpunkt in neg. Windungen umgibt. Das Wegelement wird durch die Gleichung

$$ds^2 = dr^2 + (r\,dw)^2$$

bestimmt. Führt man hier an Stelle von r und w die Variable φ ein, so erhält man nach einigen Reductionen die Gleichung

$$ds^2 = \frac{a^2b^2}{\operatorname{cos} \varphi^4} \cdot \left(-1 + \frac{a^2+1}{a^2} \cdot \operatorname{cos}^2\varphi\right) d\varphi^2$$

Setzt man nun abkürzend

$$\frac{a^2}{1+a^2} = k^2$$

und führt mittelst der Substitution

$$\operatorname{cos} \varphi = \frac{1}{S(u)}, \quad \operatorname{sin} \varphi = \frac{C(u)}{S(u)}$$

die Variable u in die Rechnung ein, so hat man, weil

$$-1+\frac{1+a^2}{a^2}\cos^2\varphi = \frac{D^2(w)}{k^2 S^2(u)}; \quad d\varphi = -\frac{D(u)}{S)u)}du$$

ist,

$$ds = \frac{ab}{k} \, . \, D^2(u)\,du$$

ist $\varphi = 0$, so muss $u = K$ sein, und ist $\varphi = \infty$, so ist $u = 0$. Wenn daher die Variable φ von 0 bis zum pos. Unendlichen stetig wächst, so sinkt u fortwährend von dem pos. Werte K auf 0 herab. Um daher die Länge des Weges vom Punkte ($r = 0$, $\varphi = \infty$) bis zu einem beliebigen Punkte (r, φ) der Bahn zu erhalten, integrire man obige Gleichung von $u = 0$ an bis zu einem beliebigen Werte von u. Man erhält so

$$s = \frac{ab}{k} \, . \int_0^u D^2(w)\,du = \frac{ab}{k} \, . \, E \operatorname{am} u$$

Um die Länge des ganzen Weges zu erhalten, ersetze man die obere Grenze des Integrals durch K und findet

$$S = \frac{ab}{k} \, . \, E$$

als Gesamtlänge der Spirale.

Ersetzt man in dem bekannten Ausdrucke $\frac{A\,dt}{2}$ für das Flächenelement die Constante A durch bc und dt durch $\frac{ab}{c} \, . \, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, so hat man

$$dS = \frac{ab^2}{2}\, d \operatorname{tang} \varphi$$

als Inhalt des Sectors, welcher vom Radius in der kleinen Zeit dt durchlaufen wird. Integrirt man diese Gleichung von $\varphi = 0$ an bis in einem beliebigen Werte von φ, so folgt

$$S = \frac{ab^2}{2} \operatorname{tang} \varphi$$

Der Inhalt der Fläche, welche vom Leitstrahle auf seinem ganzen Wege durchlaufen wird, kann daher durch $\frac{ab^2}{2}$ ausgedrückt werden.

b) $K = \frac{nmM}{r^3}$; $f'(r) = \frac{1}{r^3}$; $f(r) = -\frac{1}{2} \, . \, \frac{1}{r^2}$; $g = \frac{nM}{r^3}$

Die Kraft ist hier pos. angenommen, und daher wirkt sie abstossend auf den Massenpunkt m ein. Die Wegcurve wird somit

dem Kraftmittelpunkte die convexe Seite zukehren. Setzt man auch hier wieder abkürzend $\mu^2 = nM$, so ist

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{r^2} + B$$

und es ist daher absolut notwendig, dass B eine von null verschiedene pos. Zahl sei. Dann ist aber r an die Bedingung $r > \frac{\mu}{\sqrt{B}}$ gebunden. Das pos. Unendliche ist daher für r zugänglich. Ferner hat man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\left(B - \frac{\mu^2 + A^2}{r^2}\right)}$$

Setzt man auch hier abkürzend

$$\frac{A^2 + \mu^2}{A^2} = a^2; \quad \frac{A^2}{B} = b^2; \quad B = e^2$$

also

$$A^2 + \mu^2 = a^2 b^2 c^2; \quad A^2 = b^2 c^2$$

so hat man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2}{r^2}\right)}$$

Wenn daher dt pos. aufgefasst wird, so muss auch dr pos. sein, und mit wachsender Zeit ist daher auch r im Wachsen begriffen. Ferner muss r beständig grösser als ab sein, damit $\frac{ab}{r}$ kleiner als 1 ausfalle. Es ist daher angezeigt, $\frac{ab}{r}$ durch $\cos\varphi$ zu ersetzen, also

$$r = \frac{ab}{\cos\varphi}$$

anzunehmen. Da für r auch neg. Werte zulässig sind, so ist im allgemeinen die Variable φ an keine Beschränkung gebunden. Im folgenden habe ich aber diejenige Wegcurve im Auge, welche innerhalb $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ liegt. Mittelst dieser Substitution erhält man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \sin\varphi$$

Weil aber auch

$$dr = \frac{ab \sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

ist, so hat man auch

$$dt = \frac{ab}{e} \cdot d \operatorname{tg}\varphi$$

folglich ist allgemein

$$t = \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{tg} \varphi + \text{Const.}$$

Soll nun aber der Anfang der Zeit im Punkte ($r = ab$, $\varphi = 0$) der Bahn liegen, so muss die Constante gleich null sein, und in diesem Falle darf man

$$t = \frac{ab}{e} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

setzen. Weil ferner

$$dw = A \frac{dt}{r^2}; \quad \frac{dt}{r^2} = \frac{1}{abe} d\varphi$$

ist, so hat man auch

$$a dw = d\varphi$$

somit

$$aw = \varphi$$

Die Gleichung der Wegcurve ist daher

$$r = \frac{ab}{\cos aw} \quad \text{und} \quad t = \frac{ab}{c} \operatorname{tg} aw$$

Die beiden Asymptoten, die zugleich durch den Ursprung gehen, bilden einen Winkel von $\frac{\pi}{a}$, der von der x-Axe halbirt wird. Ferner ist

$$ds^2 = dr^2 + (r\,dw)^2 = \frac{a^4 b^2}{\cos^4 aw} \cdot \left(1 - \frac{(a^2-1)}{a^2} \cos^2 aw\right) dw^2$$

und somit

$$ds = \frac{a^2 b}{\cos^2 aw} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{a^2-1}{a^2} \cdot \operatorname{cor}^2 bw\right)} \cdot dw$$

Da nun hier a beständig grösser als 1 ist, so setze man abkürzend

$$k^2 = \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

und führe mittelst der Substitution

$$\cos aw = S(u)$$

die neue Variable u in die Rechnung ein. Weil dann

$$dw = -\frac{1}{a} D(u)\, du$$

ist, so hat man

$$ds = -ab \cdot \frac{D^2(u)}{S^2(u)} du$$

also

die Grenze der Primzahlen dadurch bestimmen kann, dass man in die Formel $2x^2 + nx + 6$ für x den Betrag $\sqrt{\frac{G}{16}} - 1$ einführt. Es ist also für jede beliebige Grenze G die Anzahl der Primzahlen $< G$ annähernd gleich $\frac{G}{8} + 6\sqrt{\frac{G}{16}} - 2$ G. Speckmann.

3.

Formeln für Primzahlen.

Jede Primzahl > 3 hat die Form $6n \mp 1$, und alle Primzahlen > 3 kommen deshalb in der Zahlenreihe $6n \mp 1$ vor. Die teilbaren Zahlen der Reihe $6n \mp 1$ sind in den Reihen

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & p^2 + 6np \\ 2) & p^2 + 2p + 6np \end{array}\right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n - 1)$$

und

$$\left.\begin{array}{ll} 3) & p^2 + 6np \\ 4) & p^2 + 4p + 6np \end{array}\right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n + 1)$$

vorhanden. Demnach müssen die nach Streichung der teilbaren Zahlen von der Form $6n \mp 1$ übrig bleibenden Primzahlen durch die Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} 5) & p^2 + 6np - 2 \\ 6) & p^2 + 2p + 65p + 2 \end{array}\right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n - 1)$$

und

$$\left.\begin{array}{ll} 7) & p^2 + 6np - 2 \\ 8) & p^2 + 4p + 6np + 2 \end{array}\right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n + 1)$$

dargestellt werden können. Die Primzahlen, welche aus den Formeln 5) und 7) hervorgehen, haben nebenbei auch die Form $6n - 1$, und die Primzahlen, welche aus den Formeln 6) und 8) hervorgehen, die Form $6n + 1$. G. Speckmann.

Litterarischer Bericht
LXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

History of modern mathematics. By David Eugene Smith, Professor of mathematics in Michigan-State Normal School. Reprinted from „Higher mathematics". Published by John Willy and sons, New-York. Chapman and Hall. Limited, London 1896. 70 S.

Das Werk ist eine zeitgemässe und verdienstliche Unternehmung, wie sie wol in gleichem Sinne bisher noch nicht in Angriff genommen worden ist. Es ist charakteristisch für unser Zeitalter, dass die Richtungen der mathematischen Forschung sich immer schneller vervielfältigt haben, indem Zweige der Doctrin immer neue Fragen und Probleme hervorriefen. Hiernach erscheint nun eine übersichtliche Zusammenstellung der gegenwärtigen Forschungsrichtungen als ein immer wachsendes Bedürfniss. Mit gutem Grunde beschränkt sich die vorliegende Bearbeitung auf das Notwendige und beobachtet die grösst mögliche Kürze. Nur die Ketten der Untersuchungen, welche gemeinsames Ziel anstreben, sind es, was aus der Litteratur zugezogen wird. Von jeder solchen Untersuchungsfolge wird der Ursprung nach Autor und Jahrzahl angegeben, auf dessen Schrift in Fussnoten verwiesen, ferner die Abzweigungspunkte, in denen verschiedene Autoren eine Untersuchung von eigentümlicher Seite angegriffen haben, bemerkt, auch der Standpunkt der noch ungelösten Frage aus

Licht gestellt. Dagegen werden alle Beiträge, welche die Frage unverändert bestehen lassen, übergangen und über die Motive der Untersuchungen keine Kritik geübt, mithin kein Unterschied gemacht, ob eine solche durch ein vorhandenes Problem gefordert wird oder nicht, sondern allein als massgebend betrachtet, dass Viele der eröffneten Bahn gefolgt sind. 18 Zweige der Doctrin sind getrennt behandelt. Mechanik sowie alle weitern Anwendungen der Mathematik sind ausgeschlossen. H.

Index operum Leonardi Euleri. Confectus a Joanne G. Hagen s. j. Directore speculae astronomicae Collegii Georgiopolitani Washington D. C. Berlin 1896. Felix L. Dames. 80 S.

Es werden 796 Schriften von Euler, grösstenteils in lateinischer Sprache, auch manche in französischer aufgeführt, und zwar 28 Bücher. Die Gegenstände der Abhandlungen sind: Zerlegung der Zahlen in Summen, Teilbarkeit der Zahlen, diophantische Analysis, imaginäre Grössen, Reihen, besondere Reihen, Brüche, algebraische Gleichungen, elemetare Geometrie , analytische Geometrie, Differentialgeometrie, Differentialrechnung, Integralrechnung, bestimmte Integrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Principien der Mechanik, Probleme der Mechanik, Hydromechanik und Aeromechanik, Maschinen und Reibung, Elasticität, Schall und Musik, Licht und Wärme, optische Instrumente, Magnetismus, sphärische Astronomie, Sonne und Mond, Planeten und Kometen, Wahrscheinlichkeit, Philosophisches. H.

Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. Von A. von Braunmühl. Mit 1 Tafel Nr. 1. Halle 1897. Wilhelm Engelmann in Leipzig. 4⁰. 30 S.

Die vorliegende Schrift, welche auf selbständiger Forschung beruht und manche Unrichtigkeiten enthüllt, behandelt nach einander die Trigonometrie der Griechen, der Inder, der Araber und schliesst mit Johannes Müller Regiomontanus. Lange Zeit bestand die Doctrin aus wenigen Methoden, Sätzen und Formeln, welche zur Lösung astronomischer Aufgaben in Anwendung waren, eine Anwendung die auf Projection beruht, von den Griechen erfunden ist, von denen sie die Babylonier gelernt haben. Regiomantanus war in Europa der erste, welcher die Trigonometrie zuerst zu einer Wissenschaft gestaltet hat. Erst viel später entdeckte man, dass schon 200 Jahr früher ein Perser das vollständige System der Lehren aufgestellt hat. H.

Nassir Eddin Tusi und Regiomontan. Von A. v. Braumühl. Mit 2 Tafeln Nr. II. und III. Halle 1897. Wilh. Engelmann, Leipzig. 4⁰. 37 S.

Nassir Eddin Tusi ist der obengenannte Perser, welcher im 13. Jahrhundert die vollständige Trigonometrie, ebene und sphärische, lehrte. Sein Buch, besprochen von Suter in Bibliotheca Mathematica 1873 p. 1—8, ist, wie die erstere Schrift von Braumühl sagt, den Arabern nicht bekannt gewesen und wird nun mit den Lehren der Araber im einzelnen in Vergleich gestellt. Das Lehrsystem lässt sich daraus nicht entnehmen; nach allem daraus Angeführten ist es kein so einfach gestaltetes wie das heutige. Im zweiten Teile der Schrift wird die Lehre des Regiomontan damit verglichen. H.

F. E. Neumann. Von A. Wangerin. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV. 1894—5. Berlin, Georg Reimer. 15 S.

Franz Ernst Neumann, geboren den 11. September 1798 in Joachimsthal, besuchte von seinem 9ten Jahre an das Werder'sche Gymnasium in Berlin, studirte von 1817 an Theologie in Berlin und Jena, wandte sich 1819 in Berlin den Naturwissenschaften zu, insbesondere der Mineralogie, trieb aber dabei privatim Mathematik, hielt 1823 eine Reihe von Vorlesungen über seine neue Methode der Krystallprojection vor einem ausgewählten Kreise von Zuhörern, promovirte 1826, habilitirte sich an der Universität Königsberg, ward 1828 ausserordentlicher, 1829 ordentlicher Professor daselbst und starb am 23. Mai 1893. Seine ausgedehnte und erfolgreiche Wirksamkeit ist bekannt. Seine wissenschaftliche Productivität ist nur zu verhältnissmässig geringem Teil durch eigene Publication zur Verbreitung gelangt, im übrigen teilte er seine Entdeckungen bloss seinen Zuhörern mit. Gegenwärtig ist es indes von Seiten dieser im Werke, seine Vorlesungen herauszugeben, und sind bis 1895 bereits 7 Bearbeitungen erschienen; beteiligt sind die Herren C. Pape, Von der Mühll, E. Dorn, G. E. Meyer und A. Wangerin.

H.

Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Gustav Wertheim, Professor an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. Zweite, verbesserte Auflage. Braunschweig 1896. Vieweg und Sohn. 68 S.

Elia Misrachi war von 1495 bis 1526 Oberrabiner in Constantinopel, in der ersten Zeit der Türkenherrschaft, wo die Sultane die aus Spanien vertriebenen Juden mit grosser Begünstigung aufnahmen und ihnen hohe Aemter verliehen, und die Juden Handwerke, Künste und Wissenschaften trieben, ein Eifer freilich, der nicht lange gedauert hat. Das in Rede stehende Buch ist eines seiner in hebräischer Sprache verfassten und unter hebräischen Titeln aufgeführten Werke. Es werden einige Quellen, arabische und griechische, genannt, aus denen seine Lehre geschöpft ist. Vor allem ist zu erwähnen, dass er mit indischen Ziffern schreibt und rechnet, die Null anwendet, nebenbei manchmal hebräische Buchstaben statt der 9 Ziffern schreibt, nebenbei auch ausser der sonst zugrunde gelegten Decimalteilung die Sexagesimalteilung zur Approximation benutzt. Dagegen fehlt ihm ganz der Begriff der negativen Zahl; er muss daher immer Fälle unterscheiden. Bei der Addition und Multiplication werden auch die arithmetischen und geometrischen Reihen in Betracht gezogen und summirt. Bei der Potenzrechnung handelt es sich besonders um die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel; das Verfahren ist dem heutigen wesentlich gleich; zur Approximation wird der Radicand mit 10^{2n} multiplicirt. Auf die hiermit abschliessende Lehre von der discreten Zahl folgt nun in der Bedeutung als Rechnung mit stetigen Grössen die rechnende Geometrie und Astronomie, das ist dann nur die Rechnung mit benannten Zahlen. H.

Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus publié d'après le ms. latin 13084 de la bibliothèque royale de Munich par M. Victor Mortet. Avec une introduction de M. Paul Tannery. Tiré des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques. Tome XXXV. 2e partie. Paris 1896. C. Klincksieck. 4°. 44 S.

Die Einleitung von Tannery gibt Auskunft über die Quellen, nämlich lückenhaften Manuscripte aus dem Mittelalter, aus denen Cantor und Curtze den Text der 2 genannten Abhandlungen über Feldmessung und Geometrie zusammengestellt haben. Diesen Quellen fügt nun Mortet ein neues, in der Münchener Bibliothek gefundenes Manuscript hinzu und gibt hier auf 18 Seiten den lateinischen Text. Die eine Abhandlung enthält die Berechnung der Flächeninhalte der einfachsten ebenen Figuren, die andre die der Säulen.

H.

Hermann Grassmann's gesammelte mathematische und phy-

sikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel.

Ersten Bandes erster Theil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Unter Mitwirkung von Eduard Study. Mit einem Bilde Grassmann's in Holzschnitt und 35 Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

I. Band. II. Theil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Leipzig 1896. B. G. Teubner.

Die letztere Ausdehnungslehre unterscheidet sich von der ersteren dadurch, dass Grassmann von vorn herein darauf verzichtet, sein System unabhängig von der Analysis zu entwickeln. Engel bezeichnet dies als einen wesentlichen Fortschritt: erstere stehe auf keiner ganz sichern Grundlage; die Grundbegriffe, von denen Grassmann ausgehe, seien so allgemein und so inhaltslos, dass sie zum Aufbau eines wirklichen Systems nicht genügen, und Grassmann müsse daher, um zu einem solchen Systeme zu gelangen, später stillschweigend in seine Grundbegriffe viel mehr hineinlegen, als die von ihm aufgestellten Erklärungen besagen.

Nun hat aber Grassmann bei erstem Auftreten auf jene Allgemeinheit den grössten Wert gelegt und es als seinen unterscheidenden didaktischen Grundgedanken ausgesprochen: wenn irgend ein Punkt in der mathematischen Doctrin schwer zu verstehen sei, so sei nur der Ausgangspunkt der Doctrin nicht allgemein genug. Hat dann Grassmann in der neuen Bearbeitung diesen Grundgedanken fallen lassen, und Engel denselben verworfen, d. h. nicht als unwesentlich beseitigt, sondern es wirklich einen Fortschritt genannt, dass er aufgegeben sei, so kann man doch gewiss nicht umhin zu fragen: Was ist dann die unterscheidende Basis von Grassmanns Lehre?

Darüber sagt Engel absolut nichts. Alles, was er sagt, ruft dieselbe Frage hervor. Ein Fortschritt setzt doch ein Ziel oder wenigstens eine Richtung voraus. Die Behauptung, dass die neue Lehre einwandfrei sei, ist gerade hier besonders zweideutig, denn gegen Inhaltsloses kann man nicht streiten. In der neuen Bearbei tung hat der Herausgeber viele Unrichtigkeiten gefunden und in gegenwärtiger Ausgabe berichtigt. Er erklärt die Irrtümer für un-

wentlich. Auch hier muss man fragen: Was ist dann des Wesentliche von der Lehre? Er bemerkt, dass die Ausdehnungslehre selbst in der verbesserten Gestalt noch bei Wenigen Anerkennung gefunden habe, und sorgt zwar für Verbreitung und Zugänglichkeit des Buches, aber mit keinem Worte dafür, ihre Stellung und Leistung in der Wissenschaft zu documentiren, trotz der 50jährigen Erfahrung, dass ihr Vorhandensein allein nicht dazu geführt hat.

Der 2. Teil hat die Abschnitte: die wichtigsten Verknüpfungen extensiver Grössen; Functionslehre; Grassmann's Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem. Der erste enthält die 5 Capitel: Addition, Subtraction, Vervielfachung und Teilung extensiver Grössen; die Productbildung im allgemeinen; combinatorisches Product; inneres Product; Anwendungen auf die Geometrie — der zweite die 4 Capitel: Functionen im allgemeinen; Differentialrechnung; unendliche Reihen; Integralrechnung. H.

Methode und Principien.

Kritik der Formel der Newton'schen Gravitations-Theorie. Von A. Sinram. Hamburg 1896. Lucas Gräfe u. Sillem. 44 S.

Die Schrift ist ein neuer Versuch die bestehende Himmelsmechanik zu stürzen. Dies wird hier auf rhetorischem Wege in Angriff genommen, anders lässt sich das Verfahren wol kaum bezeichnen: es ist fern von aller wissenschaftlichen Logik; so viel Schlüsse vorkommen, sind die Argumente so voreilig und unzureichend als möglich.

Hoppe.

Démonstration de l'axiome XI. d'Euclide. Par Michel Frolov, Membre de la Société Mathématiques de France. Deuxième édition. Genève 1896. W. Kundig et fils. 22 S.

Der Fehler des Beweises ist kein verborgener. Der Verfasser ist durch seine Figur, nämlich die zu Theorem C, getäuscht; welche nur unter Voraussetzung der zu beweisenden Thesis die der Behauptung entsprechende Lage der gezeichneten Lote darbietet. Da dieses Theorem im Grunde mit den Parallelensatze identisch ist, so konnte man gewiss sein, den Fehlschluss darin zu finden.

Hoppe.

Der Festpunkt des Denkens. Von H. Gimler. Lissa i. P. 1896. Friedrich Ebbecke. 22 S.

Die Schrift besteht aus 46 Urteilen über Lebewesen, Tätigkeit, Gleichgewicht, Ganzes und Teile, Verständigung, Ausdehnung und Zusammenziehung, Druck, Intensität, Verhältnisse, Wahrheiten, einzeln nebst sogenanntem Beweis und Bestätigung, zumteil selbstverständlich, zumteil unklar, und schliesst mit dem Satze: Die Anordnung der Lebewesen bildet den Festpunkt des Denkens.

Hoppe.

Ein Deutsches Testament. Die Natur als Organismus. Von Hugo Astl-Leonhard. Wien 1897. Selbstverlag. 262 S.

Der erste Titel soll dem Gesamtwerk gelten, der zweite dem jetzt erschienenen 1. Teile, dem noch 2 andere folgen sollen. Der 1. Teil besteht wieder aus 3 „Büchern" mit den Ueberschriften: Das antike und moderne Wissen und die Erkenntnisssätze der Wirklichkeit; die Materie und ihre Reiche, ihre Entwickelung als Spannung und Entladung; der Mensch und sein Geistesleben. Es wird viel Gelehrsamkeit vorgetragen, doch eine fortschreitende Entwickelung lässt sich darin nicht entdecken. Die Lösung der philosophischen Fragen, von der der Verfasser sagt, dass sie sich ihm ohne Zwang und ohne Speculation ergab, denkt er sich sehr leicht: er stellt eine Formel auf, damit ist's getan; ob sie klar ist, kümmert ihn nicht; jedenfalls kann man damit nichts anfangen. Hoppe.

Das Beharrungsgesetz. Von Paul Johannesson. Berlin 1896. R. Gaertner (Hermann Heyfelder). 4°. 26 S. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Ostern 1896.

Die 5 Teile der Schrift sind: Die Form, der Inhalt des Beharrungsgesetzes. Die Irrtumquelle desselben. Welchen Wert hatte es? Seine Wahrheit in neuer Form. Gleich im Anfang ist es höchst brav gesprochen, wo der Verfasser sagt: Es ist erklärlich, wenn Newton als Schöpfer der Himmelsmechanik, im Ausdruck fehlend, der Beharrung eine Kraft, ein Vermögen unterlegt; aber darüber muss man sich wundern, dass noch heutzutage viele Schulbücher denselben Irrtum lehren. Charakteristisch für den Gedankengang in vorliegender Schrift ist es nun, dass sie ihren Gegenstand nicht direct nach eigenem Urteil auffasst, sondern Begriff und Theorie als

heutzutage geltende den Ansichten von Schriftstellern entnimmt, genannt sind: Lodge, C. Neumann, Mach, L. Weber, Streintz — und über diese Kritik übt. Dadurch wird die an sich einfache Untersuchung sehr in die Länge gezogen, fremde und trennbare Fragen mit eingemischt und immer grössere Verwickelungen geschaffen. Doch hat dieser Weg wenigstens die gute Folge gehabt, dass der Verfasser dadurch zu gesteigerter Gründlichkeit genötigt ward, demgemäss auch richtiger urteilte, als es gewöhnlich geschieht, und im Verlaufe immer verständlicher sprach Es handelt sich hier namentlich um die Natur menschlicher Erkenntniss und um die Relativität der Raumbestimmung und Bewegung. In Betreff der Erkenntniss ist, wenn auch nur zumteil ausgesprochen, dem Verfasser doch gewiss nicht fremd, dass sie in der Unterwerfung der Tatsachen unter die Herrschaft des Geistes besteht, und ihre Mittel, nämlich Begriffe, Vorstellungsweisen und Theorien, nach freier Wahl vom Menschen erzeugt werden. Dagegen zeigt sich der Verfasser zu wenig orientirt, indem er ohne weiteres diese Freiheit für gleichbedeutend mit Willkür hält. Nur die überflüssige Stoffanhäufung macht es erklärlich, dass er hier über dem Mittel den Zweck vergisst und es nicht beachtet, dass uns die Freiheit dazu dient und dienen soll, den grösst möglichen Gewinn an Erkenntniss zu ziehen. Dies zeigt sich in Betreff der Relativität der Bewegung und macht hier die vorher gründliche Logik wieder zunichte. Alle räumlichen Bestimmungen, sowol von Orten als von Bewegungen, sind anfänglich relativ. Sie zu absoluten zu machen, ist notwendige Bedingung der Erkenntniss, namentlich der Dynamik. Es hätte sehr zur Klarstellung gedient, wenn der Verfasser diesen Umstand in voller Allgemeinheit ausgesprochen hätte. Im Einzelnen findet er freilich Anlass auf ihn einzugehen; schon Newton erkannte das empirische Kriterium der Drehbewegung; der Verfasser aber hält dasselbe für illusorisch, weil wir kein Kriterium der geradlinigen Bewegung besitzen, und ist sehr schnell mit der Behauptung fertig, dass alle räumliche Bestimmung auf Vereinbarung beruhe, ohne sich nach den notwendigen Forderungen der einzelnen Theorien umzusehen. Zieht man diese allseitig in Betracht; so bleibt der freien Vereinbarung nur wenig (z. B. Längen- und Zeiteinheit, erster Erdmeridian etc.) übrig. Dass jedenfalls die Drehbewegung (fühlbar für den Menschen und unentbehrlich für die Dynamik, namentlich für die Theorie der Centralbewegung) nicht zu den der Vereinbarung unterliegenden Bestimmungen gehört, sondern nur ihre Epoche, d. i. die momentane Stellung, ist offenbar. Der Verfasser leugnet es, wol nur aus einem gewissen horror exceptionis. Andrerseits ist auch die Vereinbarung nicht immer ausreichend, das Relative absolut zu fixiren. Von den 3 Raumanordnungen, der skopocentrischen, geocentrischen, heliocen-

trischen kann keine die andern ersetzen, somit vermag es auch keine Vereinbarung; überall sind es scientive Gesichtspunkte, welche die Wahl der Axenkreuze bestimmen. Der Verfasser führt 3 vorauszusetzende Begriffe auf, welche erst durch Vereinbarung zu bestimmen seien, bevor man ein Beharrungsgesetz lehren könne: die geradlinige, die gleichmässige Bewegung und die Masse. Dies ist insofern unrichtig, als diese Begriffe bis auf die Masseinheiten, die hier gleichgültig sind, als Grundlagen von Theorien nicht abgeändert werden können, ohne wenigstens deren Einfachheit preiszugeben. Hierbei zu verweilen haben wir keinen Grund, es ist alles nur ein Abschweif, auf den der Verfasser durch sein historisches Verfahren gelenkt worden ist. Seine anfängliche, oben erwähnte, Aeusserung liess erwarten, dass er nicht daran denken würde, dem sogenannten Beharrungsgesetz einen positiven Inhalt zuzuschreiben. Die Schrift schliesst mit der Frage, ob der Unterricht in der Mechanik von ihren Ergebnissen berührt werde. Eine definitive Formulirung des Beharrungsgesetzes gemäss diesen Ergebnissen wird nicht aufgestellt, es können wol nur die 3 genannten Bedingungen mit den Ergebnissen gemeint sein; was aber dann in der Ueberschrift die „neue Form" des Satzes bedeuten soll, ist schwer zu erraten. Dies gibt uns Anlass auf den Anfang der Schrift zurückzugehen und von dem zu sprechen, was sie im weiteren zu sagen versäumt Es wird gerügt, dass viele Lehrer und Schriftsteller eine Kraft aller Körper, in ihrer Bewegung zu beharren, statuiren, d. h. offenbar: einen Grund dafür bedürfen, dass etwas sich nicht ohne Grund ändert. So angesehen erscheint allerdings das Beharrungsgesetz als eine ganz überflüssige Lehre. Indessen, um es so anzusehen, muss doch ein Wissen vorausgehen, das dem Unkundigen fremd sein wird, das also die Schule zu verleihen verpflichtet ist: der Schüler muss erst lernen die Bewegung als jenes Etwas aufzufassen, welches dem Körper in jedem Augenblicke bestimmend zukommt und sich nicht ohne Grund ändern kann. Der zu lernende Grundsatz der Dynamik lautet: Momentaner Ort und momentane Bewegung bestimmen den momentanen Zustand jedes Punktes eines Körpers. Ein Lehrer, der ihn zu umgehen sucht, umgeht damit das Verständniss der Dynamik. Wer ihn kennt, dem ist der sogen. Beharrungssatz selbstverständlich und überflüssig. Ihn Anfängern deutlich zu machen, bedarf es keiner höhern Doctrin, sondern nur eine Auswahl nahe liegender Beispiele In vorliegender Schrift steht er nicht, und das eben ist der fehlende Punkt in der ganzen Behandlung des Gegenstandes. Hoppe.

Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wir-

kungen. Von Dr. C. Neumann, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig. Geheimer Hofrath, Ordentliches Mitglied der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Auswärtiges Mitglied der Kgl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen. Correspondirendes Mitglied der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, des Instituto Lombardo und Akademie zu Bologna. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 292 S.

Es möge genügen den Inhalt der 9 Capitel anzugeben. Einleitende Untersuchungen. Aus der Vorstellung des elektrischen Gleichgewichts entspringende Schlussfolgerungen. Nähere Bestimmung des Exponentialgesetzes. Ueber die Entwickelung des Exponentialgesetzes nach Kugelfunctionen. Anwendung des eingliedrigen Exponentialgesetzes auf die Theorie der Gravitation und auf die Theorie der Elektrostatik. Allgemeine Untersuchungen über die mehrgliedrigen Exponentialgesetze. Ueber das Green'sche Gesetz. Ueber das Hamilton'sche Princip und das effective Potential. Ueber die Integration der Differentialgleichung: $\Delta\psi = \sigma^2\psi$ unter Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels. H.

Naturphilosophie als exacte Wissenschaft. Mit besonderer Berücksichtigung der mathematischen Physik. Von C. Schmitz-Dumont. Mit vier Figurentafeln. Leipzig 1895. Duncker u. Humblot. 494 S.

An der Schrift ist anzuerkennen, dass sie an keiner Autorität haftet, um von ihr Recht und Ansehen zu borgen, sondern an den Ansichten der Gelehrten wie an den invteerirten der Menge unparteiisch die Schwächen enthüllt. Dies verbunden mit einer geschickten, und nicht sophistischen, sondern auf Klarheit gerichteten Handhabung der Sprache vermag im Anfang die besten Hoffnungen auf befriedigende Lösung ihrer Aufgabe zu erwecken. Eigentümlich an ihr ist, dass alle Auseinandersetzungen auf Antithesen gebaut werden; eine Antithese ist dem Verfasser notwendig für jedes Urteil, und wenn er eine solche aufgegriffen hat, mag sie auch bloss auf oberflächlichem Eindruck seiner Lecture beruhen, so erscheint sie ihm als hinreichende Rechtfertigung seiner Behauptungen statt aller Begründung. Der erste Fall dieser Art bezieht sich auf die historische Philosophie der Neuzeit und ist bestimmend für die Richtung der vorliegenden Arbeit. Der Verfasser nennt die speculative Philosophie und den Materialismus die Pole der Philosophie, gleichsam ihren Geist und Leib. Alle aufgetretenen Fehler, Mängel, Verirrungen und alles Mislingen sei nur Folge ihrer Einseitigkeit; die Natur-

philosophie, wie er das Wort verstehe, müsse beide als einander notwendige Gegensätze in sich vereinigen. Diese Vereinigung ist's, was er sich zur Aufgabe macht. Die Abschnitte des Buchs sind betitelt: Topik der Begriffe. Philosophie der mathematischen Wissenschaften. Physikalische Erklärung durch Hypothesen. Logischer Aufbau der Physik. Die Aussenwelt. Die Innenwelt. Körper und Geist. Die Reihenfolge der Themata ist für die Beurteilung bedeutungslos. Was zunächst den obigen zu vereinigenden Gegensatz von speculativer Philosophie und Materialismus betrifft, so ist zweierlei an der Aufstellung zu vermissen. Erstens werden beide jedes als Ganzes betrachtet, ohne doch das Specifische zu nennen, was sie zum Ganzen macht. Die Geschichte bietet zwei Reihen verschiedenartiger Erscheinungen dar, zwischen denen man mancherlei Gegensätze finden kann. Unter diesen hat der Verfasser nicht gerade das Beste, sondern vorzugsweise Ausartungen gewählt, um es anzuführen. Da er beide Arten acceptirt und aufrecht halten will, so lag es ihm als Philosophen doch gewiss ob, über die zwei entgegengesetzten Grundgedanken jener Erscheinungen, welche er im Sinne hat, keinen Zweifel bestehen zu lassen. Zweitens ist auch nichts darüber gesagt, in welchem Sinne der Verfasser beide Arten von Philosophie zu vereinigen denkt. Das factische Zuwerkegehen lässt nur eine Halbheit nach beiden Seiten hin erkennen. Von den schlimmsten Vorurteilen der speculativen Philosopie, die längst durch die Geschichte gerichtet sind, hat er sich noch nicht frei gemacht. Er hängt noch immer an der Meinung fest, dieselbe sei berufen und notwendig dazu der materiellen Forschung voranzuleuchten und sie vor Verirrungen zu bewahren und verfolgt noch immer die Chimäre des absoluten Wissens, sieht demgemäss die Hypothese für einen Notbehelf an. Auf diesem Standpunkte bleibt natürlich die Bedeutung inductiver Forschung unverstanden, und so erscheint ein grosser Teil des Buches, nämlich die 3 Abschnitte über Mathematik und Physik, als Gedanken eines Laien beim Lesen gelehrter Schriften. Sehen wir aber von den Urteilen über die auf festen Principien ruhenden Wissenschaften ab, so bieten die übrigen 4 Abschnitte Vieles von hinreichendem Werte dar um Interesse zu erwecken. Die psychische Genesis wird ein wenig gründlicher beobachtet, als es gewöhnlich geschieht; der restirende Mangel in dieser Hinsicht mag vielleicht zum weitern Fortschritt die Anregung geben. So ist z. B. die Willensfreiheit, welche heutzutage Viele trotz dem Bewusstsein aus Vorurteilen leugnen, anerkannt und als Beweis die Fähigkeit der Negation in Idee und Handlung (in der Tat das deutlichste Indicium) aufstellt. Dagegen beschränkt sich die psychische Beobachtung des Verfassers stets dahin, dass er in einem Dualismus Halt macht, der sich bei mehr Gründlichkeit bald lösen würde. Die Aussenwelt erscheint ihm

noch als ursprünglich gegeben im Gegensatz zum Ich. Das Ich hält er nur für möglich im Gegensatz zur andern Person u. s. w. alles wahrscheinlich nur, weil für seine Logik die Antithese unentbehrlich ist, und er deren Verlust schon im voraus fürchtet.

Hoppe.

Logische Uebungen. Von Karl Strecker, Doctor der Philosophie. 1. Heft. Der Anfang der Geometrie als logisches Uebungsmaterial, zugleich als Hilfsmittel für den mathematischen Unterricht. Essen 1896. G. D. Baedeker. 61 S.

Es wird erst die einfachste Form der Schlüsse erklärt, dann eine Reihe elementarer Lehrsätze und Aufgaben über Winkel und Dreiecke ausgeführt, deren Beweise die leichtesten Anwendungen des gezeigten Schlussverfahrens darstellen. H.

Litterarischer Bericht
LXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

The works of Archimeds. Edited in modern notation with introductory chapters by T. L. Heath, Sc. D. some time Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. University press. London. C. J. Clay. Leipzig, F. A. Brockhaus. 186 + 325 S.

Dies Buch enthält einleitend in vielseitigst umfassender kritischer Behandlung über Archimedes, sein Leben, seine Geistesrichtung und seine Werke, alles, was sich aus vorhandenen Daten ermitteln lässt, dann die englische Uebersetzung seiner erhaltenen Schriften. In gleicher Weise hat der Verfasser die Werke von Apollonius behandelt und bereits herausgegeben. Dem Urteil von Chasles folgend findet er in beiden den in der Neuzeit bedeutungsvollen, hier schon im Altertum hervortretenden Gegensatz, dass Apollonius seine Forschung auf die Geometrie der Form und Lage, Archimedes auf die Geometrie des Masses richtet. Die Einleitung gibt zuerst Notizen aus dem Leben — geboren 287 gestorben 213 v. Chr. in Syrakus, Sohn des Astronomen Pheidias. Eine beträchtliche Zeit verlebte er in Alexandria. Ausser Geometrie und Arithmetik trieb Archimedes auch Mechanik, aber nicht sowol in wissenschaftlichem Streben, sondern zu vorliegenden technischen Zwecken. — Ferner berichtet die Einleitung über Manuscripte, Hauptausgaben, verlorene Werke u. a. ferner über die Beziehungen des Archimedes zu seinen Vor-

Methode und Principien.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. Von Dr. Ludwig Goldschmidt, mathematischem Revisor der Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha. Hamburg und Leipzig 1897. Leopold Voss. 279 S.

Der Titel des Buchs lässt erwarten, dass es sich zur ersten und Hauptaufgabe machen würde, die unter der Praxis und vielteiligen Anwendung aufgenommenen, dunkel gebliebenen Elemente der Theorie einmal sorgfältig auf feste Begriffe zu reduciren. Das gegenteilige Streben findet man hier durchweg betätigt. Mit wol hundertmal so vielen Worten, als hingereicht hätten, die Sache klar zu stellen, beständig abschweifend und ohne sichtliche Beziehung zum Gegenstande, wird auf den Eindruck hingearbeitet, dass es sich um eine schwierige, streitige, der Logik fremde Sache handele. Alle exacte Aussage wird mit Fleiss gemieden, alles, wonach man des Verständnisses wegen fragen muss, verschwiegen. Das Inhaltsverzeichniss lautet: Einleitung. Die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die gleich wahrscheinlichen Fälle. Das Gesetz der grossen Zahlen; die logische Theorie und dieses Gesetz. Die Bayessche Regel. Der Bernoulli'sche Satz und diese Regel. Schlussbetrachtungen. Im Vorwort nennt der Verfasser einige Autoren in Beziehung zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Kant, Kries Lotze, v. Kries, und erklärt sich für oder wider deren Ansichten, ohne von letzeren ein Wort zu sagen, ebenso gibt er an, dass Jakob Bernoulli das Gesetz der grossen Zahlen bewiesen habe; aber in dem 63 Seiten langen Artikel sucht man vergeblich nach einer Aufstellung dieses Gesetzes; ob irgendwo ein vermeintlicher Beweis steht, entdeckt vielleicht noch jemand. Die ganze Abfassung charakterisirt sich durch eine heutzutage ungewöhnliche Ueberschätzung der formalen Logik. Zwar erkennt der Verfasser an, dass sie unzureichend sei; doch meint er nur das Reich der Gefühle mit dem, was sie nicht beherrsche. Es ist aber überhaupt die neue Wissenschaft und Forschung, in der sie bereits bedeutungslos geworden ist. In so fern ist es wol begreiflich, dass die Versation im engen Gebiete formaler Logik gegen sachliche Erfordernisse blind macht, dass also, was oben als Tendenz ausgelegt ward, sich vielleicht durch zu grosse Bevorzugung formaler Logik erklären mag.

Hoppe.

Der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie. Von Dr. K. Traub, Prof. a. D. Lahr 1896. Moritz Schauenburg. 12 S.

Der Verfasser findet, dass der pythagoräische Lehrsatz in einigen Formen ausgesprochen sich gleichlautend auf sphärische und absolute Geometrie übertragen lässt, und hofft durch gegenwärtige Mitteilung Manchen für das Studium der absoluten Geometrie zu gewinnen.

H.

Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Von Dr. Leo Koenigsberger, Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg. Mit einem Bildniss Hermann von Helmholtz's. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 58 S.

Die in vorliegender Rede enthaltenen Untersuchungen gelten nicht allein den bewährten und daher, woran niemand zweifelt, ewig dauernden Grundlagen jener Wissenschaften, sondern zu noch grösserem Teile den problematischen Grundlagen einiger Zweige derselben, von deren definitiver Feststellung wir gegenwärtig noch weit entfernt sind. In Betreff der erstern ist zu betonen, dass das gesamte Zuwerkegehen vollkommene Freiheit bekundet von den Kant'schen Vorurteilen des absoluten Apriori, des Transscendentalen und der Metaphysik. Die gänzliche Lossagung würde noch entschiedener an den Tag treten, wenn Helmholtz nicht, statt einer nutzlosen Bekämpfung, es klugerweise stets vorgezogen hätte, in respectvoller Ferne an solchen Lehren vorüberzugehen. Wäre die Herrschaft und Präoccupation Kant'scher Irrlehren nicht selbst jetzt noch so gross und verbreitet, so würde man die Forschungswege von Helmholtz nicht sowol für originell, sondern vielmehr für natürlich halten und nicht auf Priorität Gewicht legen wollen in Ideen, mit denen man längst vertraut war, wenn man sie auch nicht mit gleichem Erfolge verkündigt hatte. Dies hat erweiternde Anwendung auf ein Urteil von Koenigsberger. Ihm zufolge untersuchte Helmholtz nicht mathematische Probleme um ihrer selbst willen mit Anwendung auf die Naturwissenschaften; er holte sie sich vielmehr aus der Beobachtung der Natur zu dem Zwecke, die Probleme der Natur mathematisch zu formuliren. Im Gegenwärtigen aber handelt es sich nicht um mathematische Probleme, sondern um philosophische Fragen der psychischen Genesis des Erkennens. In diesen heisst es, nahm er ein unmittelbares Interesse. Auch hier ist es die Freiheit von Vorurteilen, was von Vielen der Originalität der Entdeckung zugerechnet wird. Zunächst ist es nicht neu, sondern in der Forderung Bako's alle Begriffe zu ihrer scientiven Gültigkeit durch Erfahrung zu begründen enthalten, dass man den Ursprung der Grundbegriffe der Mathematik und Mechanik, in Betreff des Raumes, der Zeit und der

Masse in der Erfahrung gesucht hat. Unterbrochen und beiseite geschoben durch Kant's unwissenschaftliche, aber populäre Lehre vom Apriori ward dann die Untersuchung wieder aufgenommen von Riemann, welcher die unterschiedlichen empirischen Elemente des Raumbegriffs ermittelte. Für ihn war das Problem ein mathematisch logisches. Für Helmholtz war die Aufgabe vorbehalten den exacten Nachweis der Erfahrung durch präcise Experimente zu geben. Der Anfang und das unmittelbare Interesse seiner Tätigkeit war daher auf Beobachtung der Sinnesorgane und ihrer Functionen gerichtet. Diese physiologische Untersuchung eröffnete ihm die Bahn zur Lösung der psychologischen Aufgabe, die Construction des dreifach orthogonalen, homogenen, unendlichen, translocabeln und drehbaren Raumsystems und des Congruenzbegriffs von Seiten des erkennenden Geistes zum Bewusstsein zu führen und die Axiome der Geometrie in Betreff der Geraden, der Ebene, der Parallelen empirisch zu begründen, d. h. auf rein gegebene Tatsachen zurückzuführen. Die Lösung mag unvollendet, zum Teil bestreitbar sein, immer ist doch Helmholtz der erste, der sie ernstlich, mit Bewusstsein der Erfordernisse in Angriff genommen hat. So gilt denn Koenigsberger's charakteristische Bemerkung nicht allein von mathematischen Problemen, sondern auch von einer philosophischen Frage von didaktisch pädagogischer Bedeutung für den mathematischen Schulunterricht. — In der Mechanik handelt es sich um das Princip der summarisch. unveränderlichen lebendigen Kraft, anticipirt von Cartesius in voller Allgemeinheit für die gesamten Naturvorgänge, wiewol bei problematisch bleibendem Wesen, begrifflich exact aufgestellt von Leibniz, nach Ergänzung durch das Potential als Magazin der lebendigen Kraft für Bewegung fester Körper (und deren Atome) durch bewiesenen Lehrsatz bestimmt von Huygens, ausgedehnt auf die Wärme von Robert Mayer. Die Existenz dieses in allen Naturvorgängen herrschenden Gesetzes ist also kein Gedanke der Neuzeit. Uebrig blieb und bleibt die Entdeckung und der Nachweis des unveränderlichen Elements in der Hydrodynamik, der Aerodynamik, der Elektricität, des Magnetismus und dem Lichte. Was Helmholtz für diese Aufgabe geleistet hat, wird im übrigen Teile der Rede dargelegt. H.

Die Zahl und das Unendlichkleine. Von Dr. Karl Goebel-Soest. Leipzig 1896. Gustav Fock. 47 S.

Der Titel nennt den Gegenstand, über den der Verfasser sich äussern will; was er zu geben gedenkt, sagt der Titel nicht. Die

Anfangsworte der Schrift scheinen die Absicht zu verraten ihn nicht erklären, sondern in mystisches Dunkel hüllen zu wollen. Doch fern von aller täuschenden Kunst setzt sie auseinander, was keinem Rechner unbekannt ist, ohne je die Punkte zu berühren, welche zu principiellen Untersuchungen Anlass geben. Die ganze hinzugefügte Logik besteht im Gegensatz des Allgemeinen und Besondern. Das Motiv der Schrift ist also aus ihr so wenig wie aus dem Titel zu ersehen. Zu erwähnen sind einige historische Angaben betreffend Galilei, Fermat und Newton. Hoppe.

Kritik der exacten Forschung. Von Friedrich Ego. Gedruckt auf Kosten des Verfassers. Leiden 1897. E. J. Hrill. 81 S.

Kritik ist im ganzen Buche nicht zu finden; die eigentümlichen Meinungen des Verfassers werden stets imperatorisch ausgesprochen und nirgends ein Versuch gemacht sie dem Leser überzeugend darzutun. Auch wird dies Verhalten gar nicht verhehlt; denn gleich im Anfang erklärt der Verfasser das Gemüt für den Grund aller Erkenntniss und Richter über dieselbe und äussert sich geringschätzig über die Objectivität des Urteils. Für richtig gilt ihm, was dem Ego zusagt, der stets im Namen aller urteilt. Da nun die Schrift nur beliebige Stücke aus Doctrinen bespricht, die für sich weder instructiv noch anziehend sind, so dürfen wir sie wol für ganz unschädlich halten, nur berechnet auf das Gemüt des Ego als einzigen Lesers. Hoppe.

Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. Par G. Burali Forti, Professeur à l'Académie militaire de Turin. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils. 165 S.

„Das Buch enthält eine kurze Darlegung des geometrischen Calculs nebst mehreren Anwendungen auf die elementare differentielle Geometrie. Der geometrische Calcul ist 1679 erfunden von Leibniz, dem ersten, der es für bequem oder notwendig hielt, direct auf die geometrischen Elemente zu operiren, während die analytische Geometrie auf Zahlen operirt, die eine indirecte Beziehung zu den repräsentirten Elementen haben.“ Die Gegenstände sind: die geometrischen Formen, nämlich Definitionen und Regeln des Calculs, Vectoren und ihre Producte, Reduction der Formen, regressive Producte, Coordinaten; variable Formen, nämlich Derivirte, Linien und Enveloppen, Regelflächen, Fresnel'schen Formeln; Anwendungen, nämlich Helix, Regelflächen bezüglich auf eine Curve, orthogonale Trajectorien. H.

An essay on the foundations of geometry. By Bertrand A. W. Russell. M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. University press. 201 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende. Einleitung, unser Problem definirt durch seine Beziehungen zur Logik, Psychologie und Mathematik. Geschichte der Metageometrie. Kritischer Bericht über einige der Geometrie vorausgehende philosophische Theorien. Die Axiome der projectiven Geometrie, die der metrischen Geometrie, die der Freibeweglichkeit. das Axiom der Dimensionen, das der Entfernung. Philosophische Consequenzen Der Verfasser ist Anhänger von Kant, dem gegenüber er wenig eigenes Urteil darbietet. Er lässt es oft bei kurzer Formulirung bewenden, wo eingehende Erörterung erwartet werden durfte. H.

Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. Herausgegeben von A. Pringsheim. Leipzig 1896. Duncker u. Humblot. 60 S.

Daniel Bernoulli, Sohn des Professors der Mathematik Johann Bernoulli, geboren 1700 in Gröningen, ward 1725 Professor in Petersburg, 1733 Professor in Basel, zunächst für Anatomie und Botanik, später auch für Physik, und starb 1782. Die von ihm verfasste, 1738 von der Petersburger Akademie herausgegebene Abhandlung, von welcher hier die Rede ist, hat den Titel: Specimen theoriae novae de mensura sortis, auctore Daniele Bernoulli. Von ihr wird im Vorliegenden eine deutsche Uebersetzung gegeben. Voraus geht eine Einleitung, unterschrieben: Ludwig Fick. Hauptsächlich in letzterer tritt besonders deutlich und auffällig der verhängnissvolle Fehler der Forschung hervor, dass man nach Lösung von Fragen sucht ehe man die Fragen verstanden hat. Seit Jahrhunderten ist die richtige Wertschätzung in Frage, und bis heute hält man es für zu umständlich, und Fick denkt gar nicht daran, die Bedeutungen des Wortes aus den verschiedenartigen Bedürfnissen seiner Anwendung herzuleiten. Er betrachtet noch immer das Wort als Vertreter eines, wenn auch besserungsbedürftigen Begriffs und die Zuziehung zu berücksichtigender Umstände als Fortschritt und Berichtigung. In der Tat besitzen wir auf gegenwärtigem Standpunkt erst eine Vielheit von Begriffen des Wertes gültig für die respectiven in's Auge gefassten Fälle, deren manche sich vielleicht nachweisbar vereinigen lassen. Fick sieht in Bernoulli's Schrift einen epochemachenden

Fortschritt der Theorie des Wertes über die bisherige, welche auf objectiver Grundlage ruht. Bernoulli selbst legt nur Gewicht darauf, dass seine Theorie neu ist. Neu ist sie durch die Annahme, dass Jeder seinen Gewinn und Verlust nach dessen Quotienten durch sein Vermögen schätzt (nach gleichem Princip, wie später Fechner die Grenze der Empfindbarkeit von Sinnesreizen als den Quotienten des Unterschiedes durch den gesamten Reiz mit Experimenten nachwies). Aber ein Fortschritt der Theorie ist aus der Zuziehung eines subjectiven Elements nicht ersichtlich: es sind eben nur andre Fälle in Betracht gezogen, auf welche der neue Begriff des Wertes passt (sei es dass man fragt, ob oder bei wieviel Einsatz man auf ein gebotenes Spiel eingehen will, oder dass man mit der Spielregel Gimpel zu fangen gedenkt u. s. w.) Auf die Fehler, welchen dadurch Raum gegeben wird, dass man Bernoulli's Hypothese allgemein, mithin auch an unpassender Stelle, wo die Frage mit subjectiver Schätzung nichts zu tun hat, anwendet, wollen wir nicht eingehen, sondern nur einen von Bernoulli selbst begangenen Fehler erwähnen, der an einem Beispiel das Ungenügende der alten Theorie zeigen will. Er lässt wiederholt ein Geldstück werfen, so dass 2 Fälle gleich möglich sind; nach jedem Wurfe soll sich der Preis für den glücklichen Wurf von a an verdoppeln; mit letzterem endet das Spiel. Er behauptet, nach alter Theorie wäre der Wert der Hoffnung offenbar unendlich. Nach einfacher Wahrscheinlichkeitsrechnung ist derselbe

$$= (2^{n-1} . 2^n) = \tfrac{1}{2} a$$

und $\frac{1}{2}a$ anfangs einzusetzen. Um den Irrtum zu erklären, könnte man annehmen, Bernoulli habe im Sinne gehabt (wovon er nichts sagt, wie er überhaupt von veränderlichen Werten nie spricht) der Spieler habe nach dem $m$ten unglücklichen Wurfe seinen Anspruch an einen andern verkauft (auch die Zulässigkeit der Uebertragung durfte nicht verschwiegen werden) Das Spiel wäre dann, vorher um die Einheit a, von da an in ein ein gleiches um die höhere Einheit

$$b = 2^{m-1} a$$

übergegangen. Ist nun der Käufer kein Freund von hohem Glücksspiel, so kann er sich mit dem ersten Spieler auch auf einen niedern Preis c einigen, wenn nämlich dieser den gewissen Gewinn der Hoffnung dermassen vorzieht, dass er gern ein Geschenk von $a-c$ dazu verwendet, die Unlust des Käufer's zu überwinden. So lassen sich in der Tat subjective Elemente beim Handel mitwirkend denken; nur sind diese ganz verschieden von den in Bernoulli's Hypothese vorausgesetzten. Das angeführte Beispiel zeigt weder einen Mangel der alten Theorie noch eine Besserung durch die neue.

Hoppe.

Erd- und Himmelskunde.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Par H. Poincaré, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté. Tome II. Methodes de M. M. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 479 S.

Der 2. Band enthält folgende Capitel: Formelle Rechnung, Methoden von Newcomb und Lindstedt, Anwendung zur Untersuchung der säcularen Variationen, Anwendung auf das Problem der 3 Körper, Anwendung auf die Bahnen, Divergenz der Reihen von Lindstedt, directe Berechnung der Reihen, anderes Verfahren directer Rechnung, Methoden von Gyldén, Fälle linearer Gleichungen, Fälle nicht linearer Gleichungen, Methoden von Bohlin, Reihen von Bohlin, Ausdehnung der Methoden von Bohlin. Die neuen Methoden sind dadurch charakterisirt, dass die säcularen Terme entfernt werden, mithin die Reihen nur periodische Terme haben.

H.

Annuaire pour l'an 1896, pour l'an 1897, pour l'an 1898. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris. Gauthier-Villars et fils.

La maison Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1898. — Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements scientifiques qu'on ne trouve que lâ. Le volume de cette année contient en outre les Notices suivantes: Sur la stabilité du système solaire; par M. H. Poincaré. — Notice sur l'oeuvre scientifique de M. H. Fizeau; par M A. Cornu — Sur quelques progrès accomptis avec l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire; par MM. M. Loewy et P. Puiseux. — Sur les travaux exécutès 1897 à l'observatoire du mont Blanc; par M. J. Janssen. — Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897; par MM. J. Janssen et M. Loewy. In-18 de VI—806 pages, avec 2 Cartes magnétiques: 1 fr. 50 franco 1 fr. 85).

Gauthier-Villars et fils.

Das erste (für 1896). enthält als Anhang folgende Aufsätze. A. Cornu: Die Fernkräfte und die Undulationen. — Die Arbeiten Fresnel's in der Optik. — De Bernardières: Ueber die Construction der neuen magnetischen Karten des Globus unternommen

unter der Direction des Bureau des Longitudes. — J. Janssen: Ueber eine dritte Besteigung des Gipfels des Montblanc zum Observatorium und die während des Jahres 1895 im Grunde dieses Gebirgs ausgeführten Arbeiten. — Bernardières: Notiz über das Leben und die Arbeiten des Contreadmirals Fleuriais. — J. Janssen und F. Tisserand: Rede gehalten beim Leichenbegängniss von E. Brunner. — Das Annuaire für 1897 gibt im Anhang folgende Aufsätze. F. Tisserand: Notiz über die eigene Bewegung des Sonnensystems. — H. Poincaré: Die kathodischen und die Röntgen-Strahlen. — J. Janssen: Die Epochen in der astronomischen Geschichte der Planeten. — F. Tisserand: Notiz über die 4. Versammlung des internationalen Comites für Ausführung der photographischen Karte des Himmels. — Notiz über die Arbeiten der internationalen Commission der fundamentalen Sterne. — A. Cornu: Rede gehalten beim Leichenbegängniss von Tisserand. — J. Janssen: Arbeiten auf dem Montblanc 1896. H.

Annuaire de l'observatoire de Montsouri's pour l'année 1896, p. l'a. 1897, p. l'a. 1898. (Analyse et travaux de 1894 Météorologie). — Chimie. – Micrographie. — Applications à l'hygiène. Paris. Gauthier-Villars. 503 + 654 + 636 S.

Dieses Annuaire enthält ausser dem Kalender, der Auf- und Untergang der Sonne und des Mondes anzeigt, viele tabellarisch aufgestellte physikalische und hygienische Beobachtungsresultate bezüglich auf Paris und Frankreich. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Dirichlet's, G. Lejeune, Werke hrsg. auf Veranlassg. der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften v. L. Kronecker. Fortgesetzt v. L. Fux. 2. (Schluss) Bd. gr. 4°. (X, 422 S.) Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Fortschritte der Physik, hrsg. v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. Namensregister nebst e. Sach-Ergänzungregister zu Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887) unter Berücksicht. der in den Bdn. I—XX enthaltenen Autorennamen. Bearb. v. B. Schwalbe. 1. Hälfte. gr. 8°. (VII, 640 S.) Berlin, G. Reimer. 30 Mk.

—, dass. i. J. 1891. 47. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (XLII, 752 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 30 Mk. — dass. im Jahre 1896. 52. Jahrg. Ebd. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (LXX, 476 S.) 20 Mk.; 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. (XLV, 531 S.) gr. 8°. 21 Mk.

Haentschel, E., über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Eine historisch-krit. Studie. gr. 8°. (8 S. m. 1 Fig.) Leipzig, Dürr'sche Buchh. 40 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Herausg. von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895. (In 3 Hftn.) 1. u. 2. Hft. gr. 8°. Berlin, G. Reimer. 19,90 Mk.

Kronecker's, Leop., Werke. Hrsg. v. K. Hensel. 2. Bd. gr. 4°. (VIII, 541 S.) Leipzig, Teubner. 36 Mk.

Litterarischer Bericht
LXIII.

Lehrbücher.

Die Elemente der Mathematik. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von Fr. Bussler, Professor am Sophien-Gymnasium zu Berlin. Teil I. Pensum für die Mittelclassen (Quarta bis Untersecunda). Zweite, durchgesehene Auflage. — Teil II. Pensum für die Oberclassen (Obersecunda und Prima). Zweite Auflage. — Dresden, Berlin 1897. L. Ehlermann. 151+234 S.

In Berücksichtigung wenig entwickelten Denkvermögens der Anfänger übertrifft das vorliegende Lehrbuch wol jedes andere. Die Zergliederung und Umformung der Sätze geht so weit, dass nach einer Aussage, eines sei grösser als ein andres, als Folgerung besonders ausgesprochen wird (§ 16): letzteres sei kleiner. Dies Verhalten, welches im weitern Verlauf des Vortrags allmählich in concime Darstellung übergeht, also dem Wachsen logischer Fähigkeit sehr wol Rechnung trägt, mag durch Erfahrung des Verfassers gerechtfertigt sein, wenn man auch die vielen selbstverständlichen „Folgerungen" lieber durch Fragen ersetzt gesehen hätte. Wichtiger ist natürlich die Forderung eines überall genauen Ausdrucks. In dieser Beziehung ist es nun auffällig, dass zwar der Anfang nichts vermissen lässt, dass aber im weitern Fortgang mehr und mehr Mängel und Nachlässigkeiten zutage kommen, wo der Verfasser darauf zu rechnen scheint, der Schüler werde in richtiger Deutung der Worte seiner Meinung entgegenkommen. Einzelne Unbestimmtheiten durchzugehen würde zu umständlich sein; dagegen darf die ärgste Verletzung didaktischer Pflicht nicht stillschweigend hingenommen werden. Die Lehre von den Parallelen beginnt (nach

euklidischer Definition) mit dem „Grundsatz“: „Zwei parallele Geraden haben dieselbe Richtung“. Was „Richtung“ heisst, ist nirgends erklärt. Auch ist es, wie leicht erhellt, unmöglich die Richtungen zweier unverbundenen Geraden zu vergleichen. Daher sind die Sätze über die Winkel, welche eine schneidende Gerade mit 2 Geraden bildet, vorausgehend notwendig, um von den Richtungen der Geraden, ihrer Gleichheit und ihrem Unterschiede exacte Begriffe zu gewinnen. Die ganze Parallelentheorie ist demnach auf ein Wort ohne bekannten Sinn gebaut. Jeder zu ihr gehörige Beweis setzt schon die Theorie im ganzen voraus. Der Betrug, durch welchen die scheinbare Begründung plausibel gemacht und ein eingebildetes Wissen erzeugt wird, ist zu versteckt um von den Schülern durchschaut zu werden. Zu diesem Blendwerk zu greifen war nun überhaupt kein Anlass. Bekanntlich lautet der Grundsatz der Parallelentheorie, aus dem alle ihre Sätze fliessen, in einfachster Form: Durch einen gegebenen Punkt lässt sich mit einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen. Warum der Verfasser statt dieses Satzes einen solchen gewählt hat, der wegen fehlender Begriffsbestimmung nicht verstanden werden kann, lässt sich kaum anders erklären als durch den Zweck, der Verstandescontrole von Seiten der Schüler und Leser zu entgehen. — Im ganzen ist der Lehrstoff ungemein ausgedehnt; von allen vorgefundenen Theorien findet man Teile zu Nutzen eifriger Mathematiker unter den Schülern dem Standpunkt der Classe entsprechend bearbeitet: Teile der neuern synthetischen Geometrie, der Combinatorik, der Reihen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der complexen Zahlen, der Zinseszinsrechnung u. a. m.

Hoppe.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren, und Wilhelm Krimphoff, Oberlehrer am Gymnasium in Paderborn. Zweite Auflage. Mit 151 Figuren. Freiburg im Breisgau 1897. Herder. 133 S.

Besprochen im 51. litt. Bericht, S. 31.

Hoppe.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler. Achte, verbesserte Auflage. Mit 47 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1897. Louis Nebert. 21 S.

Die 3. und die verbesserte 4. Auflage sind im 8. litt. Bericht, S. 41 besprochen.

H.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von Adolf Sickenberger, K. Gymnasialprofessor und Rector der Luitpold-Kreisrealschule in München. Zweiter Teil: Planimetrie. Dritte Auflage. München 1896. Theodor Ackermann. 123 S.

Besprochen im 51. (und 25.) litt. Bericht, S. 36.

H.

Ebene Geometrie. Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. Georg Recknagel, Professor und Rector des K. Realgymnasium zu Augsburg, Mitglied der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. Fünfte Auflage. München 1896. Theodor Ackermann 222 S.

Die 4. Auflage ist besprochen im 46. litt. Bericht, S. 15.

Hoppe.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie bearbeitet von Dr. E. Hammer, Professor an der K. Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1897. J. B. Metzler. 572 S.

Nach Aussage des Verfassers soll das Buch nur ein Hülfsmittel zur Vorbereitung auf die Geodäsie und die sphärische Astronomie für Schule und Selbstunterricht sein. Dies ausschliesslich praktische Ziel der Bearbeitung darf man jedoch in keiner Weise als Beschränkung der Lehre in theoretischer Beziehung ansehen. Obgleich es sich allerdings durch besonders ausführliche Behandlung des Verfahrens und der Apparate kund gibt, so wird das Lehrgebiet der Trigonometrie als Teiles der Mathematik in gleicher Gründlichkeit und grösster Vielseitigkeit umfasst. Selbstverständlich nimmt hier die Behandlung keine Rücksicht auf die Schuleinrichtung und die Stellung der Trigonometrie im Pensum; vielmehr ist es einzige Sorge, die betreffenden Lehren, nahen und fernen Beziehungen und geometrischen Anwendungen zu erschöpfen. Da hierbei sehr viele Gesichtspunkte massgebend sind, so lässt sich nicht wol eine systematische Ordnung des Lehrstoffes aufstellen. H.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit Beispielen und 280 Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von O. Bürklen, Professor am kgl. Realgymnasium in Schw. Gmünd. Mit 40 Figuren. Heilbronn a. N. 1897. Schröder u. Co. 122 S.

tionen, specielle Functionen, analytische Darstellung der Functionen, ganze, rationale oder complexe Zahlen, algebraische und transscendente Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, analytische Instrumente und Apparate. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. Zweite Auflage. Erster Band. Braunschweig 1898. Friedrich Vieweg und Sohn. 703 S.

Die 1. Auflage ist im 54. litt. Bericht Seite 21 besprochen. In 2. Auflage sind einzelne Irrtümer berichtigt. Eine wesentliche Erweiterung hat die Theorie der Elimination (Theorem von Bezout, Elimination aus 3 Gleichungen) im 4. Abschnitt (symmetrische Functionen) gefunden. H.

Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et Georges Simart, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École polytechnique. Tome I Paris 1897. Gauthier Villars et fils. 244 S.

Die Gegenstände der einzelnen Capitel des 1. Buchs sind folgende. Vielfache Integrale von Functionen mehrerer Variabeln. Geometrie der Lage. Integrale rationaler Functionen von 2 complexen Variabeln. Singularitäten einer algebraischen Fläche, Invarianten einer Fläche vom Gesichtspunkt der Geometrie der Lage. Integrale totaler Differentiale 1., 2., 3. Gattung. Doppelintegrale 1. Gattung und darauf bezügliche Invarianten Algebraische Raumcurven und Formel geeignet das Geschlecht einer Fläche zu geben. H.

Vorlesungen über Kreis- und Kugel-Functionen-Reihen. Von Dr. Johannes Frischauf, Professor an der Universität Graz. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 60 S.

Die Abschnitte sind folgende. Reihenentwickelung nach Kreisfunctionen (Fourier'sche Theorie). Kugelfunctionen einer, dann zweier Veränderlichen. Reihenentwickelung nach Kugelfunctionen.

H.

Einführung in die Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Von Heinrich Burkhardt, Professor an der Universität Zürich. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1897. Veit u. Comp. 213 S.

Die Abschnitte sind folgende. Complexe Zahlen und ihre geometrische Darstellung. Die rationalen Functionen einer complexen Veränderlichen und die durch sie vermittelten conformen Abbildungen. Definitionen und Sätze aus der Theorie reeller Veränderlichen und ihrer Functionen. Eindeutige analytische Functionen einer complexen Veränderlichen. Mehrdeutige analytische Functionen einer complexen Veränderlichen. Allgemeine Functionentheorie.

H.

Hauptsätze der Differential- und Integral-Rechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen, zusammengestellt von Dr. Robert Fricke, Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig. — Erster Teil: Mit 45 — Zweiter Teil: Mit 15 — Dritter Teil: Mit 9 in den Text gedruckten Figuren. Braunschweig 1897. Friedrich Vieweg und Sohn. 80+66+38 S.

Der Leitfaden ist keine blosse Zusammenstellung von Hauptsätzen, sondern gibt die vollständige Lehre in Form und Umfang, wie es nach Erachten des Verfassers für die Studirenden an technischen Hochschulen geeignet ist. Auch ist diese Lehre hinsichtlich ideell wissenschaftlicher Forderungen grösstenteils correct. Wenn gleichwol derselbe zuvorkommend einräumt, dass er die Strenge nur bis zu einem gewissen Masse getrieben, und „wol wisse, dass vereinzelte Wendungen dem scharfen Urteil nicht genehm erscheinen" würden, so ist, da die betreffenden Punkte nicht genannt sind, wol zu unterscheiden, ob nur der Kürze und Einfachheit wegen auf manche Begründung oder Frage nicht eingegangen worden ist, oder ob der Popularität wegen irgend welche vulgäre Irrtümer beibehalten worden sind. Ein hier vorkommendes Beispiel letzteren Falles ist die Einführung von ∞ als Ausdruck einer Grösse und als Grenzwert mit Berufung auf eine gemeine (d. i. nachlässige) Redeweise. In solchen Fällen bietet die Hinweisung des Verfassers auf den Zweck ihm natürlich keine „Entschuldigung"; denn das Vorgehen dient nicht zur Erleichterung des Lernens, sondern ist eine unnütze, verfehlte Speculation. Im 1. Teil wird nach der Lehre vom Differentiiren davon Anwendung gemacht auf Maxima und Minima, auf den Verlauf der Functionen, auf die Anfangsgründe der Integralrechnung; dann folgt die Theorie der unendlichen Reihen, dann die Bestimmung der Quotienten unendlicher Grössen und Besprechung ähnlicher

Aufgaben. Der 2. Teil enthält folgende Capitel: Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabeln. Hülfssätze aus der Algebra. Weiterführung der Integralrechnung. Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln. Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabeln. Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabeln. Der 3. Teil folgende: Gewöhnliche Differentialgleichungen erster, dann höherer Ordnung mit 2 Variabeln. Andeutungen über Differentialgleichungen mit mehr als 2 Variabeln. Hoppe.

Zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des dritten Grades. Von Eduard Grohmann. Wien 1895. Alfred Hölder. 22 S.

In der kubischen Gleichung

$$Ax^3+3Bx^2+3Cx+D=0$$

wird gesetzt:

$$r=BC-AD; \quad s=2(B^2-AC); \quad t=2(C^2-BD)$$

$$w^2=r^2-st; \quad k=\frac{Ar-Bs}{Aw}; \quad w \text{ positiv}$$

Dann ist für positives w^2 die einzige reelle Wurzel

$$x=-\frac{r}{s}+\frac{w}{s}\operatorname{tg}\varphi; \quad \operatorname{tg}\psi=k$$

$$\operatorname{tg}(\varphi+\tfrac{1}{2}R)=\sqrt[3]{\operatorname{tg}(\psi+\tfrac{1}{2}R)}$$

für negatives w^2 sind die 3 reellen Wurzeln

$$x=-\frac{r}{s}+\frac{w}{s}\operatorname{tg}(\varphi+\tfrac{2}{3}\mu R); \quad \mu=0,\ 1,\ -1$$

$$\operatorname{tg}3\varphi=k$$

H.

Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1891. Friedrich Foerster. 133 S.

Die Schrift untersucht allgemeine Fragen, die aus dem Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen hervorgehend bereits von andern Autoren behandelt, jedoch nach dem Urteil des Verfassers nicht zum Abschluss gebracht worden sind. H.

An elementary course of infinitesimal calculus. By Horace Lamb, M. A., F. R. S., Professor of mathematics in the Owens

College, Victoria University, Manchester; formerly Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. London: C. J. Clay and sons. Leipzig F. A. Brockhaus. Bombay E. Seymour Hale. 616 S.

Einen leitenden Gedanken und Plan des Ganzen gibt weder der Inhalt noch das Vorwort zu erkennen. Ausgewählte Themata der höhern Analysis, welche dem Verfasser vorzugsweise nützlich für die Ausbildung der Studenten schienen, machen das gesamte Werk aus.
H.

Theory of groups of finite order. By W. Burnside, M A., F. R. S., late Fellow of Pembroke College, Cambridge; Professor of mathematics at the Royal Naval College, Greenwich, Cambridge 1897. London C. J. Clay and sons. Leipzig F. A. Brockhaus. New-York the Macmillan Company. 388 S.

Die Capitel sind folgende: Substitutionen. Definition einer Gruppe. Einfachere Eigenschaften einer Gruppe unabhängig von ihrer Darstellungsweise. Abel'sche Gruppen. Gruppen, deren Ordnungszahlen Potenzen von Primzahlen sind. Sylow's Theorem. Compositionsreihen einer Gruppe. Substitutionsgruppen: transitive und intransitive Gruppen. Primitive und imprimitive. Transitivität und Primitivität (Schlusseigenschaften). Zusammensetzung einer Gruppe mit sich selbst. Graphische Darstellung. Gruppen vom Geschlecht 0 und 1. Cayley's Farbengruppen. Lineare Gruppe. Auflösbare und zusammengesetzte Gruppen.
H.

Abel's theorème and the allied theory including the theory of the theta functions. By H. F. Baker, M. A., Fellow and Lecturer of the Johns College, University Lecturer in mathematics. Cambridge 1897. London C J. Clay and sons. Leipzig F. A. Brockhaus. New-York the Macmillan Company. 684 S.

Das Werk enthält folgende Abschnitte: Gegenstand der Untersuchung. Die fundamentalen Functionen einer Riemann'schen Fläche. Die Unendlichkeiten rationaler Functionen. Specificirung einer allgemeinen Form von Riemann's Integralen. Gewisse Formen der Fundamentalgleichung der Riemann'schen Fläche. Geometrische Untersuchungen. Coordinirung einfacher Elemente; transscendentale einförmige Functionen. Abel's Theorem; Abel's Differentialgleichungen. Jacobi's Inversionsproblem. Riemann's Thetafunctionen; allgemeine Theorie. Der hyperelliptische Fall von Riemann's Thetafunctionen. Eine besondere Form von Fundamentalfläche. Radicale Functionen. Factoriale Functionen. Relationen zwischen Producten

von Thetafunctionen. Transformation von Thetafunctionen. Complexe Multiplication von Thetafunctionen; Correspondenz von Punkten auf einer Riemann'schen Fläche. Degenerirte Abel'sche Integrale. Algebraische Curven im Raume, Matricen. H.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, Jules Molk, Professeur à la Faculté des sciences de Nancy. Tome III. Calcul integrale (I[re] partie). Théorèmes généraux. — Inversion. Paris 1898. Gauthier Villars et fils 267 S.

Die Gegenstände sind folgende: Allgemeine Sätze der Integralrechnung, nämlich: Anwendungen von Caychy's Theorem über die Integrale einer Function einer imaginären Variabeln. Anwendungen der Formel der Zerlegung in einfache Elemente. Addition und Multiplication. Entwickelung in trigonomische Reihen. Integration doppelt periodischer Functionen. Inversionen, nämlich: gegeben k^2 und g_2, g_3, gesucht τ oder ω_1, ω_2. Inversion der doppelt periodischen Functionen, speciell 2. Ordnung, namentlich der Function *sn*.

H.

Integrationsmöglichkeiten der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung mit drei Variablen. Von Oberlehrer Dr. Ernst Schultz. Progr. Stettin, Schiller-Realgymnasium. Ostern 1898. 4⁰. 16 S.

Es wird gezeigt, dass bei der Ham. Gleichung

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}=2U+2h$$

wo m die Masse, U das Potential, h die Constante bezeichnet, ein Gleichungssystem aufgestellt werden kann, welches die Transformationsgleichungen der rechtwinkligen Coordinaten in diejenigen liefert, in denen die Integration möglich ist. Ausgehend von der für einen angezogenen Punkt geltenden Differentialgleichung, mit Hinzunahme der Bedingung, dass infolge der Transformation eine Variable explicite in der Differentialgleichung nicht vorkommt, wird man bei Nachweis der Integrationsmöglichkeit auf ein Gleichungssystem geführt, welches Jacobi nicht erwähnt. H.

Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et sur applications géométriques. Par M. Ch. Méray, Professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Dijon. Ouvrage honoré d'une souscription

du Ministère de l'instruction publique. Quatrième partie. Applications géométriques classiques. Paris 1898. Gauthier Villars et fils. 248 S.

Der 1. Teil ist im 50. litt. Bericht, Seite 21 besprochen. Der 4. Teil betrifft geometrische Anwendungen, nämlich Rectificationen, Quadraturen, Kubaturen, Berührungen im allgemeinen, Berührungen von Flächen und Linien mit Gebilden 1. Grades, Enveloppen, Berührungen zwischen Kugel, Kreis und gegebenen Gebilden, Unstetigkeitseigenschaften gewöhnlicher Flächen. Berührungen höherer Ordnung einer Linie mit dem Kreise; Fragen, die sich an die Berührung 2. Ordnung einer Fläche mit dem Kreise und der Geraden knüpfen.

Hoppe.

Beiträge zur Zahlenlehre. Von G. Speckmann. Oldenburg i. Gr. 1893. Eschen u. Fasting.

Das Vorliegende sind vermischte zahlentheoretische Studien; die einzelnen Themata sind folgende: Arithmetische Reihen. Beweis des Satzes, dass jede unendliche arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. Ermittelung der Primzahlen. Anzahl der Primzahlen. Factoren der Zahlen. Allgemeines Verfahren zur Prüfung einer Zahl Z auf ihre Teilbarkeit durch einen Divisor n. Teilbare Zahlen und Primzahlen. Productbildung und Teilbarkeit. Auflösung der Congruenzen 2. Grades.. Besondere arithmetische Reihen. Quadratzahlen und Zerlegung der Zahlen von der Form $4n+1$ in 2 Quadrate. Auflösung der Pell'schen Gleichung. Zur Potenzrechnung. Auflösung der Gleichungen. Identitäten.

H.

Memorias de Real Academia de ciencias exactas fisicas y naturales de Madrid. Tomo XVIII. Parte I. F. Gomes Teixeira. Sobre o desenvolvimento das funções em serie. Madrid 1897. Don Luis Aguado. Kl. Fol. 116 S.

Die Schrift enthält Studien über die Taylor'sche Reihe für reelle, dann für complexe Variabeln; in letzterem Falle die Methode von Cauchy, dann die von Riemann, dann die Methoden von Laurent, von Weierstrass und Mittag Leffler, dann die Reihen von Burmann, von Lagrange und die Verallgemeinerung der ersteren.

H.

Geometrie.

Verzeichniss der einfachsten Vielflache. Von Dr. Oswald Hermes, Professor. Mit 1 Figurentafel. Berlin 1896. R. Gaertner. Progr. Berlin-Kölln. Gymn. Ostern 1896. 4⁰. 24 S.

Beschränkt und individualisirt sind die Polyeder nach Zahl und Aneinandergrenzen der Flächen, Kanten, Ecken (f, k, e) (ohne Rücksicht auf Mass), nämlich beschränkt auf 4 bis 10 Seitenflächen und 3kantige Ecken Für nur 3kantige Ecken gibt der Eulersche Satz die Relation:

$$f-2=k-e=\frac{e}{2}=\frac{k}{3}$$

Durch die Flächenzahl sind also auch die Kanten- und Eckenzahl bestimmt. Das Verzeichniss führt 1 Vierflach, 1 Fünfflach, 2 Sechsflache, 5 Siebenflache, 14 Achtflache, 59 Neunflache und 289 Zehnflache in Zahlen formulirt auf. Zur Zeichnung der Netze wird eine Fläche von grösster Eckenzahl nebst den in den Kanten anschliessenden Flächen zu Grunde gelegt, die übrigen als Deckfiguren über denselben betrachtet. Die gesamte Deckfigur besteht dann aus Gruppen von Kanten. Die Zeichnung auf der beigefügten Tafel enthält nur die 4 einfachsten ganzen Netze; statt der übrigen sind 71 Gruppen gezeichnet. H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von J. Schlotke, Oberlehrer der allgemeinen Gewerbeschule zu Harburg. IV. Teil. Projectivische Geometrie. Mit 223 Figuren. Dresden 1896. Gerhard Kühtmann. 177 S.

Der II. und III. Teil sind im 52. litt. Bericht, Seite 38, der erste (2. Aufl.) im 55sten, Seite 31 besprochen. Im IV. Teile kommen folgende Lehrgegenstände hinzu: Collineation (in Ebene, dann im Raume). Punktreihen und Strahlenbüschel. Deren Erzeugnisse. Doppelelemente. Regelscharen und Regelflächen. Princip der reciproken Reihen; Polarfiguren. H.

Litterarischer Bericht
LXIV.

Methode und Principien.

Mélanges de géométrie euclidienne et non euclidienne. Par P. Mansion, Professeur à l'Université de Gand. 38 S.

Es werden Relationen zwischen der euklidschen, lobatschefskischen und riemannschen Geometrie ans Licht gezogen, deren zwei letztere sich dadurch von der euklidschen unterscheiden, dass die lobatschefskische von den euklidschen Axiomen 11. und 12. (hier genannt Postulat 5. und 6.) nur das Axiom 12, die riemannsche nur das Axiom 11. aufnimmt. Voraus geht die Zusammenstellung der Sätze von Legendre, Saccheri, Lambert, Taurinus, Gauss, welche schon vor Lobatschefski die euklidische Grenze in euklidischer Geometrie überschritten haben. In vorliegender Ausgabe ist mit dieser Schrift eine andere desselben Verfassers verbunden: „Méthode élémentaire d'exposition des principes de la géometrie non euclidienne.“ — welche von der sphärischen Geometrie aus auf die nichteuklidsche übergeht. H.

Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. Von Dr. Arthur Korn, Privatdocent an der Universität München. Zweite Auflage. Berlin 1898. Ferd. Dümmler. 277 S.

Das Princip der Abfassung des Werkes wird hier im Vorwort ausgesprochen. Dass der Verfasser bei seinen an die Hypothese

gestellten Forderungen über die Beziehung zwischen Theorie und Hypothese ohne Erörterung hinweggeht, ist freilich im Grunde zulässig, sofern diese Beziehung als rein logische wol bekannt sein sollte. Um seine Aufstellung zu beurteilen, können wir nicht umhin darauf einzugehen. Eine Theorie fordert die Scheidung der einzelnen Elemente der Erscheinungen, welche je einem Causalgesetz unterliegen. Das Causalgesetz des isolirten Elements ist die Hypothese. Der Verfasser misst nun „den Anspruch der Hypothesen auf Anerkennung" nach zwei Eigenschaften: 1) ihre formale Einfachheit, 2) ihre unmittelbare Anschauung (Intuition). Er verzichtet gleich anfangs auf exacten Ausdruck der Bedingungen, ja er räumt sogar, als ob beide einander beeinträchtigten, der zweiten Forderung ein veto gegen die erste ein. In der Tat entbehren beide der Objectivität. Wir wollen sie deshalb nicht verwerfen: sie stehen nach der hier waltenden Auffassung nur an unrechter Stelle; bei genauer logischem Eingehen kann man sie wol in objectiv geltende und einander nicht beeinträchtigende Forderungen überführen. Dass die das Gesetz ausdrückende Function einfach sei, ist nicht notwendig; wol aber müssen die Erscheinungen in ihre einfachsten Bestandteile zerlegt werden (wie die Radicale in der Chemie). So ist z. B. die Newtonsche Function der Anziehung in ihrer Einfachheit nicht genau richtig (die genauere, auch für kleine Entfernung geltende, wird noch gesucht); wesentlich aber an der Newton'schen Hypthese ist, dass die Bewegung aller starren Körper auf ein und dasselbe Anziehungsgesetz zweier Massenpunkte zurück geführt wird. Diese Bedingung ist exact und objectiv. — Auch die unmittelbare Anschauung können wir nicht ganz entbehrlich machen; nur hat sie keine Beziehung zum Causalgesetz, sondern beruht auf Anticipationen in den elementarsten Begriffen von Raum und Materie, die nie in Frage gestellt sind. Von ihnen ist bisher keine Hypothese berührt worden. Dagegen hat sich in neuster Zeit eine erschreckende Menge Litteratur breit gemacht, die im Namen angeblich mangelnder Intuition, insbesondere gegen die Hypothese der Fernwirkung die unsinnigsten Einwände erhoben hat, und der Verfasser hat, obgleich er die meisten Aufstellungen derart widerlegt, jene Erzeugnisse unreifer Verstandesentwickelung einer Berücksichtigung für wert gehalten, indem er doch in der Hauptsache auch von seinem Standpunkte damit einverstanden ist, dass der Fernwirkung die unmittelbare Anschauung fehle, dieselbe also zu verwerfen sei. Diese Behauptung zu begründen hat er nicht versucht und möchte auch unmöglich sein; das Gegenteil zeigt sich beständig im gewöhnlichen Leben: im Gespräche z. B. erscheint die Wirkung der Rede unmittelbar als Fernwirkung; erst hinterher kann man nach den vermittelnden Vorgängen fragen,

die nicht einmal bis ans Ende bekannt sind. Begreiflich sind freilich auch in jenen nachträglichen Erklärungsversuchen die plumpsten Irrungen von Laien durch Befangenheit in gedankenloser Gewohnheit; denn es gibt auch Fälle unentbehrlicher Vermittelung zur Erreichung menschlicher Zwecke. Minder begreiflich ist es, dass ein wissenschaftlicher Forscher durch die vielen Aeusserungen derart dazu vermocht worden sei, das unerfüllte Bedürfniss der Intuition anzuerkennen. Annehmbarer ist vielmehr die Vermutung, dass der Verfasser den zahlreichen Stimmen nur beigetreten ist, um zu Gunsten seines Verlegers von der Menge etwas an Popularität für seine Hypothese zu profitiren. Dem Vorstehenden zufolge hat die Hypothese überhaupt keiner subjecten Forderung eines Dilettanten-Publicums, sondern nur der einen objectiven Bedingung zu genügen, dass durch sie die auf eine beliebige Epoche folgenden Vorgänge in einem isolirten materiellen System eindeutig bestimmt sind. Der Verfasser entscheidet sich für die von Bjerknes der Hydrodynamik zugrunde gelegte Hypothese, um nachzuweisen, dass sie auch auf die Hertz'sche Theorie der Elektricität anwendbar ist. Die Abschnitte des Werkes sind folgende: 1. Teil: Grundlage der Hydrodynamik und Theorie der Gravitation: Bewegung starrer Körper in einer gewöhnlichen Flüssigkeit. Bewegung pulsirender Kugel in wirbelloser Flüssigkeit, oscillirende Kugeln und starre Ringe in gewöhnlicher Flüssigkeit; 2. Teil: Theorie der elektrischen Erscheinungen: ponderomotorische Wirkungen, elektrisch pulsirende Kugeln, elektromotorische Wirkungen; Theorie Maxwell's und ihre Einwirkung auf neuere Theorienbildungen. Hoppe.

Grundzüge der kinetischen Naturlehre. Von Baron N. Dellingshausen. Heidelberg 1898. Carl Winter. 520 S.

Diese Bearbeitung der Naturlehre folgt dem Gedanken, dass die Lehre erst von da an eine wissenschaftliche sei, wo sie alle Vorgänge als Bewegungen eines allgemeinen, unterschiedslosen Substrats darzustellen vermag. Die Gegenstände der einzelnen Lehren sind folgende: die Form der innern Bewegungen, der innere Arbeitsvorrat der Körper, die Energie der freien Bewegungen, die äussere Bewegung der Körper, die Gesetze des Stosses, die Körper unter einem Drucke, die Sonnenenergie und die innere Erdwärme, die Schwere der Körper, die Zustandsänderungen der Körper, die chemischen Erscheinungen, verschiedene Erscheinungen (darunter auch Licht, Elektricität nnd Magnetismus), die weitere Aufgabe der Naturlehre. H.

La théorie des parallèles démontrée rigoureusement. Essai sur le livre I[er] des éléments d' Euclide. Par Michel Frolov. Paris 1893. Carré et Naud. Bale et Genève. Georg et Co. 46 S.

Die Schrift bietet viel Interesse durch Vereinigung der gesamten Litteratur der Neuzeit, welche aus der Forschung betreffend das Parallelenproblem hervorgegangen ist, indem sie genügende Vertrautheit mit mathematischer Logik bekundet, um alle Forschungswerke in gutem innern Zusammenhange wiederzugeben. Dies wird schon in der Vorrede begonnen, dann in der Einleitung, dann in dem bisjetzt erschienenen, ebene Geometrie, erstes Buch betitelten Teile der Schrift fortgesetzt. Die Abschnitte des 1. Buches sind: geradlinige Figuren, Senkrechte und Schiefe, Dreiecke, Vielecke. Summe der Vieleckswinkel, Parallelen. Es enthält 18 Lehrsätze, Mit Lehrsatz 14. „Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann nicht kleiner als 2 Rechte sein" — macht der Verfasser, nämlich durch Ergänzung des Legendre'schen Satzes „Sie kann nicht grösser sein" — einen neuen Versuch den Parallelensatz zu beweisen. Da er über seinen ersten Beweisversuch, dessen Fehler im 61. litt. Bericht Seite 6 angezeigt ist, sich nicht äussert, so mag die Kritik des neuen Versuches vorbehalten bleiben. Hoppe.

Lehrbücher.

Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Curs für die Hand des Lehrers bearbeitet von Dr. K. Fink, Rektor der Realanstalt zu Tübingen. Mit 10 Figurentafeln und 84 Blättern für die darstellend-geometrischen Uebungen gezeichnet von Reallehrer Auer in Tübingen. Tübingen 1896. H. Laupp. 151 S.

Es wird eine Reihe von Lehrstunden vorgeführt, worin der Lehrer über einige vorgezeigte Modelle von Raumgebilden grösstenteils nur Fragen an die Schüler richtet, die sie aus ihrer Anschauung zu beantworten haben; die daraus gezogenen allgemeinen Urteile fügt er selbst einzeln an. Von Beweisen ist auch einmal die Rede, doch handelt es sich nur um deren vorgeschriebene Form. Im 1. Cursus wird gezeigt: die Elemente des Raums; Richtung, Dimension, Aufgabe der Geometrie; die elementaren Mittel der Darstellung der mathematischen Raumgebilde; Bewegungsfähigkeit der Figuren, Distanz, Winkel, identische Gebilde, centrale und axiale Symmetrie, parallele Gerade, Parallelenbüschel verschiedener Richtung; Ein-

leitung in die Lehre vom Dreieck, Viereck und Vieleck; Parallelverschiebung, Drehung, Umklappung einer Figur; das Dreieck; der Kreis; das Viereck, dessen besondere Arten, einfachsten Flächen-Satze, -Berechnungen und -Verwandlungen, Verjüngungsmassstab. Im 2. Cursus: Euklidische Axiome und Beweisformen', Aufgabenlösung; einige weitere Flächensätze, Ausziehen der Quadratwurzel auf geometrischem und rechnerischem Wege; ähnliche Figuren, Aehnlichkeitspunkt; stetige Teilung, Sätze über gewisse regelmässige Figuren; regelmässige Vielecke und ihre Berechnung, Kreisberechnung; harmonische Elemente; Sätze des Menelaus und Céva, harmonische Elemente am Viereck und Vielseit, Aehnlichkeitsaxen und Aehnlickeitscentra bei 3 Kreisen; Anwendung der Sätze des Menelaus und des Céva auf besondere Fälle des Dreiecks und Vierecks; Potenz eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis, Potenzlinie, potenzhaltende Punkte zweier Kreise; das Berührungsproblem des Apollonius. Ziel des Unterrichts scheint hier überall Bekanntschaft mit den Gegenständen und Resultaten der Doctrin zu sein; alle Urteile beruhen auf Autorität des Lehrers, auf exacte Schlüsse wird nicht eingegangen. Die Selbsttätigkeit der Schüler liegt nicht sowol in der Beantwortung der Fragen, die ja stets durch Controle des Lehrers vor Irrtum geschützt ist, sondern im Zeichnen der Figuren, wozu viel Uebungsstoff dargeboten ist. Dem Buche voraus geht eine ausführliche Darlegung der Grundsätze des Verfassers, nach welchen es bearbeitet ist. Daraus sei hervorgehoben, dass die projective Geometrie, schon ehe zu ihr übergegangen wird, bei jeder Gelegenheit vorbereitet werden soll. Dagegen ist nirgends die Absicht ausgesprochen, noch zu rechtfertigen gesucht, die Pflege der mathematischen Logik so geringschätzig beiseite zu lassen, wie es in der Tat geschieht. Ein Anhang gibt die Geschichte der Geometrie. Die für die Hand des Schülers bearbeitete Sammlung von Aufgaben ist im 62. litt. Bericht, Seite 16 besprochen. Hoppe.

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verknüpfung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösungen von Aufgaben systematisch bearbeitet von Werner Jos. Schüller, Seminarlehrer in Boppard am Rhein. Zweite, um die Logarithmen vermehrte Ausgabe. Mit 54 Figuren im Text. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 478 S.

Das Buch ist nach wissenschaftlichen Grundsätzen bearbeitet. Diese sind im Vorwort besprochen, jedoch nur nach sehr oberfläch-

lichen Gesichtspunkten motivirt. Was hier als Verbesserung hervorgehoben wird, weist auf ein von der trügerischen formalen Logik geschaffenes Vorurteil hin, das nur einzeln als pädagogischer Miserfolg beachtet wird, während der allgemeine Irrtum sich noch immer behauptet. Gleichwie eine geschlossene Linie im Raume kein Feld bestimmt, solange dessen Fläche nicht in extenso bekannt ist, so wird auch kein Begriff durch Definition Eigentum des Schülers, wenn dieser nicht vorher schon den Inhalt gekannt hat. Hieraus erklären sich genügend die vom Verfasser nur erfahrungsmässig angeführten Umstände, denen er im vorliegenden Buche abzuhelfen denkt, die man aber auch, wenn man ihren Grund im Auge hat, durch Handhabung des Unterrichts vermeiden oder unschädlich machen kann. Es wird angeführt, dass die inductive Methode das Lernen leichter macht als die deductive. Sehr begreiflich; denn die deductive geht, im Allgemeinen beginnend am Begriffsinhalte vorbei, die inductive in seinem Gebiete herum. Die inductive liefert also, was die deductive voraussetzt; ist aber der Begriff gewonnen, und wird sein Inhalt im Bewusstsein erhalten, so ist der directe Erkenntnissweg der ausschliesslich deductive. Das anfängliche Bedürfniss der Induction schwindet aber im Fortgang der Lehre zu einem Minimum zusammen, wenn gemäss dem synthetischen Aufbau der Theorie der neue Begriff immer seinen Inhalt im alten schon grösstenteils vorfindet. Ferner wird angeführt, dass, wie viele Stimmen behaupten, die Arithmetik wegen der abstracten Natur ihrer Gegenstände Schwierigkeit böte, „ungeniessbar“ sei und mit Unlust erlernt würde. Der Verfasser eilt dem Umstand abzuhelfen, ohne zu fragen, ob die Klage Grund hat. In der Tat wird nirgends der Schüler unmittelbar in das Gebiet der abstracten Zahl eingeführt; denn in der untersten Classe, selbst der Gymnasien, wird nur mit benannten, also concreten Zahlen gerechnet. Der nachherige Uebergang zur abstracten Zahl aber vollzieht sich ganz von selbst unmerklich durch das Zählen und die dekadische Schreibung, bei welcher das Bewusstsein vom verschiednen Werte der Einheit immer erhalten bleibt. Dass es ein Misgriff ist, wenn Manche eine angebliche Schwierigkeit vornehmlich der Arithmetik in der abstracten Natur ihrer Gegenstände suchen, erhellt auch, wenn man beachtet, dass die Gegenstände der Geometrie gleicherweise abstract sind; sie abstrahirt vom Stoffe wie die Arithmetik von der zu wählenden Einheit. Die Abstraction ist ein notwendiges Glied in der Entwickelung der Begriffe und bezeichnet darin eine neue Stufe ebensowol in der Geometrie wie in der Arithmetik. Im Vorwort wird auf eine ganz andre Eigenschaft der Geometrie Gewicht gelegt, nämlich die sogenannte Anschaulichkeit. Diese beruht (was hier nicht ausgesprochen ist) auf einer wesentlichen und dem Verständniss sehr förderlichen

Transformation. Ein System, welches ursprünglich vom Gedanken nur successiv, also in einer Zeit durchlaufen werden kann, lässt sich in einfachen Fällen durch räumliche Darstellung wiedergeben, so dass es gleichzeitig im ganzen überschaut wird, dem zufolge die entferntesten Partien in ihrer Beziehung erkannt werden können. Die Ausführung berücksichtigt nun mit Mass und nach selbständigem Urteil vorgehend, unbeirrt durch vorgenannte Stimmen Unkundiger, die im Vorwort berührten Punkte. Die Methode ist nicht wesentlich abweichend von der üblichen; doch zeichnet sich das Verfahren aus durch äusserste Ausführlichkeit und Gründlichkeit in den Principien. Zu erwähnen ist besonders die Anwendung der Construction zur Darstellung des Zahlengebiets, erst des reellen bei Einführung der Negativen, später des complexen bei Einführung der Imaginären. Zu vermeiden ist natürlich der Schein, als wäre der Begriff der Negativen und der Imaginären aus der Geometrie entlehnt, eine Täuschung die vielleicht bisher von Anwendung der Construction abgehalten hat, aber bei vorliegendem Verfahren nicht wol möglich ist. Die Abschnitte des Buchs sind nach einer Einleitung und den Rechnungsarten 1., 2. und 3. Stufe nebst Inversion und Erweiterungen des Zahlbegriffs: Zahlentheorie, Proportionen, Gleichungen 1. und 2. Grades, Determinanten, irrationale, imaginäre, complexe Zahlen. Dann folgen viele Ergänzungen, erst unter diesen die Theorie der Logarithmen als zweite Inversion der Potenzen. H.

Geometrie.

Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Erster Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. H. Ganter, Professor an der Kantonsschule in Aarau, und F. Rudio, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 54 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 176 S.

Die 2. Auflage ist im 55. litt. Bericht, S. 28 besprochen. Die Verbesserung bezieht sich auf Gruppirung und Präcision einiger Ausdrücke. Die Uebungsbeispiele sind um 31 vermehrt. H.

Projective Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. Karl Doehlemann, Privatdocent an der Universität München. Mit 57 Figuren. Leipzig 1898. G. J. Göschen. 162 S.

Diese übersichtliche Behandlung wird namentlich denjenigen, welche sich nicht productiv mit projectiver Geometrie beschäftigen, zur Kenntnissnahme der Nomenclatur und der Dogmen willkommen sein. H.

Mechanik.

Over zekere trillingen van hoogere orde van abnormale intensiteit (relatietrillingen) bei mechanismen met meerdere graden van vrijheid, Door D. J. Korteweg, (Verhandlingen der Koninkl. Ak. v. Wet. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel V. No. 8) Amsterdam 1897. Johannes Müller. 4⁰. 31 S.

Ein System gleichzeitiger Vibrationen wird durch eine nach Cosinus der Perioden fortschreitende Reihensumme dargestellt. Es werden nun einzelne Fälle berechnet. Nach Definition, Auftreten und Untersuchung der Gesetze der Intensitätserhöhung der „Relationsschwingungen", Bedeutung in der Mechanik, der Lehre vom Ton und Licht und Darlegung der Ansicht von Routh, dergemäss eine scharfe Grenze bei Einfluss einer Relation ist, je nachdem die absolute Coefficientensumme $<$ oder >4 ist, werden 3 Arten von Relationsschwingungen unterschieden, Relationsschwingungen höhern Grades. $S_1 > 4$; Erscheinungen im Spectrum. Der Fall $S_1 = 4$. Der Fall $S_1 = 3$; Pseudo-Summe und Pseudo-Octavschwingung. Der Fall $S_1 = 2$; Pseudo-Gleichung. Reine Relationsschwingung. Aussonderungsmechanismen. Symmetrische Mechanismen. Kugelschwingungen. H.

Ur theorien för de solida kropparnes rörelse. Af A. V. Bäcklund, E. O. Professor i Lund. Efter författarens universitetsföreläsningar tvänne månader af vårterminen 1896. Lund, Oleerupska. 122 S.

Die Gegenstände der hier herausgegebenen Vorlesungen sind folgende: Allgemeine Charaktere der Bewegung fester Körper. Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt ohne äussere Kräfte. Unter Schwere als einziger äussern Kraft. Die die Präcession und Nutation bildenden Bewegungen auf den Taggleichheitslinien und an der Erdaxe. Rotation des Mondes um seinen Schwerpunkt. Bewegung der Erdpole infolge variirender Massenverteilung der Erde. H.

De versnellingen van hoogere orden. Door Dr. G. Schouten. Verhandelingen der Koninkl. Ak v. Wet. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel II. No. 5. Amsterdam 1894. Johannes Müller. 4°. 26 S.

Die Arbeit schliesst sich an die Kinematik von Somoff an. Es werden sehr ausführlich die elementaren Begriffe der Kinematik entwickelt und benannt, geometrisch und in Rechnungsform mittelst rechtwinkliger Coordinaten dargestellt. Beschleunigungsvector heisst die Strecke gleich der Beschleunigung eines Punktes eines Gebildes in tangentialer Richtung an die Bahn vom momentanen Punkte aus gezogen, Beschleunigung nächst höherer Ordnung die Beschleunigung des Endpunkts des Beschleunigungsvectors. Die Längen ihrer Orthogonalprojectionen finden sich ausgedrückt in höheren Differentialquotienten des Weges nach der Zeit. Die Theorie wird weiter durchgeführt in Betreff der Winkelbeschleunigungen.

H.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik) Erster Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhren und Röhrenleitungen bei constanter sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen. — Zweiter Band: Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen in Canälen und Flüssen. Mit 431 – 282 Erklärungen, mehr als 300—150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichniss nebst einer Sammlung von 220—134 gelösten und ungelösten Aufgaben mit den Resultaten der letztern. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet nach dem System Kleyer von Richard Klimpert. Stuttgart 1893. Julius Maier. 364 + 228 S.

Dass Theorie und Technik einander nicht entbehren können, gilt, wie in aller physikalischen Forschung, auch, und in besonders stark hervortretender Weise, von der Hydrodynamik. Als Lehrgegenstand zeigt indes letztere manches Eigentümliche. Zunächst sind die Hypothesen der Theorie noch keine feststehenden, vielmehr muss zu deren empirischer Entscheidung approximativ zu Werke gegangen werden, um erst für die einzelnen zu untersuchenden Fälle die überwiegend wirkenden Ursachen, welche nicht unter allen Umständen dieselben sind (namentlich im 1. Buche), gegenüber den anfänglich zu vernachlässigenden zu isoliren. Ferner sind die mitwirkenden Ursachen mannigfaltig, die Vorgänge hingegen zum Teil

als innere der Beobachtung entzogen, während selbst die äusseren nur summarische Quantitäten ergeben. Da hiernach die Forschung von vielen Seiten beginnen muss, so kann, wenn schon auf gegenwärtigem Standpunkt eine Lehre der Hydrodynamik aufgestellt werden soll, der Vortrag schwerlich ein pragmatisch fortschreitender sein. Hier kommt nun einmal die Kleyer'sche Teilung des Vortrags in Frage, Erklärung und Antwort einigermassen zustatten, indem, wo das Ganze noch keine sichtliche Einheit bildet, wenigstens die vielen Teile durch die jedem vorangestellte Frage einzeln unter einheitlichen Gesichtspunkten behandelt werden. Die Hauptabschnitte des 1. Bandes sind: Ausfluss des Wassers aus Gefässen und durch Röhren bei unveränderlicher Druckhöhe, und zwar 1) aus Gefässen, 2) Contraction des ausfliessenden Strahles, 3) Ausfluss durch Ansatzröhren, 4) Bewegung in Röhren und Röhrenleitungen, 5) Hindernisse in der Bewegung bei Gewindigkeits- und Richtungsveränderungen, dann Abfluss bei veränderter Druckhöhe und zwar 1), aus horizontaler Bodenöffnung, 2) aus Seitenöffnungen; die des 2. Bandes, 1. Hälfte: Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, und zwar die dabei zu beobachtenden verschiedenen Geschwindigkeiten, die an fliessenden Gewässern vorzunehmenden Messarbeiten, dann von dem durch Wasser ausgeübten Stosse und Widerstande und zwar 1) Stoss des bewegten Wassers, 2) Widerstand des Wassers gegen bewegte feste Körper, 3) Reaction ausströmender Flüssigkeiten. In beiden Bänden folgen noch Aufgaben und Formeln. H.

Over de toepassing der quaternionen op de mechanica en de natuurkunde. Door P. Molenbroek. Verhandelingen der Koninkl. Ak. van wet. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel II. No. 3. Amsterdam 1893. Johannes Müller. 38 S.

Die Arbeit betrifft die Bedeutung des Operators ∇, welcher bei Hamilton einigemal vorkommt und von Tait ausführlich erklärt ist. H.

Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique. Par G. Nédélec. Premier volume. Paris 1897. Gauthier Villars et fils. 246 S.

Das Buch behandelt der Reihe nach: Ursprung und Natur der Vectorenrechnung, allgemeine Begriffe von den Vectoren, Theorie

der Versoren, Quaternionenversorenrechnung, vectorielle Multiplication, vectorielle Summation; erste Begriffe von vectoriellen Functionen, Begriffe von den expliciten Functionen, vectorielle Begriffe 1. Grades, vectorielle Theorie der Ebene, vectorielles anharmonisches Verhältniss. Bemerkenswert ist, dass der Verfasser in der Einleitung als Denunciant gegen die Hamilton'sche Lehre auftritt, welche die analytische Geometrie und Algebra in neuer Verkleidung als neue Theorie aufstellt, und doch nicht zeigt, inwiefern die hier vorgetragene Lehre nicht in gleichem Falle sei. H.

Optik, Akustik und Elasticität.

Die Elemente der photographischen Optik. Enthaltend eine gemeinverständliche Darstellung der Einrichtung photographischer Linsensysteme, sowie Angabe über Prüfung derselben. Nach dem neuesten Standpunkt der Wissenschaft und Praxis bearbeitet von Dr. Hugo Schroeder, Optiker und Mechaniker. Zugleich als Ergänzungsband zu Vogel's Handbuch der Photographie. Mit 85 Figuren im Text. Berlin 1891. Robert Oppenheim. 420 S.

Die Themata sind folgende: Elemente der geometrischen Optik in Bezug auf ihre Anwendung auf photographische Linsen; chromatische oder Farbenabweichung; sphärische Aberration und Anomalien schiefer Strahlenkegel; perspectivische Anomalien; Beugungsaberration; Lichtstärke, Bildfeld und Vergrösserungsapparate; Untersuchungsmethoden der photographischen Linsen und die hierzu dienlichen Apparate; kurze Beschreibung der bemerkenswertesten Linsensysteme für Photographie. H.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem theoretischen Gase. Bearbeitet auf Grund der dynamischen Gastheorie vom k. u. k. Oberstlieutenant Wilhelm Schlemüller. Prag, H. Dominicus. 4°. 12 S.

Die Schrift enthält resultirende Sätze über Bewegung von Gasmolecülen aus einer frühern Arbeit: „Vier physikalische Abhandlungen“. Die zum Verständniss jener Sätze notwendigen Data sind nicht so weit mitgeteilt um irgend ein Urteil über die Schrift geben zu können. H.

Optique géométrique. 6e mémoire. Genèse, variété et polarisation axiale des faisceaux de rayons lumineux ou calorifique. — 8e mémoire. Complément aux propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons en général. — Par M. l'Abbe Issaly. Extrait des Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 50 + 42 S.

Die erstere Abhandlung enthält: die Genesis und axiale Polarisation der optischen (Malus'schen) Strahlenbüschel; die der anoptischen oder orthogonalen; geometrische Anwendung der vorgenannten Eigenschaften auf die Pseudosphäre und Pseudoebene; Eigenschaften der Doppelreihe dioptischer, mittlerer und complementarer Strahlenbüschel; homographische Relationen zwischen den Berührungsebenen verschiedener Malus'schen Kegel und der ihnen entsprechenden axialen Ebenen; summarische Erweiterung alles Vorhergehenden auf den Fall schiefer Coordinaten; die letztere: chromatische Polarisation; Fall zweier rein krystallisirter Lamellen; Berechnung des Falles dreier Lamellen; Fall vierer Lamellen; Verallgemeinerung; der Methode; neue Eigenschaften der Diagonalen des Ausweichungsparallelogramms; Rückgang zu den zweiaxigen, neutralen Linien; Identificirung der optischen Pole eines zweiaxigen Krystalls mit den respectiven Polen einer Normale und ihrer Antinormalen; Bemerkung über 2 besondere Fälle bezüglich auf die chromatische Polarisation von n rein krystallisirten Lamellen. H.

Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen in verband met het Halleffect. Door Dr. C. H. Wind. Verhandl. der Koninkl. Ak. van Wet. in Amsterdam. Eerste sectie. Deel V. No. 3. Amsterdam 1896. Johannes Müller. 91 S.

Die Teile der Abhandlung sind: die zu betrachtenden Erscheinungen, nach Zeit und Ort periodische Veränderungen; die Maxwell'schen Gleichungen und Grenzbedingungen für den Fall, dass keine äussere magnetische Kraft besteht; die weitere Verbindung zwischen elektrischem Strom und elektrischer Kraft, im besondern für den vorgenannten Fall; Grundgleichung für den Fall, dass eine äussere magnetische Kraft besteht; Fortpflanzung einer Lichtbewegung in reinem willkürlichen Medium bei Magnetisirung parallel der Einfallsfläche; Zurückwerfung und Berechnung an der Grenze zweier Media, in deren einem das gebrochene Licht sich bewegt; Theorie des Kerreffects; Vergleichung der Theorie mit den Wahrnehmungen des Kerreffects; Abweichungen zwischen Theorie und

Wahrnehmung; Fortpflanzung einer Lichtbewegung in einem Medium und Zurückwerfung gegen eine Grenzfläche; magnetische Drehung der Polarisationsfläche in Dielektrika; Theorie von Drude; Theorie von Goldhammer; Anwendung eines Symmetrieprincips auf Zurückwerfung gegen ein nicht magnetisirtes Metall; Anwendung auf den Beginn der Gegenseitigkeit; eine mögliche physische Erklärung des Halleffects in Verbindung mit der Theorie der Elektricitätsbewegung durch Jonen. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, Mor., Vorlesungen üb. Geschichte der Mathematik, 3. (Schluss-)Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1758.. 3. Abtlg. Die Zeit von 1727 bis 1758. gr. 8⁰. (XIV u. S. 473—893 m. 70 Fig.) Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Engelmann, Th. W., Gedächtnissrede auf Emil du Bois-Reymond. gr. 4⁰. (24 S.) Berlin, G. Reimer. 1 Mk.

Feier, die, des fünfzigjährigen Bestehens des königl. meteorologischen Institutes am 16. X. 1897. gr. 4⁰. (27 S.) Berlin, Asher & Co. 1 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1892. 48. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8⁰. (XLIII, 778 S.) Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

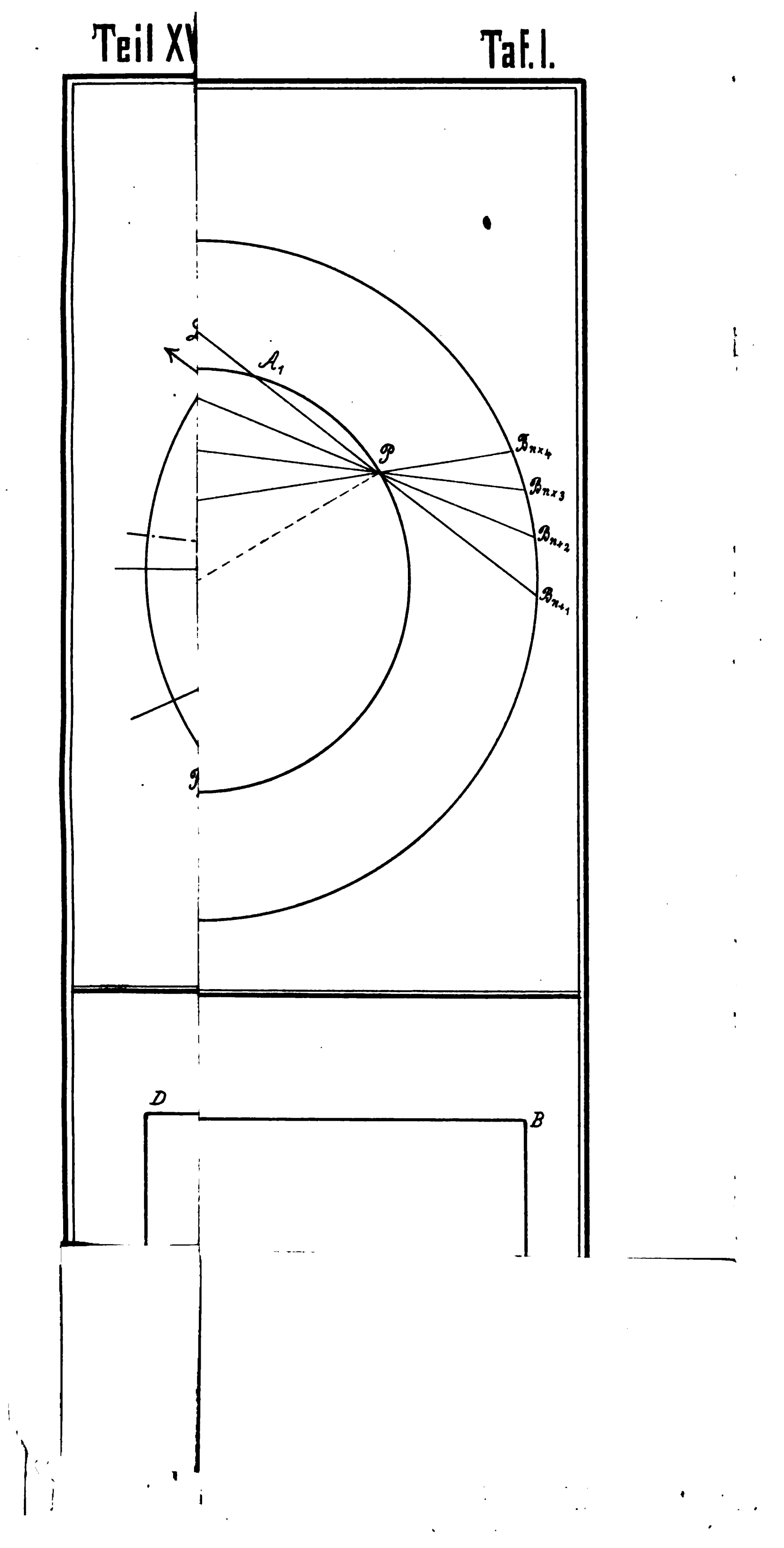
Gross, Th., Robert Mayer u. Hermann v. Helmholtz. Eine krit. Studie. gr. 8⁰. (V, IV, 174 S.) Berlin, Fischer's technolog. Verlag. Geb. 4,50 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. 27. Bd. Jahrg. 1896. 1. Hft. gr. 8⁰. (368 S.) Berlin, G. Reimer, 12 Mk.

Kindler, O. S. B., die Zeitmesser bis zur Erfindung der Pendeluhr. hoch 4⁰. (36 S. m. 16 Fig.). Einsideln, Benziger & Co. 2 Mk.

Methode und Principien.

Göhler, R., Decimalzahlen u. Brüche im Rechenunterricht der Volksschule, Skizzen zur methodischen Behandlung dieser Zahlen, sowie Aufgaben f. das Kopfrechnen. gr. 8⁰. (IV, 64 S.) Leipzig, Alfr. Hahn. 1 Mk.


A1
P
Bn+4
Bn+3
Bn+2
Bn+1
D
B

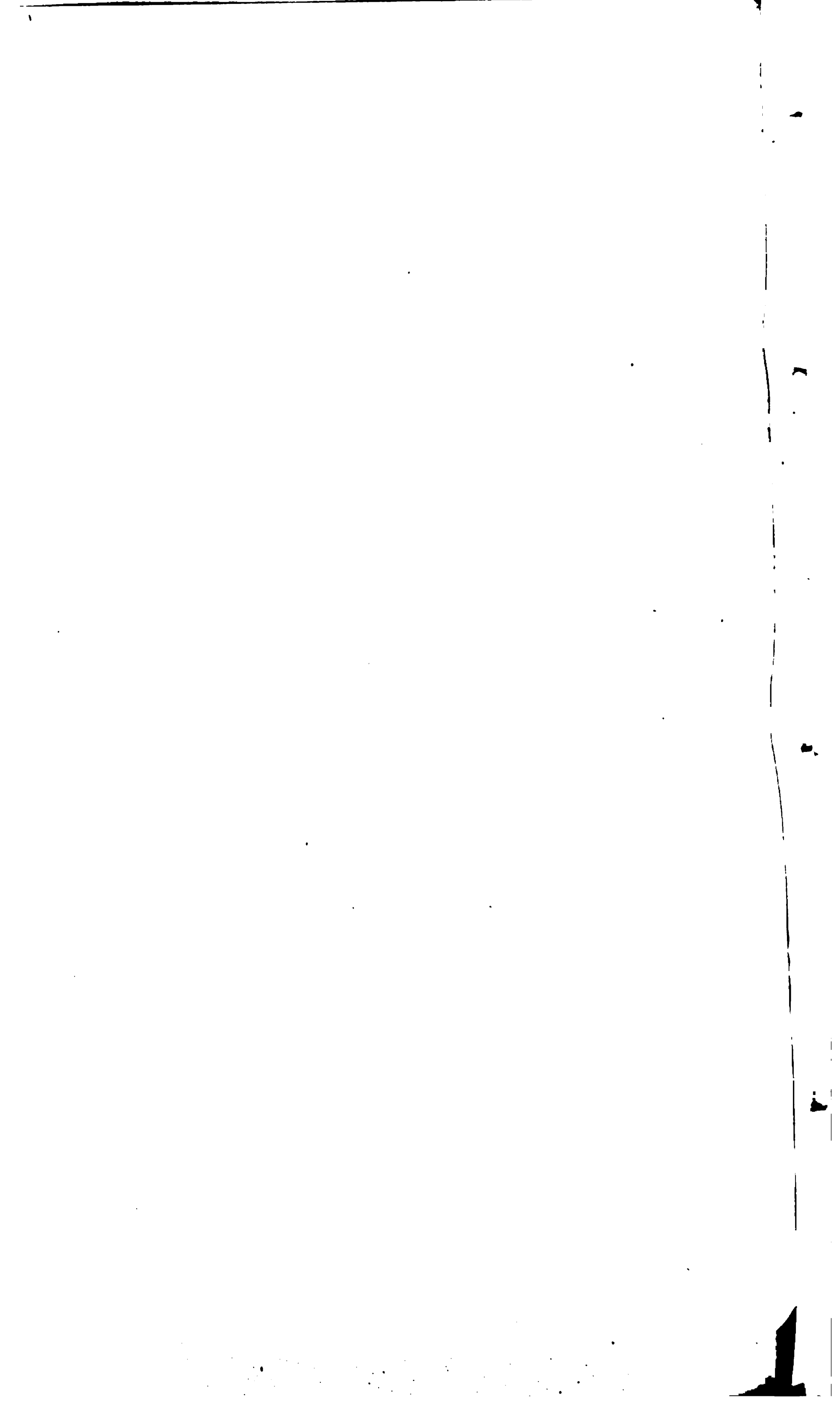
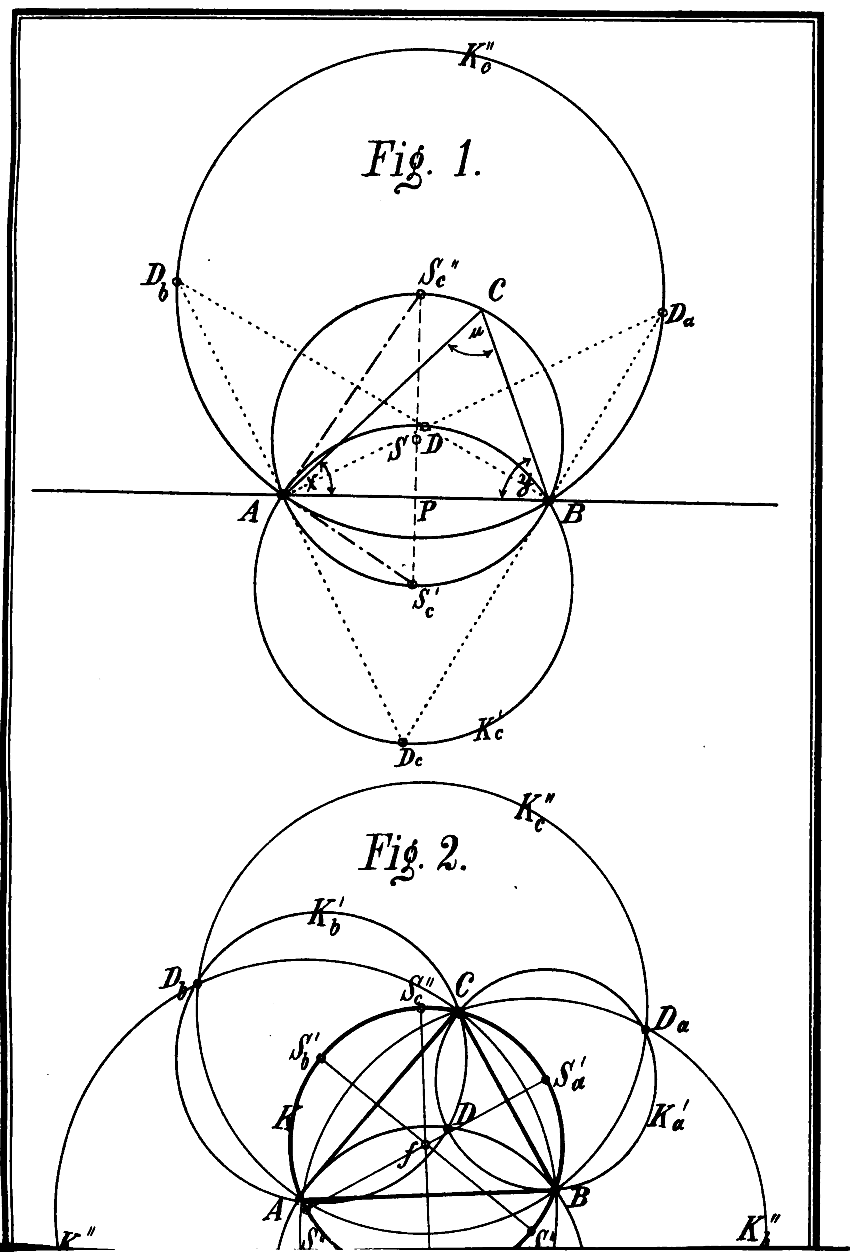
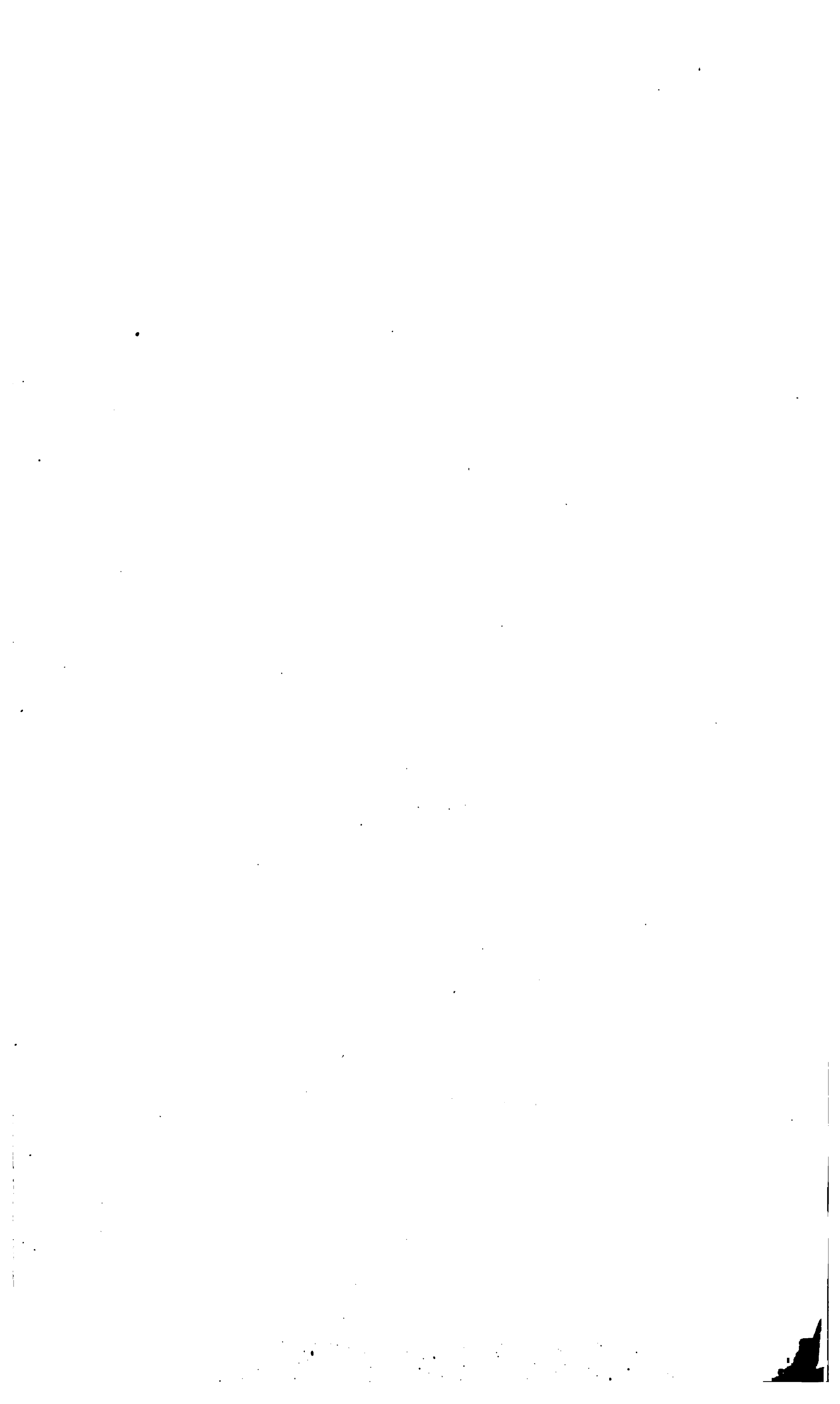
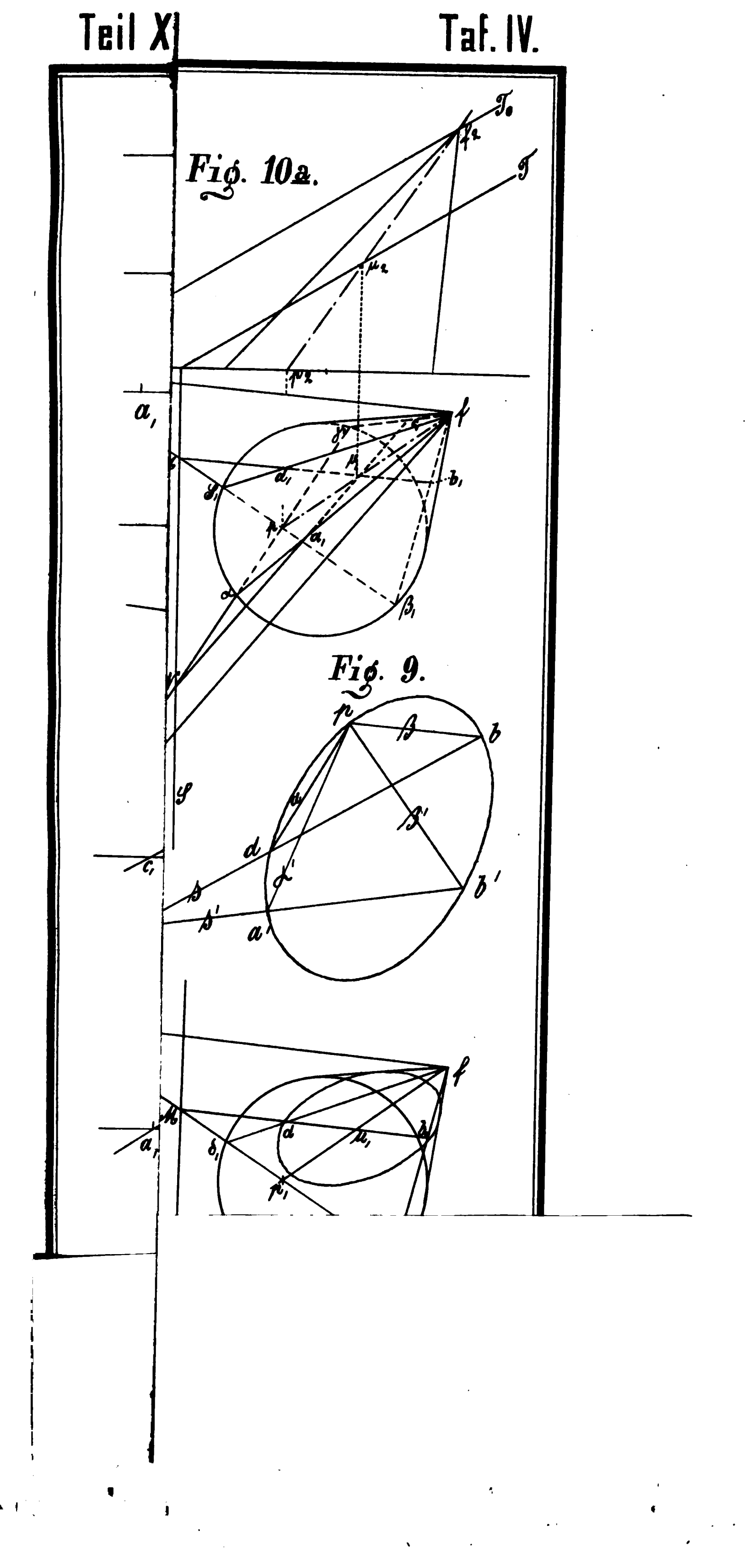


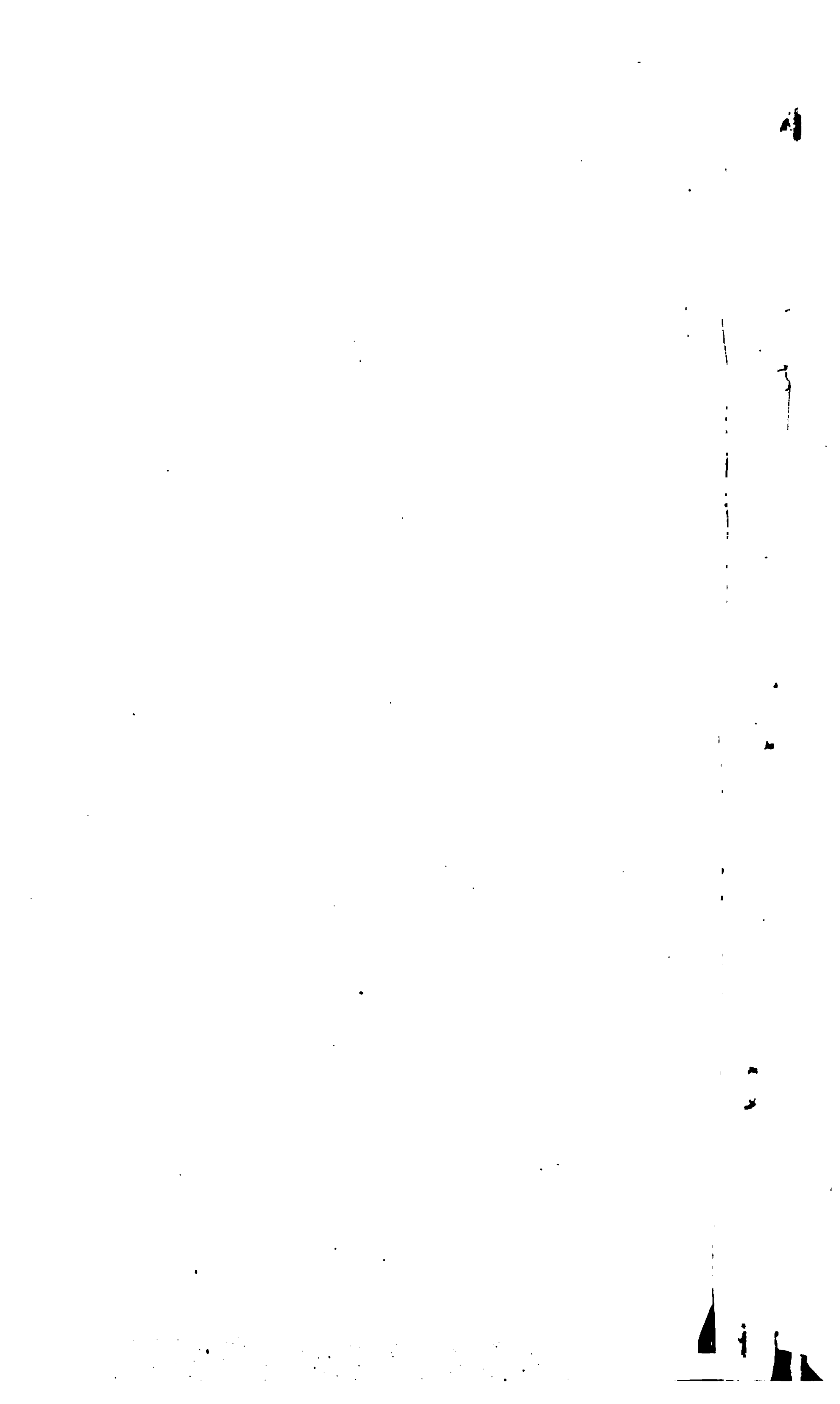
Fig. 5.

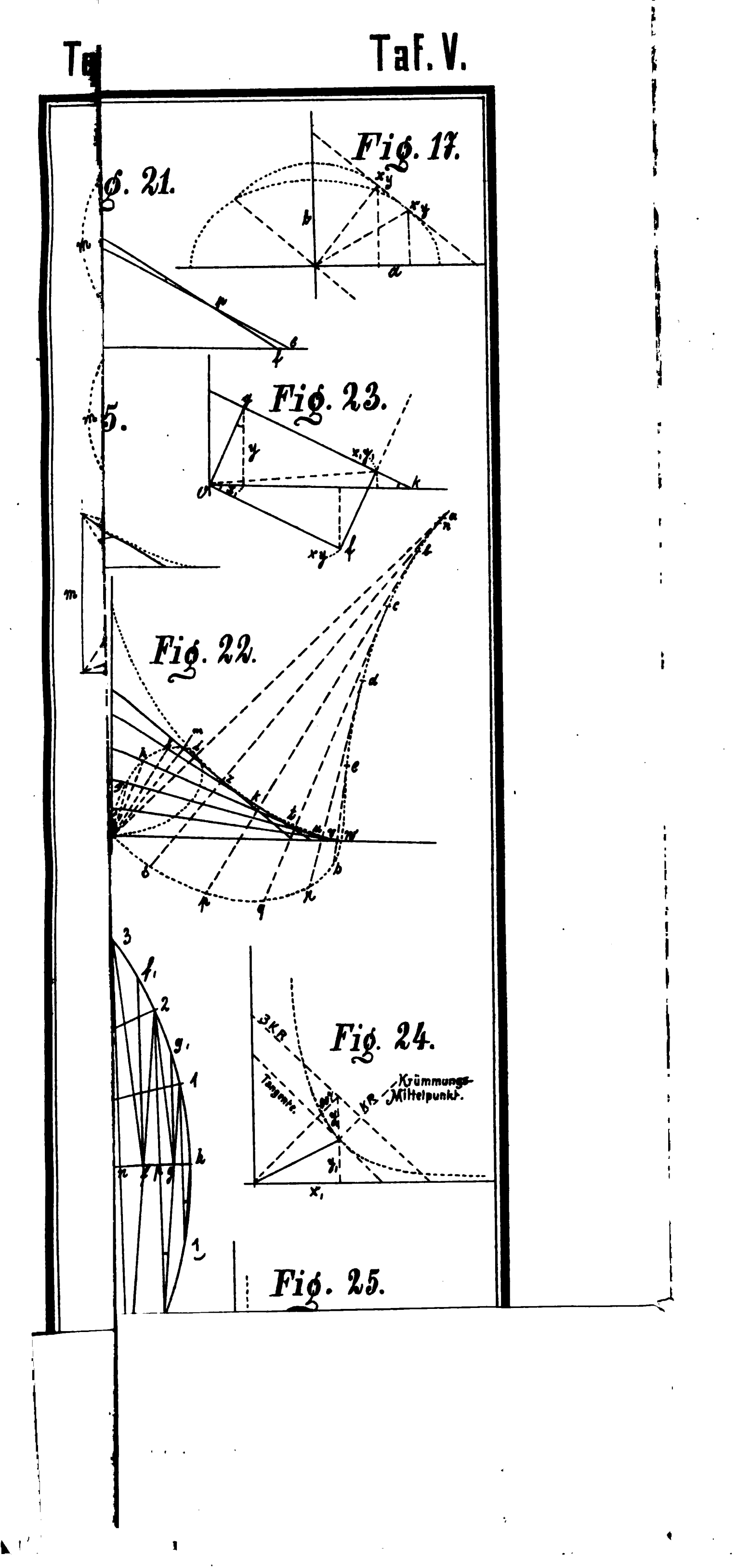
Fig. 10.


Fig. 1.
K_c''
D_b
S_c''
C
D_a
μ
S
D
x
y
A
P
B
S_c'
K_c'
D_c
Fig. 2.
K_c''
K_b'
D_b
S_c''
C
D_a
S_b'
S_a'
K
D
K_a'
f
A
B
K_b''

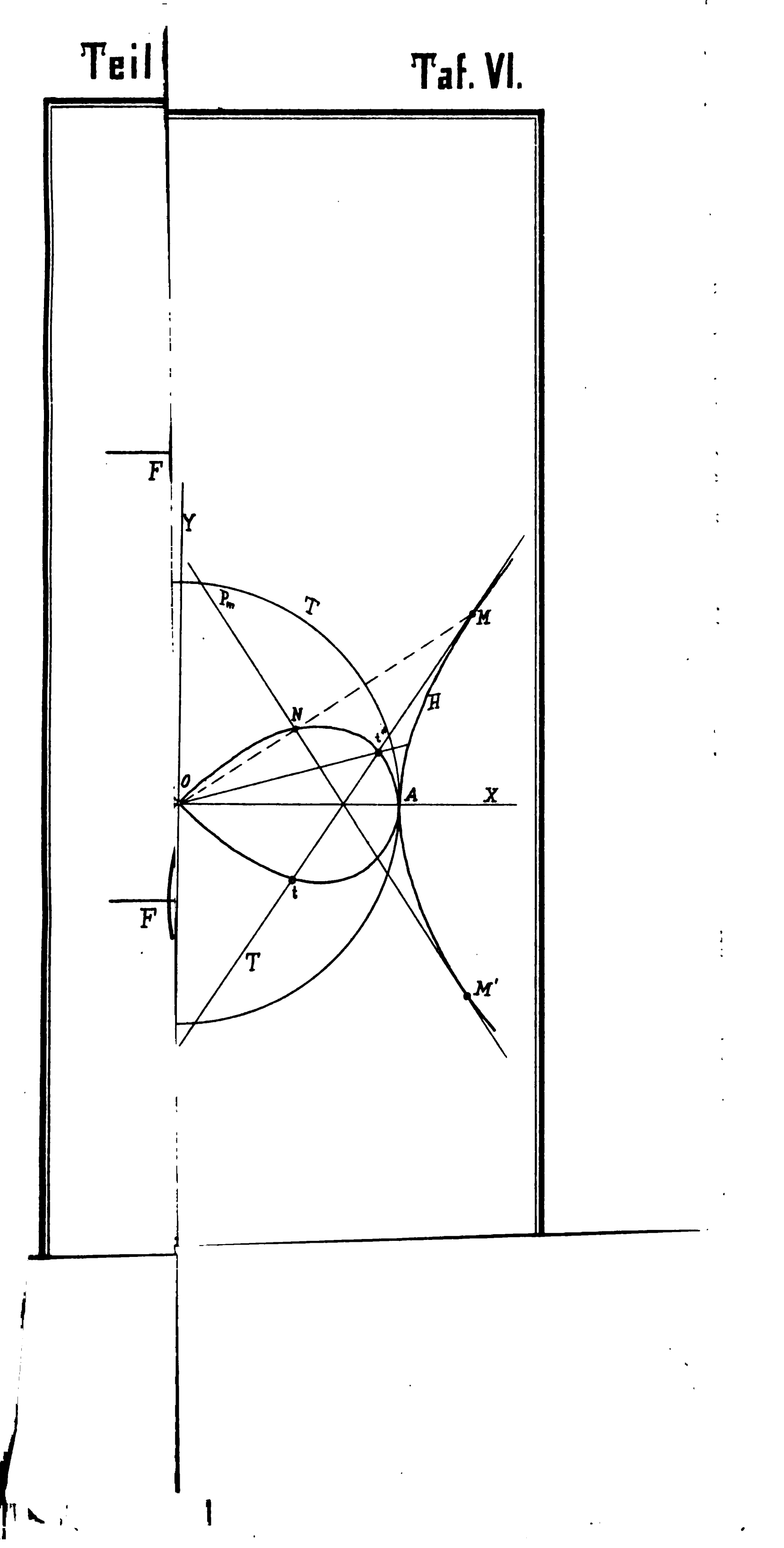


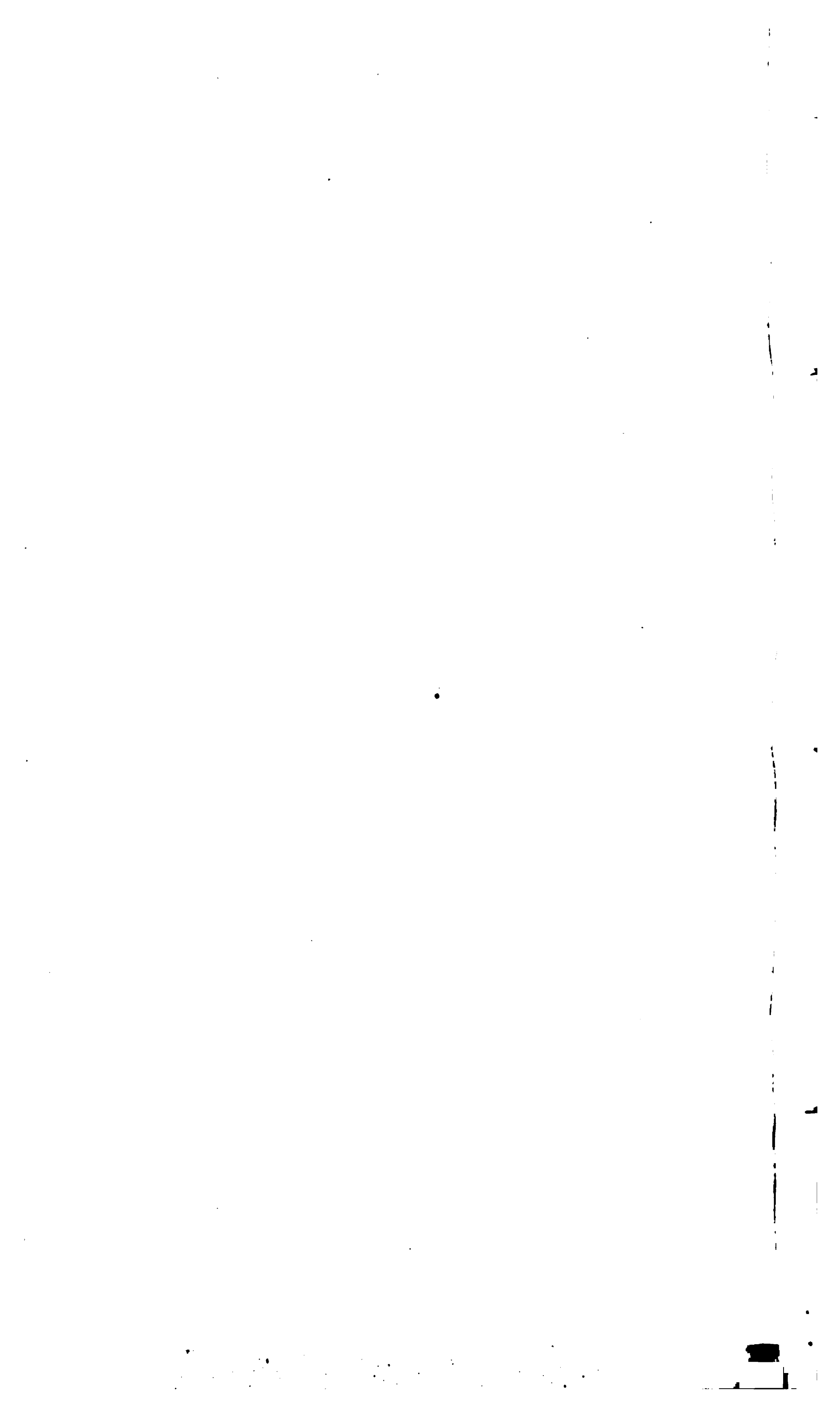

Fig. 10a.
Fig. 9.





Taf. V.
Fig. 17.
ǵ. 21.
5.
Fig. 23.
Fig. 22.
Fig. 24.
3KR
Tangente
KR
Krümmungs-
Mittelpunkt.
Fig. 25.


F
Y
P_m
T
M
H
N
t'
O
A
X
t
F
T
M'



Teil

Taf. VII.

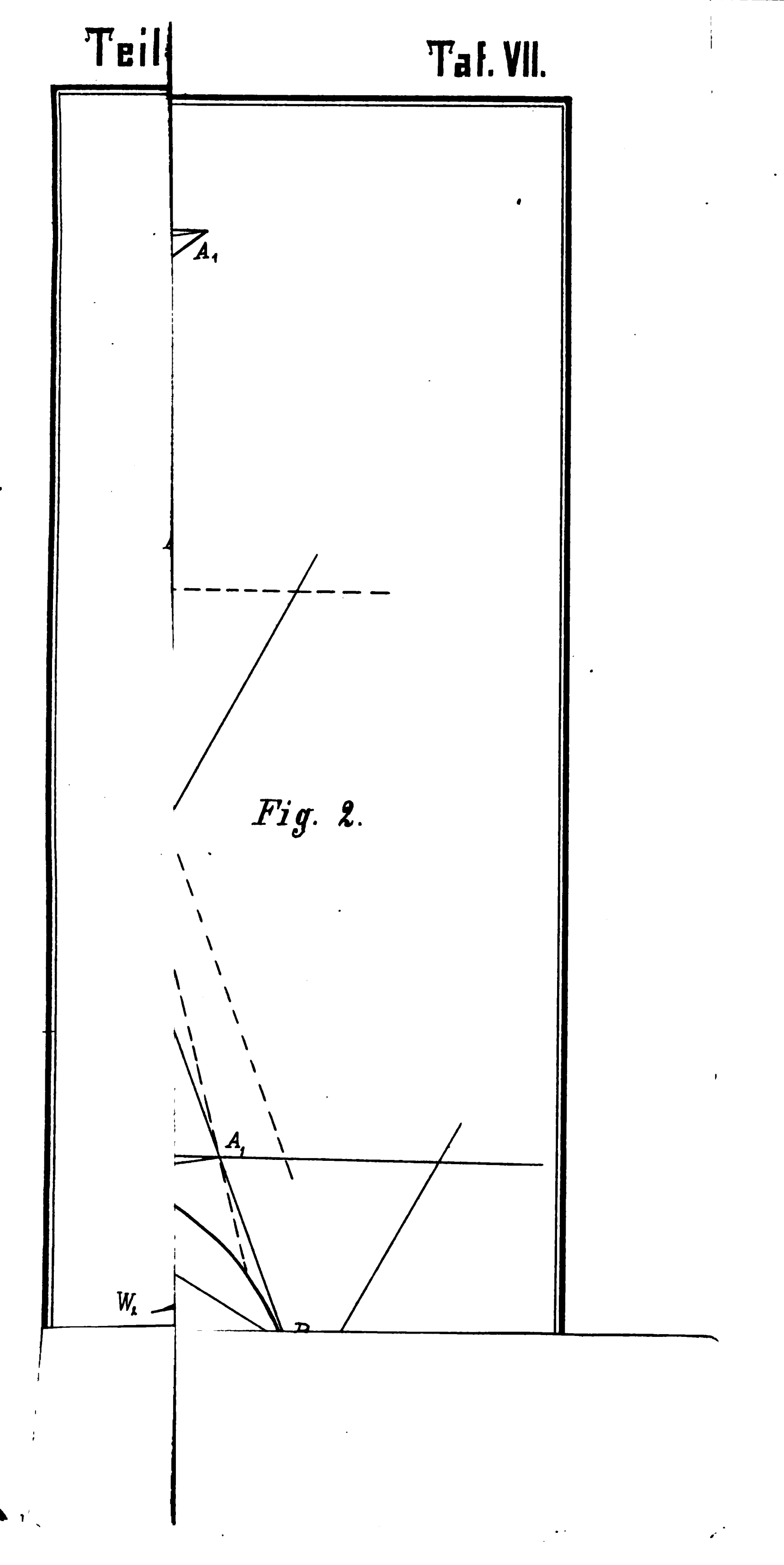


Fig. 2.

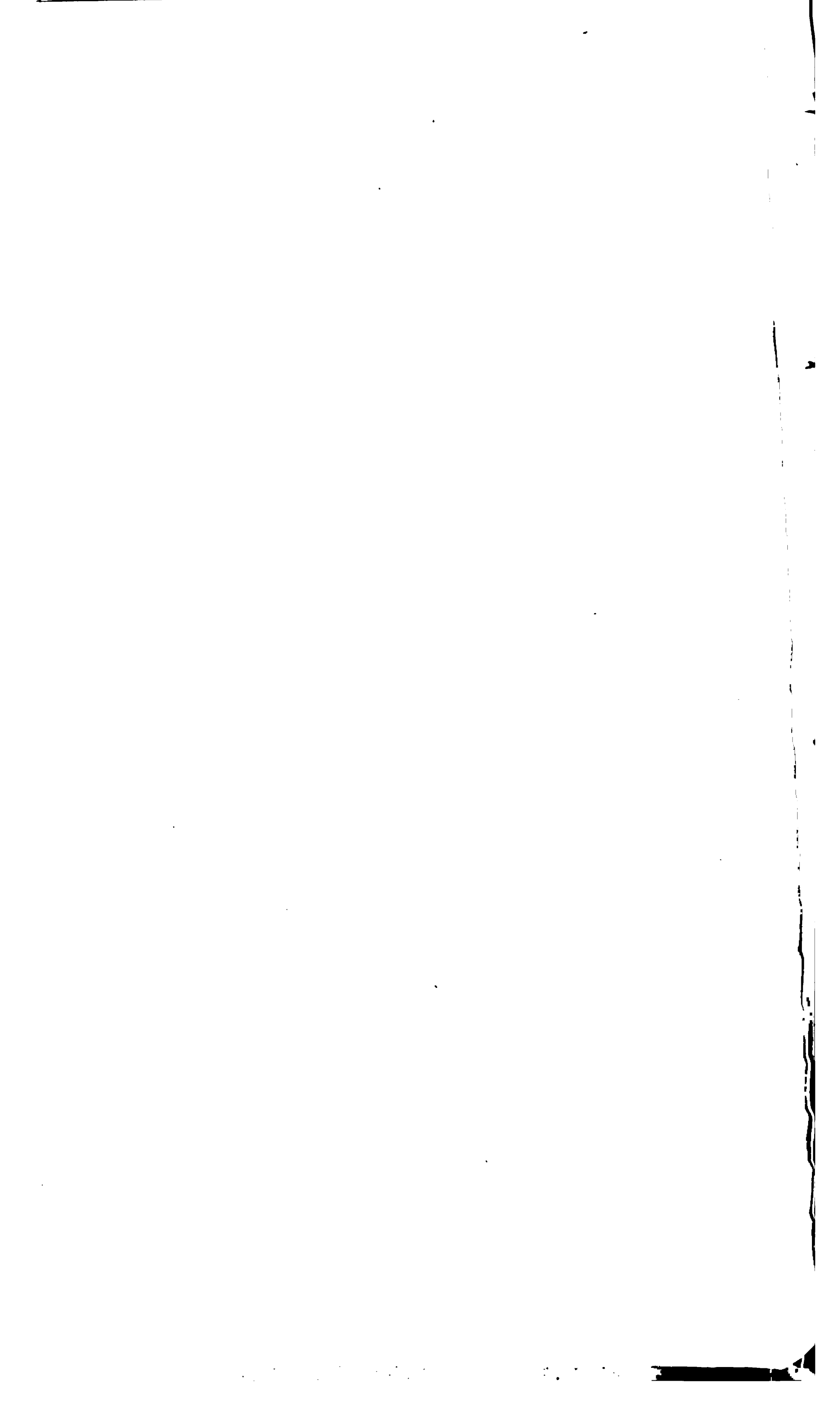


Fig. 3.

